Disciplina: Bifurcação com Simetria
Regente: Ana Paula da Silva Dias

Pré-requisitos: Cursos básicos de Álgebra Linear, Geometria Euclidiana, Análise Real de várias variáveis, e Teoria de Grupos, Aneís e Módulos.

Objectivos principais: O primeiro é o de fazer uma introdução a algumas aplicações de Álgebra que envolvem noções básicas de por exemplo, grupo de simetria, anel, módulo e espaço vectorial. São focados resultados clássicos de teoria invariante.

O segundo objectivo é o de explorar a ligação da teoria invariante com sistemas de equações diferenciais autónomas e ordinárias, dependendo de parâmetros, e que apresentem simetrias e pontos singulares. Isto é, mostrar como técnicas algébricas são úteis na compreensão de transições em sistemas simétricos.

Por outro lado, este programa representa uma pequena introdução à área de teoria de bifurcação com simetria. Esta é uma área recente e rica que combina métodos de várias áreas da Matemática.

Um pouco sobre o curso:

Seja

$$\frac{dx}{dt} = g(x, \lambda) \tag{1}$$

um sistema de equações diferenciais ordinárias, em que $g : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R} \to \mathbf{R}^n$ é C^∞. Consideramos problemas de bifurcação que podem ser formulados através do sistema de equações

$$g(x, \lambda) = 0, \tag{2}$$

em que a incógnita é $x \in \mathbf{R}^n$ e $\lambda \in \mathbf{R}$ é o parâmetro de bifurcação.

O conjunto

$$\{(x, \lambda) \in \mathbf{R}^{n+1} : \; g(x, \lambda) = 0\}$$

representa o *diagrama de bifurcação* de g. Fixado λ, seja $n(\lambda)$ o cardinal do conjunto

$$\{x \in \mathbf{R}^n : \; g(x, \lambda) = 0\}.$$

É suposto que $g(x_0, \lambda_0) = 0$. Se $n(\lambda)$ varia numa vizinhança de λ_0, dizemos que (x_0, λ_0) é um *ponto de bifurcação.* O teorema da função implícita implica que seja necessário que

$$\det(dg)_{x_0, \lambda_0} = 0$$

para que (x_0, λ_0) seja um ponto de bifurcação. (Aqui, dg representa a derivada parcial de g em ordem a x.)

Dado um grupo de simetrias Γ dizemos que $\gamma \in \Gamma$ é uma *simetria* de g se

$$g(\gamma x, \lambda) = \gamma g(x, \lambda) \tag{3}$$

para todo $x \in \mathbf{R}^n$.

Algumas questões focadas neste curso:

(i) Quais as simetrias dos equilíbrios dos ramos de bifurcação?

(ii) Qual a forma de g?

(iii) Estabilidade dos equilíbrios?

Programa resumido:

1. Introdução à teoria de bifurcação de equações com simetria.

2. Teoria de grupos. Inclui: breve referência a grupos de Lie (compactos). Representação de um grupo de Lie num espaço vectorial real de dimensão finita. Decomposição de uma representação em representações mais simples (irredutíveis). Aplicações lineares simétricas e irredutibilidade absoluta.

2. Teoria invariante. Descrição da forma dos campos de vectores definidos em $\mathbf{R}^n$ que comutam com a acção de um grupo de Lie compacto.

3. Perda de simetria em bifurcações de pontos de equilíbrio.

4. Exemplo: $\mathbf{D}_n$ (grupo das simetrias de um polígono regular de n lados) – acção em $\mathbf{C}$.

Bibliografia principal:

[1] M.Golubitsky e I.Stewart, 2002. *The Symmetry Perspective: From Equilibrium to Chaos in Phase Space and Physical Space*, Birkhäuser.

[2] M.Golubitsky, I.Stewart e D.G.Schaeffer, 1985. *Singularities and groups in bifurcation theory.* Vol. II, Springer-Verlag, New York.