Estudar **Matemática** na FCUP

Apoio ao aluno da FCUP
Matemática elementar

Quiz: Geometria analítica

J.N. Tavares

Last Revision Date: 19 de Maio de 2009

jntavar@fc.up.pt

Iniciar Responda a cada uma das seguintes questões.
Objectivo: 100%.

1. (5^{pts}) No plano, se $\vec{\mathbf{u}} = (-1, 2)$ e $\vec{\mathbf{v}} = (3, 4)$ então $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$ é igual a:

- $(-2, 2)$
- 5
- $(2, 6)$
- $(-1, 2, 6)$

2. (5^{pts}) Se $\vec{\mathbf{u}} = (-1, 2) \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{\mathbf{v}} = (3, 4, 2) \in \mathbb{R}^3$ então $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}$ é igual a:

- não se define
- 5
- $(2, 6, 0)$
- $(2, 6)$

3. (5^{pts}) O produto escalar $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$, de $\vec{\mathbf{u}} = (-1, 2) \in \mathbb{R}^2$ e $\vec{\mathbf{v}} = (3, 4, 2) \in \mathbb{R}^3$ é igual a:

- 5
- não se define
- $(2, 6, 0)$
- -1

4. (5^{pts}) O produto escalar $\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}}$, de $\vec{\mathbf{u}} = (-1, 2, 0) \in \mathbb{R}^3$ e $\vec{\mathbf{v}} = (3, -1, 2) \in \mathbb{R}^3$ é igual a:

☐ $(2, 1, 2)$ ☐ 7 ☐ -5 ☐ 5

5. (5^{pts}) A multiplicação do escalar $\lambda = -2$ pelo vector $\vec{\mathbf{v}} = (-1, 2, 0)$ é igual a:

☐ $(2, -4, 2)$ ☐ 4 ☐ $(-2, 4, 0)$ ☐ $(2, -4, 0)$

6. (5^{pts}) A norma do vector $\vec{\mathbf{v}} = (-1, 2, 3) \in \mathbb{R}^3$ é igual a:

☐ 14 ☐ -14 ☐ $\sqrt{14}$ ☐ 12

7. (5^{pts}) Qual o declive m a ordenada na origem b da recta $2y + 3x = 7$?

☐ $m = 3, b = 7$ ☐ $m = -3/2, b = 7/2$
☐ $m = 3/2, b = 7$ ☐ $m = 3, b = 7/2$

8. (5^{pts}) Qual o valor de k se a recta $4x - ky - 7 = 0$ tem declive 3?

- ☐ $k = 3/4$
- ☐ $k = 1/3$
- ☐ $k = 4/3$
- ☐ $k = 1/4$

9. (5^{pts}) Uma equação da recta que passa no ponto $A(-2, 3)$ e é perpendicular à recta $2x - 3y + 6 = 0$ é:

- ☐ $x + 2y = 1$
- ☐ $3x + y = 0$
- ☐ $3x + 2y = 0$
- ☐ $3x + 2y = 1$

10. (5^{pts}) Uma equação da mediatriz do segmento que une os pontos $A(7, 4)$ e $B(-1, -2)$ é:

- ☐ $4x + 3y - 15 = 0$
- ☐ $3x + 4y + 15 = 0$
- ☐ $4x + 3y + 15 = 0$
- ☐ $3x + 4y - 15 = 0$

11. (5^{pts}) Uma equação de uma recta que passa no ponto $A(4, -2)$ e cuja distância à origem é 2 é:

- ☐ $4x + 3y - 10 = 0$
- ☐ $3x + 4y - 10 = 0$
- ☐ $x + y - 10 = 0$
- ☐ $x + 3y - 10 = 0$

12. (5^{pts}) Uma equação da recta que passa no ponto de intersecção das rectas $3x - 2y + 10 = 0$ e $4x + 3y - 7 = 0$ e pelo ponto $(2, 1)$ é:

- ☐ $2x - y - 3 = 0$
- ☐ $5x - y - 9 = 0$
- ☐ $22x + 25y - 69 = 0$
- ☐ $22x - 4y - 40 = 0$

13. (5^{pts}) O centro $C(a, b)$ e raio $r > 0$ da circunferência que passa nos três pontos $A(5, 3)$, $B(6, 2)$ e $C(3, -1)$ são:

- ☐ $C(1, 4); r = \sqrt{5}$
- ☐ $C(4, 1); r = \sqrt{5}$
- ☐ $C(-4, -1); r = \sqrt{5}$
- ☐ $C(-1, 4); r = \sqrt{5}$

14. (5^{pts}) No espaço, a intersecção dos dois planos $\alpha : 2x + y + z = 1$ e $\beta : x - z = 1$ é:

- ☐ o plano $x - y + z = 0$
- ☐ o ponto $(-1, 2, 0)$
- ☐ a recta $x - 1 = \frac{-1-y}{3} = z$
- ☐ a recta $x = 1 + t, y = 3t, z = t,\ t \in \mathbb{R}$

15. (5^{pts}) A distância da origem ao plano $\pi : 2x - y + z = -1$ é:

☐ $\frac{1}{6}$ ☐ $\frac{\sqrt{6}}{6}$ ☐ 0 ☐ $\frac{1}{3}$

16. (5^{pts}) A recta tangente à circunferência c de centro $C(1, -1)$ e raio 2, no ponto $A(1, 1)$, tem por equação:

☐ $x = 1$ ☐ $x + y = 1$ ☐ $y = 1$ ☐ $x - y = 1$

17. (5^{pts}) No espaço, o plano mediador do segmento que une $A(-2, 1, 3)$ a $B(0, 3, -1)$ é:

☐ $x + y - 2z = -1$ ☐ $y - 2z = -1$
☐ $x + y = -1$ ☐ $x - 2z = -1$

18. (5^{pts}) Uma equação da recta que passa em $A(1, 0, 1)$ e é ortogonal ao plano π de equação $x - y + z = 1$ é:

☐ $x - 1 = -y$ ☐ $-y = z - 1$
☐ $x - 1 = -y = z - 1$ ☐ $x + 1 = -2y = z + 1$

19. (5^{pts}) A equação da circunferência com centro em $C = (1, -2)$ e raio $R = 2$ é:

- ☐ $x^2 + 2y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
- ☐ $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$
- ☐ $x^2 + y^2 + 2xp4y + 1 = 0$
- ☐ $x^2 - 2x + 4y + 1 = 0$

20. (5^{pts}) A equação do plano que contem o ponto $A(-1, 1, 2)$ e a recta $x = \frac{y+1}{2} = 1 - z$ é:

- ☐ $x - y + z = 1$
- ☐ $x + y + z = 0$
- ☐ $x + z = 0$
- ☐ $x + z = 1$

Fim | Score: | Correct

Pontuação:

Percentagem:

Solutions to Quizzes

Solution to Quiz: $\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}} = (-1, 2) + (3, 4) = (-1 + 3, 2 + 4) = (2, 6)$

■

Solution to Quiz: não se define. Este é um erro muito grave. ■

Solution to Quiz: não se define. Este é um erro muito grave. ■

Solution to Quiz:

$$\vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{v}} = (-1, 2, 0) \cdot (3, -1, 2) = -1 \times 3 + 2 \times (-1) + 0 \times 2 = -5$$

$\blacksquare$

Solution to Quiz: $\lambda\vec{\mathbf{v}} = -2(-1, 2, 0) = (-2\times(-1), -2\times 2, -2\times 0) = (2, -4, 0)$ ■

Solution to Quiz:

$$\|\vec{\mathbf{v}}\| = \|(-1, 2, 3)\| = \sqrt{(-1)^2 + 2^2 + 3^2} = \sqrt{1 + 4 + 9} = \sqrt{14}$$

$\blacksquare$

Solution to Quiz: Escrevendo a equação da recta na forma $y = mx + b$, vem que $y = -\frac{3}{2}x + \frac{7}{2}$, e portanto $m = -3/2, b = 7/2$. ■

Solution to Quiz:

$$4x - ky - 7 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{4}{k}x - \frac{7}{k} \therefore \frac{4}{k} = 3 \therefore k = 4/3$$

Solution to Quiz: A recta $2x-3y+6=0$ é perpendicular ao vector $(2,-3)$. Pretende-se pois a recta que passa no ponto $A(-2,3)$ e é paralela ao vector $(2,-3)$. A equação vectorial dessa recta é:

$$(x,y)=(-2,3)+t(2,-3), \qquad t\in\mathbb{R}$$

isto é:

$$\begin{aligned} \left\{\begin{array}{rcl} x &=& -2+2t \\ y &=& 3-3t \end{array}\right. &\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x/2+1 &=& t \\ -y/3+1 &=& t \end{array}\right. \\ &\Leftrightarrow \quad x/2+1=-y/3+1 \Leftrightarrow 3x+2y=0 \end{aligned}$$

■

Solution to Quiz: O ponto médio M do segmento que une os pontos $A(7,4)$ e $B(-1,-2)$, tem coordenadas $\left(\frac{7-1}{2}, \frac{4-2}{2}\right) = (3,1)$. A mediatriz do segmento AB é a recta que passa em M e é perpendicular ao vector $\overrightarrow{AB} = (-8,-6)$. A equação vectorial é:

$$\begin{aligned}
[(x,y)-(3,1)]\cdot(-8,-6)=0 \quad &\Leftrightarrow \quad (x-3,y-1)\cdot(-8,-6)=0\\
&\Leftrightarrow \quad -8(x-3)-6(y-1)=0\\
&\Leftrightarrow \quad 4x+3y-15=0
\end{aligned}$$

■

Solution to Quiz: A recta $y = mx + b$ é perpendicular ao vector $(m, -1)$. A recta que passa na origem e é perpendicular à recta $y = mx + b$, é pois gerada pelo vector $(m, -1)$. A equação é:

$$(x, y) = t(m, -1) \Leftrightarrow x = tm \wedge y = -t \Leftrightarrow y = -x/m$$

As duas rectas $y = mx + b$ e $y = -x/m$ intersectam-se no ponto $\left(\frac{-bm}{1+m^2}, \frac{b}{1+m^2}\right)$ cuja distância à origem é:

$$\left\| \left(\frac{-bm}{1+m^2}, \frac{b}{1+m^2} \right) \right\| = \frac{|b|}{\sqrt{1+m^2}}$$

A condição - a recta $y = mx + b$ passa no ponto $A(4, -2)$ - implica que $-2 = 4m + b$ ou $b = -2 - 4m$. A condição - distância à origem é 2 - dá $\frac{|b|}{\sqrt{1+m^2}} = 2$. Substituindo $b = -2 - 4m$ obtem-se:

$$\frac{|-2-4m|}{\sqrt{1+m^2}} = 2$$

Elevando ao quadrado ambos os membros e resolvendo, vem que:

$$|-2-4m|^2 = 4(1+m^2) \therefore m = 0 \vee m = -4/3$$

Há pois duas soluções: a recta $y = -2$ e a recta $y = -(4/3)x + 10/3$ ou $4x + 3y - 10 = 0$.

Solution to Quiz: Calculamos a intersecção das rectas $3x-2y+10=0$ e $4x+3y-7=0$ resolvendo o sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcr} 3x-2y & = & -10 \\ 4x+3y & = & 7 \end{array}\right. \iff x=-48/51 \wedge y=61/17$$

De seguida calculamos a recta que passa pelos pontos $(-48/51, 61/17)$ e $(2,1)$:

$$y-1=\frac{1-(61/17)}{2-(-48/51)}(x-2)$$

Fazendo os cálculos obtem-se $22x+25y-69=0$ ■

Solution to Quiz: A equação de uma circunferência de centro $C(a, b)$ e raio $r > 0$ é $(x - a)^2 + (y - b)2 = r^2$. Esta equação pode ser posta na forma:

$$x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$$

com $D = -2a, E = -2b$ e $F = a^2 + b^2 - r^2$, isto é:

$$a = -D/2, \quad b = -E/2, \quad r^2 = (D^2 + E^2 - 4F)/4$$

Como a circunferência tem que passar nos 3 pontos dados, obtemos o seguinte sistema de equações:

$$\begin{cases} 25 + 9 + 5D + 3E + F &= 0 \\ 36 + 4 + 6D + 2E + F &= 0 \\ 9 + 1 + 3D - E + F &= 0 \end{cases}$$

Resolvendo obtem-se a solução $D = -8, E = -2$ e $F = 12$. Logo uma equação da circunferência que passa nos três pontos $A(5, 3)$, $B(6, 2)$ e $C(3, -1)$ é:

$$x^2 + y^2 - 8x - 2y + 12 = 0$$

Obtemos então:

$$a = -D/2 = 4, \quad b = -E/2 = 1, \quad r^2 = (D^2 + E^2 - 4F)/4 = 5$$

e portanto o centro é $C(4, 1)$ e o raio é $r = \sqrt{5}$.

■

Solution to Quiz: O plano α é ortogonal ao vector $(2, 1, 1)$, enquanto que β é ortogonal a $(1, 0, -1)$. Estes dois vectores não são colineares e portanto os planos intersectam-se segundo uma recta. Resolvendo o sistema $\left\{\begin{array}{lcl} 2x+y+z & = & 1 \\ x-z=1 & = & 1 \end{array}\right.$ obtem-se (fazendo $z = t$) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & t+1 \\ y & = & -1-3t \\ z & = & t \end{array}\right.$. Portanto os planos intersectam-se segundo a recta $x - 1 = \frac{-1-y}{3} = z$. ■

Solution to Quiz: A recta $(x, y, z) = t(2, -1, 1) = (2t, -t, t)$, $t \in \mathbb{R}$ passa na origem e é perpendicular ao plano π (porquê?). Esta recta intersecta π no ponto I correspondente ao valor do parâmetro t tal que:

$$2 \times 2t - (-t) + t = -1, \quad \Leftrightarrow \quad 4t + t + t = -1 \quad \Leftrightarrow \quad t = -1/6$$

Portanto $I = \left(-\frac{1}{3}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{6}\right)$. A distância da origem ao plano π é pois:

$$d = \|I - O\| = \|\overrightarrow{OI}\| = \sqrt{\left(-\frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{6}\right)^2 + \left(-\frac{1}{6}\right)^2} = \frac{\sqrt{6}}{6}$$

∎

Solution to Quiz: A equação da circunferência c é $(x-1)^2+(y+1)^2=4$, ou $x^2+y^2-2x+2y=2$. Note que o ponto $A(1,1)$ pertence a c Como se sabe a recta tangente à circunferência c no ponto $A \in c$, é perpendicular ao raio $\overrightarrow{CA}=(1,1)-(1,-1)=(0,2)$ e passa em A. Portanto, a equação dessa recta é do tipo $2y=k$. omo passa em $A(1,1)$ deverá ter-se $k=2$ e portanto a recta tangente tem por equação $y=1$. ∎

Solution to Quiz: Este é o plano que passa no ponto médio M do segmento AB, e é ortogonal ao vector $\overrightarrow{AB}$. Se P é um ponto qualquer desse plano, então:

$$(P - M) \cdot \overrightarrow{AB} = 0$$

Pondo $P(x, y, z)$, e como:

$$M = \left(\frac{-2+0}{2}, \frac{1+3}{2}, \frac{3-1}{2} \right) = (-1, 2, 1)$$

e $\overrightarrow{AB} = (2, 2, -4)$, vem que:

$$(x+1, y-2, z-1) \cdot (2, 2, -4) = 0$$

Depois de fazer os cálculos obtem-se a equação do plano mediador:

$$x + y - 2z = -1$$

■

Solution to Quiz: O plano π é perpendicular ao vector $\vec{\mathbf{n}} = (1, -1, 1)$. Portanto a recta ℓ é a recta que passa em $A(1, 0, 1)$ e tem a direcção do vector $\vec{\mathbf{n}}$. A equação vectorial de ℓ é pois:

$$(x, y, z) = (1, 0, 1) + t(1, -1, 1) = (1 + t, -t, 1 + t), \qquad t \in \mathbb{R}$$

e as equações paramétricas são:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & 1 + t \\ y & = & -t \\ z & = & 1 + t \end{array} \right. , \qquad t \in \mathbb{R}$$

Portanto $t = x - 1 = -y = z - 1$ e a recta tem por equações $x - 1 = -y = z - 1$.

Atenção que há 2 hipóteses absurdas: $x - 1 = -y$ e $-y = z - 1$ que são equações de planos no espaço e não de rectas. Para definir uma recta no espaço precisamos de dois planos, e portanto de duas equações cartesianas - a recta é então a intersecção desses dois planos. ∎

Solution to Quiz:

Essa circunferência é o conjunto dos pontos $P = (x, y)$ cuja distância a C é constante e igual a R: $d(P, C) = R$. Como ambos os membros são positivos, esta equaçao é equivalente a $\|P - A\|^2 = R^2$ ou ainda:

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 = 2^2$$

ou ainda:

$$x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$$

Solution to Quiz: Há vários processos de resolver o problema. Por exemplo, fazendo $z = 0$ nas equações da recta obtem-se $x = 1$ e $y = 1$, o que significa que o ponto $B(1, 1, 0)$ pertence à recta. Analogamente, fazendo $z = 1$ nas equações da recta obtem-se $x = 0$ e $y = -1$, o que significa que o ponto $C(0, -1, 1)$ pertence também à recta.

Portanto, pretende-se a equação do plano que passa nos 3 pontos $A(-1, 1, 2)$, $B(1, 1, 0)$ e $C(0, -1, 1)$. A equação de um plano no espaço é do tipo $ax + by + cz = d$, onde $d = 0$, se o plano passa na origem, ou $d = 1$ se não passa (se $d \neq 0$ podemos sempre dividir ambos os membros por d e supôr que $d = 1$.)

Suponhamos que a equação do plano é do tipo $ax + by + cz = 1$. Substituindo x, y e z sucessivamente por $(-1, 1, 2)$, $(1, 1, 0)$ e $(0, -1, 1)$, obtemos um sistema de 3 equações em 3 incógnitas a, b e c:

$$\left\{\begin{array}{lcl} -a + b + 2c & = & 1 \\ a + b & = & 1 \\ -b + c & = & 1 \end{array}\right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{\begin{array}{lcl} a & = & 1 \\ b & = & 0 \\ c & = & 1 \end{array}\right.$$

Portanto o plano tem por equação $x + z = 1$.