Estudar **Matemática** na FCUP

Apoio ao aluno da FCUP
Matemática elementar

Quiz: Números complexos

José Carlos Santos

Last Revision Date: 24 de Abril de 2011
jcsantos@fc.up.pt

Start Responda a cada uma das seguintes questões.
Objectivo: 100%.

1. (5^{pts}) Escolha a resposta correcta:

- $(3+i)+(1-2i)=4+3i$
- $(3+i)+(1-2i)=4-i$
- $(3+i)+(1-2i)=2-i$
- $(3+i)+(1-2i)=2+3i$

2. (5^{pts}) Escolha a resposta correcta:

- $(2+i)-(1-i)=3$
- $(2+i)-(1-i)=3+2i$
- $(2+i)-(1-i)=1+2i$
- $(2+i)-(1-i)=1$

3. (5^{pts}) Escolha a resposta correcta:

- $i^3=1$
- $i^3=i$
- $i^3=-1$
- $i^3=-i$

4. (5^{pts}) Escolha a resposta correcta:

- $(1+2i)^2=5$
- $(1+2i)^2=-3$
- $(1+2i)^2=-3-4i$
- $(1+2i)^2=-3+4i$

5. (5^{pts}) Escolha a resposta correcta:

☐ $\frac{1}{2i} = \frac{i}{2}$ ☐ $\frac{1}{2i} = -\frac{i}{2}$ ☐ $\frac{1}{2i} = \frac{2}{i}$ ☐ $\frac{1}{2i} = -\frac{2}{i}$

6. (5^{pts}) Escolha a resposta correcta:

☐ $\overline{2+3i} = 2+3i$ ☐ $\overline{2+3i} = -2+3i$
☐ $\overline{2+3i} = 2-3i$ ☐ $\overline{2+3i} = -2-3i$

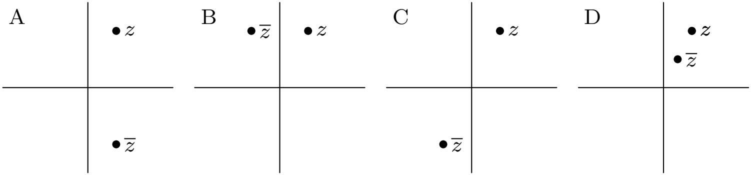
7. (5^{pts}) Se z for um número complexo diferente de $\pm i$, então $\frac{z+i}{z-i}$ é igual a:

☐ $\frac{z^2-1+2zi}{z^2+1}$ ☐ 0 ☐ z^2+1 ☐ $\frac{z^2-1}{z^2+1}$

8. (5^{pts}) A equação $z^2 = -2$

☐ não tem soluções complexas
☐ tem exactamente uma solução complexa
☐ tem exactamente duas soluções complexas
☐ tem mais do que duas soluções complexas

9. (5^{pts}) Das imagens que se seguem:



qual representa um número complexo z e o seu conjugado $\overline{z}$?

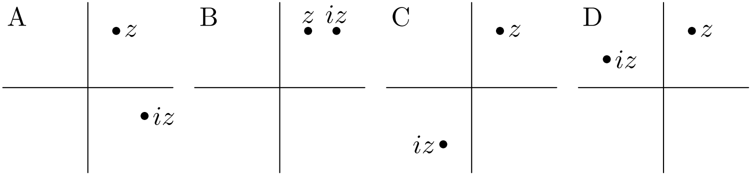
☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

10. (5^{pts}) Seja $z = -1 + \sqrt{3}i$. A sua representação trigonométrica é:

☐ $2(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{6}\right))$ ☐ $2(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{3}\right))$

☐ $2(\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right))$ ☐ $2(\cos\left(\frac{5\pi}{6}\right) + \operatorname{sen}\left(\frac{5\pi}{6}\right))$

11. (5^{pts}) Das imagens que se seguem:



qual representa um número complexo z e o seu produto por i?

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

12. (5^{pts}) Considere a pergunta «Há números complexos z e w tais que $z^2 = -w^2$?» Das respostas que se seguem assinale a correcta.

☐ Não, isso nunca acontece.

☐ Sim, mas só quando $z = w = 0$.

☐ Sim, mas só quando z e w são ambos 0 ou um é 1 e o outro é i.

☐ Sim, numa infinidade de casos.

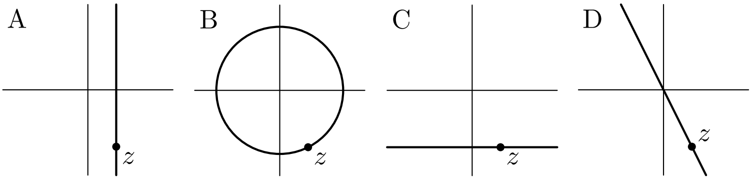
13. (5pts) Se z e w forem números complexos, se $|z| = 1$ e se $|w| = 3$, o que se pode concluir sobre $|z + w|$?

- [ ] $|z + w| = 4$
- [ ] $|z + w| \leq 4$
- [ ] $|z + w| \geq 4$
- [ ] $|z + w| \geq 0$, mas não se pode deduzir mais nada.

14. (5pts) Se z for um número complexo, o que é que se pode dizer sobre o valor de $z.\overline{z}$?

- [ ] É 0.
- [ ] Pode ser qualquer número real.
- [ ] Pode ser qualquer número real maior ou igual a 0.
- [ ] Pode ser qualquer número complexo.

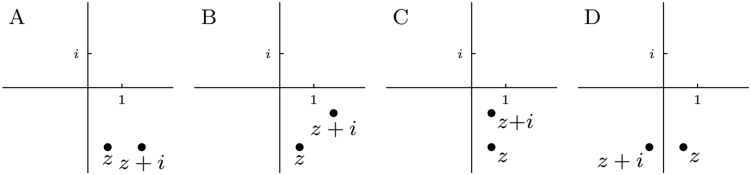
15. (5^{pts}) Seja z um número complexo. Qual das imagens:



representa z juntamente com os outros números complexos com o mesmo módulo que z?

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

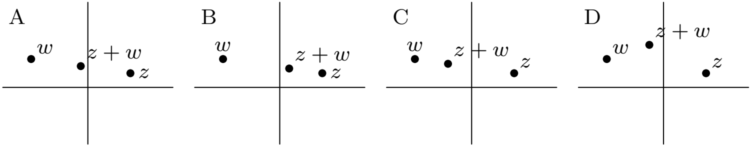
16. (5^{pts}) Seja z um número complexo. Das seguintes imagens:



qual é que representa z e $z+i$?

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

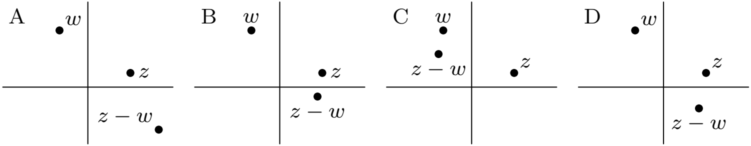
17. (5^{pts}) Sejam z e w números complexos. Das seguintes imagens:



qual é que representa z, w e $z+w$?

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

18. (5^{pts}) Sejam z e w números complexos. Das seguintes imagens:



qual é que representa z, w e $z - w$?

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

19. (5^{pts}) Se z e w forem números complexos, se $|z| = 1$ e se $|w| = 3$, o que é que se pode deduzir sobre $|z.w|$?

☐ É igual a 3.

☐ Em certos casos pode ser menor do que 3 e noutros igual, mas não maior.

☐ Em certos casos pode ser maior do que 3 e noutros igual, mas não menor.

☐ Só se pode deduzir que é maior ou igual a zero.

20. (5^{pts}) Seja z um número complexo diferente de 0. O triângulo cujos vértices são z, zi e $-z$:

- ☐ é equilátero
- ☐ é rectângulo
- ☐ tem todos os ângulos agudos
- ☐ tem um ângulo obtuso

End Pontuação: Certo.

Points: Percent:

Respostas às perguntas

Solução do problema: É claro que $(3+i)+(1-2i) = 3+i+1-2i = 4-i$. ■

Solução do problema: É claro que $(2+i)-(1-i) = 2+i-1+i = 1+2i$. ■

Solução do problema: Tem-se $i^3 = (i \times i) \times i = (-1) \times i = -i$ ■

Solução do problema: Tem-se

$$(1+2i)^2 = 1^2 + 2 \times (2i) + (2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$$

Solução do problema: Tem-se

$$\frac{1}{2i} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{i} = \frac{1}{2} \times (-i) = -\frac{i}{2}$$

■

Solução do problema: Se x e y são números reais, então $\overline{x + yi} = x - yi$. ∎

Solução do problema: Tem-se

$$\frac{z+i}{z-i} = \frac{(z+i)\times(z+i)}{(z-i)\times(z+i)} = \frac{z^2+2zi+i^2}{z^2-i^2} = \frac{z^2-1+2zi}{z^2+1}.$$

Solução do problema: A equação $z^2 = -2$ tem exactamente duas soluções complexas: $\sqrt{2}i$ e $-\sqrt{2}i$. ∎

Solução do problema: O conjugado de um número complexo $x+yi$ é $x-yi$, o que, geometricamente, quer dizer que é a sua reflexão no eixo dos xx. ■

Solução do problema: Como $z = 2\left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$, basta ver que

$$\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

e que

$$\operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Solução do problema: O produto de um número complexo z por i obtém-se aplicando a z uma rotação de $90°$ no sentido directo. ■

Solução do problema: Para qualquer número complexo z, se $w = iz$ então $z^2 = -w^2$. ∎

Solução do problema: Pela desigualdade triangular, $|z+w| \leq |z| + |w| = 4$. ■

Solução do problema: Se $z = x+yi$, então $z.\overline{z} = (x+yi).(x-yi) = x^2 - (yi)^2 = x^2 + y^2 \geq 0$. Por outro lado, se x for um número real maior ou igual a 0, então $x = \sqrt{x}.\overline{\sqrt{x}}$. ■

Solução do problema: Se w for um número complexo, dizer que $|w| = |z|$ é dizer que a distância de w a 0 é igual à distância de z a 0. Logo, o conjunto dos números complexos com o mesmo módulo que z é a circunferência de centro 0 e raio $|z|$. ■

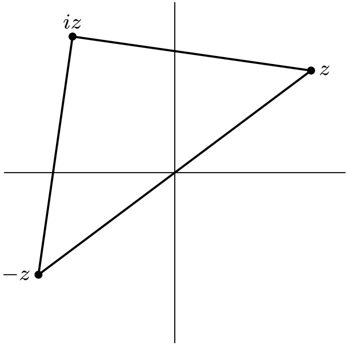
Solução do problema: Se $z = x + yi$, então $z + i = x + yi + i = x + (y+1)i$. ■

Solução do problema: Se v_1 for o vector que vai de 0 a z e se v_2 for o vector que vai de 0 a w, então o vector que vai de 0 a $z + w$ é $v_1 + v_2$. ■

Solução do problema: Se v_1 for o vector que vai de 0 a z e se v_2 for o vector que vai de 0 a w, então o vector que vai de 0 a $z - w$ é $v_1 - v_2$. ■

Solução do problema: Tem-se $|z.w| = |z|.|w| = 3.$ ■

Solução do problema: O ponto iz é obtido de z aplicando-lhe uma rotação de 90° em torno da origem no sentido directo e o ponto $-z(= i.(iz))$ é obtido de iz pelo mesmo processo. Logo, os três pontos formam os vértices de um triângulo rectângulo, sendo o ângulo recto aquele cujo vértice está em iz.



■