Estudar **Matemática** na FCUP

Apoio ao aluno da FCUP
Matemática elementar

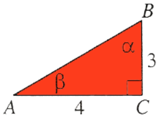
Quiz: Trigonometria

J.N. Tavares

Last Revision Date: 15 de Maio de 2009
jntavar@fc.up.pt

Iniciar Responda a cada uma das seguintes questões. Objectivo: 100%.

1. (5^{pts}) Considere o triângulo seguinte:



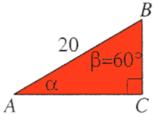
e indique qual a afirmação correcta:

- $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{3}{5}$
- $\cos\alpha = \frac{4}{5}$, $\sin\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{4}{5}$
- $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{1}{5}$, $\cos\beta = \frac{3}{5}$, $\sin\beta = \frac{1}{5}$
- $\cos\alpha = \frac{3}{4}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{3}$, $\sin\beta = \frac{3}{4}$

2. (5^{pts}) Se A é um ângulo agudo com $\sin A = 5/7$, qual o valor de $\cos A$?

- $\sqrt{6}/7$
- $2\sqrt{6}/7$
- $\sqrt{3}/7$
- $2\sqrt{3}/7$

3. (5^{pts}) Considere o triângulo seguinte:



e indique qual a afirmação correcta:

- [ ] $\overline{AC} = 10\sqrt{3}$ e $\overline{BC} = 20$
- [ ] $\overline{AC} = 10\sqrt{2}$ e $\overline{BC} = 10$
- [ ] $\overline{AC} = 10\sqrt{3}$ e $\overline{BC} = 10$
- [ ] $\overline{AC} = 10$ e $\overline{BC} = 10\sqrt{3}$

4. (5^{pts}) Se $\cos\alpha = \sqrt{3}/2$ o valor de $\sin(2\alpha)$ é:

- [ ] $\sqrt{2}/2$
- [ ] $\sqrt{3}/2$
- [ ] $1/2$
- [ ] $\sqrt{3}/3$

5. (5^{pts}) Indique o valor exacto de:

$$\cos\left(\frac{19\pi}{6}\right) + \sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right)$$

- [ ] $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$
- [ ] $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- [ ] $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$
- [ ] $\frac{1-\sqrt{3}}{3}$

6. (5$^{\text{pts}}$) Diga qual o conjunto de soluções da equação trigonométrica:

$$\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

no intervalo $[0, 2\pi]$

☐ $\left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$ ☐ $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$ ☐ $\left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right\}$ ☐ $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

7. (5$^{\text{pts}}$) Diga qual o conjunto de soluções da equação trigonométrica:

$$\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

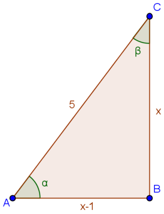
☐ $(-1)^n \frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$ ☐ $[(-1)^n + 3n - 1]\frac{\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$
☐ $[(-1)^n + 3n]\frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$ ☐ $[(-1)^n + 3n - 1]\frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$

8. (5$^{\text{pts}}$) Se $\sin A = 1/\sqrt{5}$ a que é igual $\cos(2A)$?

☐ $1/5$ ☐ $3/5$ ☐ $2/5$ ☐ $1/\sqrt{5}$

9. (5^{pts})

Observe o triângulo rectângulo da figura e diga quais os valores de $\sin\alpha$ e $\sin\beta$.



- [ ] $\sin\alpha = 4/5$, $\sin\beta = 3/5$
- [ ] $\sin\alpha = 3/5$, $\sin\beta = 4/5$
- [ ] $\sin\alpha = 1/5$, $\sin\beta = 3/5$
- [ ] $\sin\alpha = 3/5$, $\sin\beta = 1/5$

10. (5^{pts}) A que é igual:

$$\sin\left(\arcsin\frac{3}{5} + \arctan 2\right)?$$

- [ ] $\frac{11}{5\sqrt{5}}$
- [ ] $\frac{1}{\sqrt{5}}$
- [ ] $\frac{11}{\sqrt{5}}$
- [ ] $\frac{1}{5}$

11. (5^{pts}) A que é igual $\sin(2\arctan x)$?

☐ $\frac{x}{x^2+1}$ ☐ $\frac{1}{x^2+1}$ ☐ $\frac{2x}{x^2+1}$ ☐ $\frac{2}{x^2}$

12. (5^{pts}) Qual o valor exacto de $\sin 75^o$?

☐ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ☐ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ☐ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ☐ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

13. (5^{pts}) Qual o valor exacto de $\cos 15^o$?

☐ $\frac{\sqrt{6}}{4}$ ☐ $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ☐ $\frac{\sqrt{2}}{4}$ ☐ $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

14. (5^{pts}) Qual o conjunto de soluções da equação $4\sin t - \sqrt{3} = 2\sin t$ no intervalo $[0, 2\pi]$?

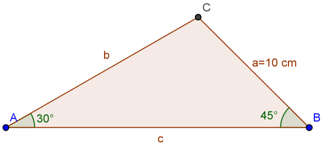
☐ $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ ☐ $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{2\pi}{3}\right\}$ ☐ $\left\{\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right\}$ ☐ $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right\}$

15. (5^{pts}) Qual o conjunto de soluções da equação $2\sin^2 x - \sin x - 1 = 0$ no intervalo $[0, 2\pi]$?

☐ $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$ ☐ $\left\{\frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ ☐ $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}\right\}$ ☐ $\left\{\frac{\pi}{2}, \frac{7\pi}{6}\right\}$

16. (5^{pts})

No triângulo $\triangle(ABC)$ se $A = 30^{\text{o}}$, $B = 45^{\text{o}}$ e $a = 10$ cm, qual o valor de b e c?



- [ ] $b = 5, c = \frac{\sqrt{2}}{2}$
- [ ] $b = 5, c = 5\frac{\sqrt{2}}{2}$
- [ ] $b = 5\sin 105^{\text{o}}, c = 5\frac{\sqrt{2}}{2}$
- [ ] $b = 5\sin 105^{\text{o}}, c = \frac{\sqrt{2}}{2}$

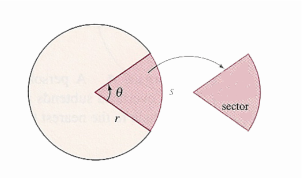
17. (5^{pts}) Depois de simplificada, a que é igual a expressão:

$$\sin(2\alpha)\cos\alpha - \cos(2\alpha)\sin\alpha\,?$$

- [ ] $\cos\alpha$
- [ ] $\sin\alpha\cos\alpha$
- [ ] $\sin\alpha$
- [ ] $\sin 2\alpha$

18. (5^{pts})

A que é igual a área do sector circular representado na figura?



☐ $r^2\theta$ ☐ $\frac{1}{2}r^2\theta$ ☐ $\frac{1}{2}r\theta$ ☐ $\frac{1}{2}\pi r^2$

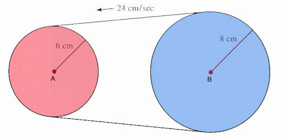
19. (5^{pts}) Qual a amplitude A, período T, frequência ω e ângulo de fase ϕ da função:

$$y = 4\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$$

☐ $A = 4, T = \pi, \omega = 2, \phi = \frac{\pi}{6}$ ☐ $A = 4, T = 2, \omega = \pi, \phi = \frac{\pi}{6}$

☐ $A = 4, T = \pi, \omega = 2, \phi = \frac{\pi}{3}$ ☐ $A = 4, T = \pi, \omega = 4, \phi = \frac{\pi}{6}$

20. (5^{pts})
Uma correia faz a transmissão de movimento (sem deslizar) entre duas roldanas A e B, de raios 8 e 6 cm, respectivamente. Cada ponto da correia move-se com velocidade uniforme igual a 24 cm/s. Qual a razão ω_A/ω_B entre as velocidades angulares das duas roldanas?



☐ 4/3 ☐ 3/4 ☐ 24/3 ☐ 1/8

Fim Score: Correct

Pontuação:

Percentagem:

Solutions to Quizzes

Solution to Quiz: $\cos\alpha = \frac{3}{5}$, $\sin\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos\beta = \frac{4}{5}$, $\sin\beta = \frac{3}{5}$ ■

Solution to Quiz: Construa um triângulo rectângulo com hipotenusa 7 e cateto oposto ao ângulo A igual a 5. ■

Solution to Quiz: $\overline{AC} = 20\cos 30^o = 20\sqrt{3}/2 = 10\sqrt{3}$ e $\overline{BC} = 20\sin 30^o = 20.1/2 = 10$ ∎

Solution to Quiz: Construa um triângulo rectângulo com hipotenusa 2 e cateto adjacente ao ângulo α igual a $\sqrt{3}$. Vemos então que $\sin\alpha = 1/2$ e portanto:

$$\sin(2\alpha) = 2\sin\alpha\cos\alpha = 2.(1/2).(\sqrt{3}/2) = \sqrt{3}/2$$

∎

Solution to Quiz: $\cos\left(\frac{19\pi}{6}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\cos\frac{\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\sin\left(-\frac{7\pi}{6}\right) = \sin\left(-\pi - \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$

O resultado é pois $\frac{1-\sqrt{3}}{2}$. ■

Solution to Quiz:

$$
\begin{aligned}
\cos x &= -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
&\Leftrightarrow \cos x = -\cos\frac{\pi}{6} \\
&\Leftrightarrow \cos x = \cos\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right) \\
&\Leftrightarrow \cos x = \cos\frac{5\pi}{6} \\
&\Leftrightarrow x = \pm\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

Escolhendo o sinal $+$ vem: $0 \le \frac{5\pi}{6} + 2k\pi \le 2\pi \Leftrightarrow -5/12 \le k \le 7/12 \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow x = \frac{5\pi}{6}$

Escolhendo o sinal $-$ vem: $0 \le -\frac{5\pi}{6} + 2k\pi \le 2\pi \Leftrightarrow 5/12 \le k \le 19/12 \Leftrightarrow k = 1 \Leftrightarrow x = \frac{7\pi}{6}$

O conjunto de soluções é pois $\left\{\frac{5\pi}{6}, \frac{7\pi}{6}\right\}$.

Solution to Quiz: $\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow 2x + \frac{\pi}{3} = (-1)^n \frac{\pi}{3} + n\pi \Leftrightarrow x = [(-1)^n + 3n - 1]\frac{\pi}{3}, \quad n \in \mathbb{Z}$ ■

Solution to Quiz:

$$\begin{aligned}\cos(2A) &= \cos^2 A - \sin^2 A \\ &= (1 - \sin^2 A) - \sin^2 A \\ &= 1 - 2\sin^2 A = 1 - 2/5 = 3/5\end{aligned}$$

■

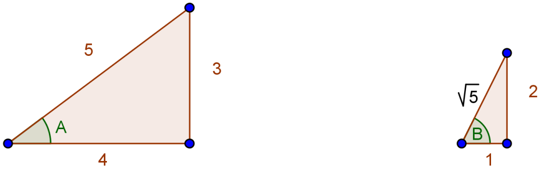
Solution to Quiz: Pelo teorema de Pitágoras, $25 = x^2 + (x-1)^2$. Resolvendo esta equação do 2º grau obtem-se $x = 4$ (a raíz negativa não tem interesse, é claro). Portanto:

$$\sin\alpha = 4/5, \qquad \sin\beta = 3/5$$

Solution to Quiz: Seja $A = \arcsin \frac{3}{5}$ e $B = \arctan 2$. Sabemos que:

$$\sin(A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$$

Considere os 2 triângulos rectângulos seguintes:

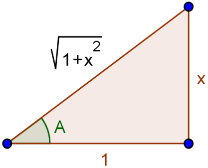


É claro que $\sin A = \frac{3}{5}$, e portanto $A = \arcsin \frac{3}{5}$ e que $\tan B = 2$ e portanto $B = \arctan 2$. Da figura tira-se ainda que:

$$\cos A = \frac{4}{5}, \quad \cos B = \frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \sin B = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

Portanto $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B = \frac{3}{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} + \frac{4}{5} \cdot \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{11}{5\sqrt{5}}$ ■

Solution to Quiz: Considere o triângulo rectângulo seguinte:



É claro que $\tan A = x/1 = x$, isto é $A = \arctan x$. Por outro lado:

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A$$

e da figura tiramos que $\sin A = \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ e $\cos A = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$. Portanto: $\sin 2A = 2 \sin A \cos A = 2 \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = \frac{2x}{x^2+1}$ ■

Solution to Quiz: $\sin 75^{\text{o}} = \sin(45^{\text{o}} + 30^{\text{o}}) = \sin 45^{\text{o}} \cos 30^{\text{o}} + \cos 45^{\text{o}} \sin 30^{\text{o}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ∎

Solution to Quiz: $\cos 15^{o} = \cos(45^{o} - 30^{o}) = \cos 45^{o} \cos 30^{o} + \sin 45^{o} \sin 30^{o} = \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ ■

Solution to Quiz: $4\sin t - \sqrt{3} = 2\sin t \Leftrightarrow \sin t = \frac{\sqrt{3}}{2} = \sin\frac{\pi}{3} \Leftrightarrow t = (-1)^n\frac{\pi}{3} + n\pi, \quad n \in \mathbb{Z}$

Se $n = 2k$ então $t = \frac{\pi}{3} + 2k\pi$ e $0 \leq \frac{\pi}{3} + 2k\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \leq k \leq \frac{5}{6} \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow t = \frac{\pi}{3}$

Se $n = 2k+1$ então $t = -\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi$ e $0 \leq -\frac{\pi}{3} + (2k+1)\pi \leq 2\pi \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{2}{3} \Leftrightarrow k = 0 \Leftrightarrow t = \frac{2\pi}{3}$

Portanto o conjunto de soluções da equação no intervalo $[0, 2\pi]$ é $\left\{\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}\right\}$.

Solution to Quiz: Fazendo $X = \sin x$ a equação fica na forma $2X^2 - X - 1 = 0$ que é uma equação do 2º grau em X. Pela fórmula resolvente $X = \frac{1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = -\frac{1}{2} \vee 1$.

Se $X = 1$ a equação dada é $\sin x = 1$. Portanto $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$ e a única solução deste tipo no intervalo $[0, 2\pi]$ é $x = \frac{\pi}{2}$.

Se $X = -\frac{1}{2}$ a equação dada é $\sin x = -\frac{1}{2} = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$. Portanto $x = (-1)^{n+1}\frac{\pi}{6} + n\pi$, $n \in \mathbb{Z}$ e as soluções deste tipo no intervalo $[0, 2\pi]$ são $x = \frac{7\pi}{6} \vee \frac{11\pi}{6}$.

Solution to Quiz: Usamos a lei dos senos $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$. A razão conhecida é $\frac{a}{\sin A} = \frac{10}{\sin 30^{\mathrm{o}}} = 5$. Portanto $\frac{b}{\sin 45^{\mathrm{o}}} = 5$, isto é $b = 5 \sin 45^{\mathrm{o}} = 5\frac{\sqrt{2}}{2}$. Por outro lado $C = 180^{\mathrm{o}} - (30^{\mathrm{o}} + 45^{\mathrm{o}}) = 105^{\mathrm{o}}$ e $\frac{c}{\sin 105^{\mathrm{o}}} = 5$, isto é $b = 5 \sin 105^{\mathrm{o}}$. ■

Solution to Quiz: $\sin(2\alpha)\cos\alpha - \cos(2\alpha)\sin\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha - (\cos^2\alpha - \sin^2\alpha)\sin\alpha = \sin\alpha(\cos^2\alpha + \sin^2\alpha) = \sin\alpha$ ■

Solution to Quiz:

$$\begin{array}{ccc} 2\pi & \longleftrightarrow & \pi r^2 \\ \theta & \longleftrightarrow & x \end{array} \Longrightarrow x = \text{área do sector} = \frac{\pi r^2 \theta}{2\pi} = \frac{1}{2} r^2 \theta$$

Claro que θ tem que ser medido em radianos. ■

Solution to Quiz: Escrevemos a função na forma normal:

$$y = 4\sin 2\left(x + \frac{\pi}{6}\right)$$

donde se deduz claramente que $A = 4, T = \frac{2\pi}{\omega} = \pi, \omega = 2, \phi = \frac{\pi}{6}$

Solution to Quiz: Em cada segundo, um ponto da roldana A descreve um arco de comprimento 24 cm. O ângulo ao centro correspondente é igual a $\frac{24}{6} = 4$ radianos. Portanto a velocidade angular da roldana A é $\omega_A = 4$rad/s.

Analogamente, em cada segundo, um ponto da roldana B descreve um arco de comprimento 24 cm. O ângulo ao centro correspondente é igual a $\frac{24}{8} = 3$ radianos. Portanto a velocidade angular da roldana B é $\omega_B = 3$rad/s. Portanto $\omega_A/\omega_B = 4/3$. Note que a roldana mais pequena roda mais depressa do que a maior.

Note ainda que:

$$\frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{\text{raio da roldana } B}{\text{raio da roldana } A} = \frac{8}{6}$$

Facto que é geral (independentemente da velocidade da correia) como pode provar usando os mesmos argumentos.