Estudar **Matemática** na FCUP

Apoio ao aluno da FCUP
Matemática elementar

Quiz: Álgebra elementar

Lucinda Lima

lclima@fc.up.pt

Last Revision Date: 19 de Maio de 2009

Iniciar Responda a cada uma das seguintes questões. Objectivo: 100%.

1. (5[pts]) Assinale o inverso do número real $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$:

☐ $\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}\right)$ ☐ $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ ☐ $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}+2}$ ☐ $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}}$

2. (5[pts]) Assinale a única alternativa que completa correctamente a afirmação: Para quaisquer números reais não nulos a e b, o inverso de $1+\frac{b}{a}$ é:

☐ $\frac{\frac{1}{a+b}}{\frac{1}{b}}$ ☐ $\frac{\frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a}}$ ☐ $1+\frac{a}{b}$ ☐ $\frac{\frac{1}{a}}{\frac{1}{a+b}}$

3. (5[pts]) Assinale, entre as seguintes, a única afirmação correcta a respeito do número real $a = \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}\right)}$:

☐ a é um número inteiro ☐ a não é um número racional
☐ a é um número racional não inteiro ☐ a é um número irracional

4. (5^{pts}) O conjunto de soluções reais x da inequação $\frac{1}{x} < \frac{1}{2}$ é:

- ☐ $]-\infty, 2[\setminus\{0\}$
- ☐ $]2, +\infty[$
- ☐ $]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$
- ☐ $]-\infty, -2[\cup]2, +\infty[$

5. (5^{pts}) Assinale a única alternativa que completa correctamente a afirmação: o número $a = \frac{10^{-2}-2^{-2}}{5^{-3}}$ é:

- ☐ um número inteiro positivo
- ☐ um número inteiro negativo
- ☐ um número racional não inteiro positivo
- ☐ um número racional não inteiro negativo

6. (5^{pts}) Os números naturais n que satisfazem a condição $\frac{5}{2^n} < \frac{1}{4}$ são exactamente:

- ☐ $1, 2$ e 3
- ☐ $1, 2, 3$ e 4
- ☐ todos os números inteiros maiores ou iguais a 4
- ☐ todos os números inteiros maiores do que 4

7. (5^{pts}) Assinale a única alternativa que completa correctamente a afirmação: para qualquer polinómio de coeficientes reais $p(x)$, o número 1 é raíz de $p(x)$ se e só se:

- ☐ 1 é raíz de $p(x) + x^2 - 2x + 1$
- ☐ 1 é raíz de $p(x)(x^2 - 2x + 1)$
- ☐ 1 é raíz de $p(x)(x - 1)$
- ☐ 1 é raíz de $p(x) + (x + 1)$

8. (5^{pts}) Assinale, entre os seguintes, o único número igual a

$$\sqrt{e^{-4} + e^4 - 2}$$

- ☐ $e^{-2} + e^2 - \sqrt{2}$
- ☐ $e^{-2} + e^2$
- ☐ $e^{-2} - e^2$
- ☐ $e^2 - e^{-2}$

9. (5^{pts}) Assinale, entre os seguintes, o único número que pertence ao intervalo $[\frac{7}{11}, 1]$.

- $\frac{\sqrt{130}-\sqrt{16{,}8}}{\sqrt{121}}$
- $\frac{\sqrt{121}-\sqrt{16{,}8}}{\sqrt{130}}$
- $\frac{\sqrt{16{,}8}-\sqrt{121}}{\sqrt{130}}$
- $\frac{\sqrt{130}+\sqrt{16{,}8}}{\sqrt{121}}$

10. (5^{pts}) Assinale a única alternativa que completa correctamente a afirmação: se $p(x)$ é um polinómio do segundo grau com coeficientes inteiros que tem uma raíz irracional, então

- $p(x)$ tem necessariamente uma única raíz
- $p(x)$ pode ter uma raíz racional
- $p(x)$ tem necessariamente duas raízes irracionais distintas
- $p(x)$ pode ter uma raíz complexa

Fim Score: Correct

Pontuação:

Percentagem:

Solutions to Quizzes

Solution to Quiz: Calculando directamente o inverso de $\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}$:

$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{-1} = \left(\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}}\right)^{-1} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ e, multiplicando o numerador e o denominador por $\sqrt{2}$, obtém-se o mesmo número na forma $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}+2}$.

Alternativamente, verifica-se que $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{6}+2} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{2}\sqrt{3}}{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})} \cdot \frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = 1$. ■

Solution to Quiz: $\frac{\frac{1}{a+b}}{\frac{1}{a}} = \frac{a}{a+b} = \left(\frac{a+b}{a}\right)^{-1} = \left(1 + \frac{b}{a}\right)^{-1}.$ ■

Solution to Quiz: $a = \frac{2\sqrt{2}}{\left(\sqrt[4]{18}+\sqrt[4]{2}\right)\left(\sqrt[4]{18}-\sqrt[4]{2}\right)} = \frac{2\sqrt{2}}{(\sqrt[4]{18})^2-(\sqrt[4]{2})^2} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{18}-\sqrt{2}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{2}(\sqrt{9}-1)} = 1 \in \mathbb{Z}$ ■

Solution to Quiz: $\frac{1}{x} < \frac{1}{2} \iff x < 0 \vee (x > 0 \wedge \frac{1}{x} < \frac{1}{2}) \iff x < 0 \vee x > 2 \iff x \in]-\infty, 0[\cup]2, +\infty[$ ∎

Solution to Quiz: $a = \frac{10^{-2}-2^{-2}}{5^{-3}} = \frac{\frac{1}{10^2}-\frac{1}{2^2}}{\frac{1}{5^3}} = \frac{\frac{1-5^2}{10^2}}{\frac{1}{5^3}} = \frac{-24\times5^3}{10^2} = \frac{-24\times5}{2^2} = -30 \in \mathbb{Z}^-$ ∎

Solution to Quiz: Se $n \in \mathbb{N}$, $\frac{5}{2^n} < \frac{1}{4} \iff \frac{2^n}{5} > 4 \iff 2^n > 20 \iff n > \sqrt{20} \iff n \geq 5$ ■

Solution to Quiz: Seja $q(x) = p(x) + x^2 - 2x + 1$. Uma vez que 1 é raíz de $x^2 - 2x + 1$ (porque $1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0$), então: 1 é raíz de $q(x)$ $\iff q(1) = 0 \iff p(1) + 1^2 - 2 \cdot 1 + 1 = 0 \iff p(1) = 0 \iff$ 1 é raíz de $p(x)$.

Alternativamente, pode-se justificar que as restantes possibilidades não correspondem a afirmações correctas: 1 é raíz de $p(x)(x^2-2x+1)$ e de $p(x)(x-1)$, independentemente de 1 ser ou não raíz de $p(x)$; e, se 1 é raíz de $p(x)$, então não é raíz de $p(x)+(x+1)$ pois $p(1)+(1+1) = 2 \neq 0$. ∎

Solution to Quiz: $\sqrt{e^{-4}+e^{4}-2} = \sqrt{(e^{-2})^2+(e^2)^2-2e^{-2}e^2} = \sqrt{(e^{-2}-e^2)^2} = |e^{-2}-e^2| = e^2-e^{-2}$ ■

Solution to Quiz: Por exclusão das alternativas incorrectas:

$$\frac{\sqrt{121}-\sqrt{16{,}8}}{\sqrt{130}} = \frac{11-\sqrt{16{,}8}}{\sqrt{130}} < \frac{11-4}{\sqrt{130}} < \frac{7}{\sqrt{121}} = \frac{7}{11};$$

$$\frac{\sqrt{16{,}8}-\sqrt{121}}{\sqrt{130}} < 0 < \frac{7}{11};$$

$$\frac{\sqrt{130}+\sqrt{16{,}8}}{\sqrt{121}} > \frac{\sqrt{130}}{\sqrt{121}} > 1$$

■

Solution to Quiz: As raízes de um polinómio $p(x) = ax^2 + bx + c$, com $a, b, c \in \mathbb{Z}$ e $a \neq 0$, são dadas por $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b}{2a} \pm \frac{\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Como $\frac{-b}{2a}$ é racional, se $p(x)$ tem uma raíz irracional, isto signitica que $b^2 - 4ac > 0$ e $b^2 - 4ac$ não é um número racional. Portanto, ambas as raízes são irracionais e são distintas, porque $\sqrt{b^2 - 4ac} \neq -\sqrt{b^2 - 4ac}$.
$\blacksquare$