

]

“Sobre a generalização de Elie Cartan das geometrias de Klein”

J.N. Tavares

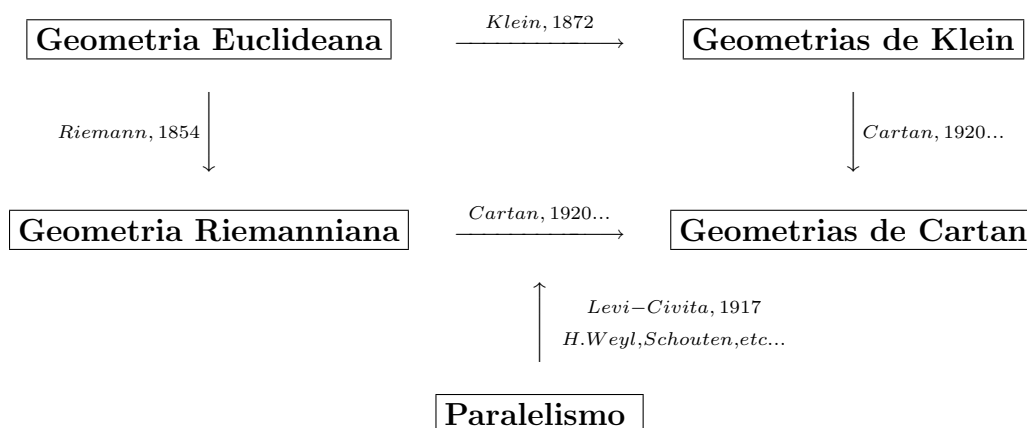
Dept. Matemática Pura, Faculdade de Ciências, Univ. Porto, 4050 Porto, Portugal¹

Resumo... Começarei por relembrar o que é uma geometria (ou um espaço) de Klein (Felix Klein: “*Programa de Erlangen*”, 1872), e em que consiste o “*método do referencial móvel*” de Elie Cartan para o estudo das subvariedades de um espaço de Klein. De seguida, tentarei explicar o que são os chamados “*espaços generalizados de Cartan*”, de acordo com as ideias de Elie Cartan sobre a generalização do programa de Erlangen. A exposição será ilustrada com alguns exemplos (familiares) e tentarei usar uma linguagem tanto quanto possível não técnica.

¹E-mail adress: jntavar@fc.up.pt

ÍNDICE:

0.1	Geometrias de Klein	2
0.2	Forma de Maurer-Cartan. Equações de estrutura de E.Cartan	5
0.3	Referenciais para uma geometria de Klein	10
0.4	Geometrias de Klein em termos de gauges locais	15
0.5	Teoria de Darboux-Cartan	16
0.6	Os espaços generalizados de E. Cartan	18
0.7	Geometrias (espaços generalizados) de Cartan	22
0.8	Espaços com conexão afim	23
0.9	Conexões de Cartan	27
0.10	Conexões Projectivas	30



0.1 Geometrias de Klein

♣ **Definição 0.1.1** ... Uma **Geometria de Klein** consiste de um grupo de Lie G , uma variedade M e de uma acção transitiva e efectiva de G em M .

O estudo de uma tal geometria consiste então no estudo das propriedades das figuras em M , que permanecem invariantes sob a acção do grupo G . Como é sabido, se $o \in M$ é um ponto fixo, e se $H = G_o = \{g \in G : g \cdot o = o\}$ é o subgrupo de isotropia de o , então a aplicação:

$$\begin{array}{ccc} G/H & \xrightarrow{\cong} & M \\ gH & \mapsto & g \cdot o \end{array}$$

é um difeomorfismo.

Exemplo 1 ... Geometria Euclideana plana

- **Grupo:** $G = SE(2, \mathbb{R}) = \left\{ g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{a} & R(\theta) \end{bmatrix} : R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \mathbf{a} = \begin{pmatrix} a^1 \\ a^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \right\}$
- **Espaço:** $M = \mathbb{R}^2$.
- **Acção:** $g \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{a} & R(\theta) \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} + R(\theta)\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$
- **Isotropia de $o = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$:** $H = SO(2, \mathbb{R}) = \left\{ h = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{0} & R(\theta) \end{bmatrix} : \theta \in \mathbb{R} \right\}$.

Exemplo 2 ... Geometria Hiperbólica plana

- **Grupo:** $G = SL(2, \mathbb{R}) = \left\{ g = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) : \det g = ad - bc = 1 \right\}$
- **Espaço:** $M = \mathbf{H}^+ = \{z = x + iy \in \mathbb{C} : y > 0\}$.
- **Acção:** $g \cdot z = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot z = \frac{az+b}{cz+d}$
- **Isotropia de $o = i \in \mathbf{H}^+$:** $H = SO(2, \mathbb{R})$.

Exemplo 3 ... Geometria Elíptica plana

- **Grupo:** $G = SO(3, \mathbb{R}) = \{g \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}) : gg^t = \text{Id}, \det g = 1\}$
- **Espaço:** $M = \mathbb{R}P(2) = \mathbb{R}^3/\mathbb{R} - \{0\}$.
- **Acção:** $g \cdot [\mathbf{v}] = [g\mathbf{v}]$
- **Isotropia de $o = [\mathbf{e}_1] \in \mathbb{R}P(2)$:** $H = O(2, \mathbb{R}) = \left\{ \begin{bmatrix} (\det A)^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A \end{bmatrix} \right\} \hookrightarrow SO(3)$.

Exemplo 4 ... Geometria plana de semelhança

- **Grupo:** $G = \left\{ g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{a} & A \end{bmatrix} : A = \lambda \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \lambda > 0, \theta \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 \right\}$
- **Espaço:** $M = \mathbb{R}^2$.
- **Acção:** $g \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{a} & A \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} + A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$
- **Isotropia de $o = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$:** $H = \mathbb{R}^+ \rtimes SO(2)$ (produto semi-directo).

Exemplo 5 ... Geometria de Minkowski plana

- **Grupo:** $G = \mathbb{R}^2 \rtimes O_{1,1}^+(\mathbb{R}) = \left\{ g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{a} & A \end{bmatrix} : A = \begin{pmatrix} \cosh \theta & \sinh \theta \\ \sinh \theta & \cosh \theta \end{pmatrix}, \theta \in \mathbb{R}, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 \right\}$
- **Espaço:** $M = \mathbb{R}^2$.
- **Acção:** $g \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{a} & A \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} + A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$
- **Isotropia de $o = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$:** $H = O_{1,1}^+(\mathbb{R}) = \{A \in SL(2) : A^t Q A = Q\}$, onde $Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

Exemplo 6 ... Geometria Afim plana

- **Grupo:** $G = SA(2, \mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \rtimes GL^+(2)(\mathbb{R}) = \left\{ g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{a} & A \end{bmatrix} \in GL^+(3, \mathbb{R}) : A \in GL^+(2, \mathbb{R}), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^2 \right\}$
- **Espaço:** $M = \mathbb{R}^2$.
- **Acção:** $g \cdot \mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{a} & A \end{bmatrix} \cdot \mathbf{x} = \mathbf{a} + A\mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$
- **Isotropia de $o = \mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$:** $H = GL^+(2, \mathbb{R})$

Exemplo 7 ... Geometria Projectiva plana

- **Grupo:** $G = PGL(2) = SL(3, \mathbb{R})$
- **Espaço:** $M = \mathbb{RP}(2) = \mathbb{R}^3 / \mathbb{R} - \{0\}$.
- **Acção:** $g \cdot [\mathbf{v}] = [g\mathbf{v}]$
- **Isotropia de $o = [\mathbf{e}_1] \in \mathbb{RP}(2)$:** $H = \left\{ \begin{bmatrix} (\det A)^{-1} & \alpha \\ \mathbf{0} & A \end{bmatrix} : A \in GL(2, \mathbb{R}), \alpha \in \mathbb{R}^{2*} \right\}$.

Exemplo 8 ... Geometria de Moebius plana

Num sistema de coordenadas cartesianas x^1, x^2 no plano \mathbb{R}^2 , a equação de um círculo S é da forma:

$$s^0 [(x^1)^2 + (x^2)^2] + 2 [s^1 x^1 + s^2 x^2] + 2s^3 = 0 \quad (0.1.1)$$

Os números $s^\alpha = (s^0, s^1, s^2, s^3)$ dizem-se as **coordenadas circulares** do círculo $S \subset \mathbb{R}^2$ (**coordenadas poliesféricas**, na generalização multidimensional para hiperesferas em \mathbb{R}^n). O círculo S diz-se **próprio**, se $s^0 \neq 0$, e **impróprio**, se $s^0 = 0$. As rectas afins de \mathbb{R}^2 serão vistas como círculos impróprios, e os pontos de \mathbb{R}^2 serão vistos como círculos de raio 0.

A equação usual de um círculo S de raio r e centro $\mathbf{a} = (a^1, a^2)$, é da forma:

$$(x^1 - a^1)^2 + (x^2 - a^2)^2 = r^2$$

Comparando com (0.1.1), vemos que:

$$a^i = -\frac{s^i}{s^0}, \quad i = 1, 2 \quad \text{e} \quad r^2 = \frac{-2s^0 s^3 + (s^1)^2 + (s^2)^2}{(s^0)^2}$$

Consideremos a forma quadrática em \mathbb{R}^4 , dada por:

$$\langle X, X \rangle \stackrel{\text{def}}{=} -2s^0 s^3 + (s^1)^2 + (s^2)^2 \quad X = (s^\alpha) \in \mathbb{R}^4 \quad (0.1.2)$$

cuja matriz é:

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0} & -1 \\ \mathbf{0} & \text{Id}_2 & \mathbf{0} \\ -1 & \mathbf{0} & 0 \end{pmatrix}$$

Temos então que:

$$\langle X, X \rangle \begin{cases} > 0 & \text{se } X = (s^\alpha) \text{ é um círculo real de raio positivo} \\ = 0 & \text{se } X = (s^\alpha) \text{ é um ponto de } \mathbb{R}^2 \text{ (círculo de raio 0)} \\ > 0 & \text{se } X = (s^\alpha) \text{ é um círculo imaginário de raio negativo} \end{cases}$$

A acção linear usual do grupo de Lorentz, $G = SO_{3,1}^+(\mathbb{R}) = \{g \in SL(4) : A^t Q A = Q\}$, em \mathbb{R}^4 , preserva os conjuntos de nível da forma quadrática Q . Em particular o **cone de luz** $\mathcal{C} = Q^{-1}(0) = \{X = (s^\alpha) : -2s^0 s^3 + (s^1)^2 + (s^2)^2 = 0\}$ é preservado. Este cone de luz é reunião de rectas vectoriais de \mathbb{R}^4 , e a acção linear de $G = SO_{3,1}^+(\mathbb{R})$ em \mathbb{R}^4 , restringe-se a uma acção no conjunto destas rectas. Mas cada uma destas rectas intersecta num único ponto o hiperplano $H : s^0 + s^3 = \sqrt{2}$, e portanto o conjunto das rectas (raios de luz) no cone de luz \mathcal{C} , identifica-se com a intersecção:

$$\begin{aligned} M &= \mathcal{C} \cap H \\ &= \{X = (s^\alpha) : s^0 + s^3 = 0 \quad \text{e} \quad -2s^0 s^3 + (s^1)^2 + (s^2)^2 = 0\} \end{aligned} \quad (0.1.3)$$

A mudança de variáveis:

$$s^0 = \frac{1+y^0}{\sqrt{2}}, \quad s^1 = y^1, \quad s^2 = y^2, \quad s^3 = \frac{1-y^0}{\sqrt{2}}$$

permite identificar $M = C \cap H$ com a esfera $\mathbf{S}^2 = \{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 : (y^1)^2 + (y^2)^2 + (y^3)^2 = 1\}$. Concluindo:

- **Grupo:** $G = SO_{3,1}^+(\mathbb{R}) = \{g \in SL(4) : A^t g A = A\}$
- **Espaço:** $M = \mathbf{S}^2$.
- **Acção:** a acção acima descrita.

Exemplo 8 ... Geometria Euclideana regrada

- **Grupo:** $G = SE(3, \mathbb{R})$
- **Espaço:**

$$M = \{ \text{rectas afins orientadas } \ell \text{ em } \mathbb{R}^3 \}$$

$$= \{ (\mathbf{u}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{u}\| = 1 \text{ e } \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} = 0 \}$$
- **Acção:** $(\mathbf{a}, R) \cdot \ell = (\mathbf{a}, R) \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{p}) = (R\mathbf{u}, \mathbf{a} + R\mathbf{p} - (\mathbf{a} \cdot R\mathbf{u})R\mathbf{u})$
- **Isotropia da recta** $\ell_o = \{t\mathbf{e}_1, t \in \mathbb{R}\} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{0})$:

$$H = \{(\rho\mathbf{e}_1, R), \rho \in \mathbb{R}, R \in SO(2, \mathbb{R})\}$$

onde $SO(2, \mathbb{R})$ é o subgrupo de $SO(3, \mathbb{R})$, constituído pelas rotações que deixam a recta ℓ_o fixa.

0.2 Forma de Maurer-Cartan. Equações de estrutura de E.Cartan

Seja G um grupo de Lie de dimensão $r = \dim G$, e $\mathfrak{g} \cong T_e G \cong \mathfrak{X}_\ell(G)$ a respectiva álgebra de Lie. A **forma de Maurer-Cartan** é, por definição, a 1-forma $\omega = \omega_G : TG \rightarrow \mathfrak{g}$, invariante à esquerda, definida por:

$$\omega_g(\mathbf{v}) = \ell_{g^{-1}*}(\mathbf{v}), \quad \mathbf{v} \in T_g G$$

Quando H é um subgrupo de G , então $\omega_H = \omega_G|_H$.

Se $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_r\}$ é uma base para a álgebra de Lie $\mathfrak{g} \cong T_e G$, e se $\{\omega^1, \dots, \omega^r\}$ é a respectiva base dual para \mathfrak{g}^* , então podemos escrever:

$$\omega_G = \sum_a \omega^a \otimes \mathbf{X}_a \quad (0.2.1)$$

onde as formas ω^a são invariantes à esquerda ($\ell_g^* \omega^a = \omega^a, \forall g \in G$). Suponhamos ainda que:

$$[\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b] = \sum_c C_{ab}^c \mathbf{X}_c \quad (0.2.2)$$

onde C_{ab}^c são as constantes de estrutura de \mathfrak{g} . Utilizemos a fórmula $d\theta(X, Y) = X\theta(Y) + Y\theta(X) - \theta([X, Y])$, válida para qualquer 1-forma θ , quando $X = \mathbf{X}_a, Y = \mathbf{X}_b$ são campos invariantes à esquerda e quando $\theta = \omega^c$. Neste caso $\omega^c(\mathbf{X}_a)$ e $\omega^c(\mathbf{X}_b)$ são constantes e, por outro lado, $\omega^c([\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b]) = \omega^c(C_{ab}^d \mathbf{X}_d) = C_{ab}^c$. Portanto:

$$d\omega^c(\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b) = -\omega^c([\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b]) = -C_{ab}^c \quad (0.2.3)$$

Pondo por definição, para cada $a = 1, 2, \dots, r = \dim G$:

$$\begin{aligned} d(\omega^a \otimes \mathbf{X}_a) &= d\omega^a \otimes \mathbf{X}_a \\ [\omega^a \otimes \mathbf{X}_a, \omega^b \otimes \mathbf{X}_b] &= \omega^a \wedge \omega^b \otimes [\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b] \end{aligned} \quad (0.2.4)$$

deduzimos as chamadas **equações de estrutura de Maurer-Cartan do grupo de Lie G** :

$$d\omega_G + \frac{1}{2} [\omega_G, \omega_G] = 0 \quad (0.2.5)$$

Estas equações de estrutura podem ser escritas na forma de um sistema de $r = \dim G$ equações:

$$d\omega^c + \frac{1}{2} \sum_{ab} C_{ab}^c \omega^a \wedge \omega^b = 0, \quad c = 1, 2, \dots, r \quad (0.2.6)$$

A integrabilidade deste sistema é de facto equivalente às identidades de Jacobi da álgebra de Lie \mathfrak{g} .

Exemplo... Grupo afim $GA(n)$

Consideremos de novo o grupo afim:

$$GA(n) = \left\{ g \stackrel{\text{def}}{=} (a, A) \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad A \in GL(n, \mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^n \right\} \quad (0.2.7)$$

A álgebra de Lie $\mathfrak{ga}(n)$ pode ser identificada com a subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R})$ constituída pelas matrizes da forma:

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & X \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} x \oplus X \quad \text{com} \quad x \in \mathbb{R}^n, X \in \mathfrak{gl}(n) \quad (0.2.8)$$

O parêntesis de Lie em $\mathfrak{ga}(n)$ é dado por:

$$[x \oplus X, y \oplus Y] = (Xy - Yx) \oplus [X, Y] \quad (0.2.9)$$

e a representação adjunta de $GA(n)$ em $\mathfrak{ga}(n)$, por:

$$Ad_{(a,A)}(x \oplus X) = (-AXA^{-1}a + Ax) \oplus (AXA^{-1}) \quad (0.2.10)$$

Portanto:

$$\mathfrak{ga}(n) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n)$$

Esta soma directa é reductiva:

$$Ad_{GA(n)}\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n \quad (0.2.11)$$

De facto:

$$Ad_{(a,A)}(x \oplus 0) = Ax \oplus 0, \quad \forall (a, A) \in GA(n), \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (0.2.12)$$

Calculemos agora a forma de Maurer-Cartan do grupo afim $G = GA(n)$. Pondo $g = (a, A)$ vem que:

$$\begin{aligned} \omega_G &= g^{-1}dg = (a, A)^{-1}d(a, A) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} da & dA \end{bmatrix} \\ &= A^{-1}da \oplus A^{-1}dA \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \omega^i \oplus \omega_j^i \end{aligned} \quad (0.2.13)$$

que é uma 1-forma diferencial em $GA(n)$, invariante à esquerda, com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{ga}(n) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n)$. Com $A = (A_j^i) \in GL(n, \mathbb{R})$ e $a = (a^i) \in \mathbb{R}^n$, temos explicitamente que as componentes da forma de Maurer-Cartan são:

$$\begin{cases} \omega^i &= (A^{-1})_j^i da^j & \text{para a } \mathbb{R}^n\text{-componente} \\ \omega_j^i &= (A^{-1})_k^i dA_j^k & \text{para a } \mathfrak{gl}(n)\text{-componente} \end{cases} \quad (0.2.14)$$

As equações de estrutura de $G = GA(n)$ são:

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega_G + \omega_G \wedge \omega_G \\ &= d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \omega^i & \omega_j^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \omega^i & \omega_j^i \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \omega^i & \omega_j^i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d\omega^i + \omega_k^i \omega^k & d\omega_j^i + \omega_k^i \omega_j^k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (0.2.15)$$

isto é:

$$\boxed{\begin{cases} d\omega^i + \omega_k^i \omega^k &= 0 \\ d\omega_j^i + \omega_k^i \omega_j^k &= 0 \end{cases}} \quad (0.2.16)$$

Significado geométrico (cinemático) destas equações...

Como já vimos, o conjunto de todos os referenciais afins em \mathbb{R}^n está em correspondência bijectiva com o grupo afim $GA(n)$, e é um aberto de $\mathbb{R}^{(n+1)n}$, que notamos por $\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \iota : \quad GA(n) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{RA}(\mathbb{R}^n) \\ g = (a, A) &\longleftrightarrow \mathcal{R}_g = (a; \mathbf{e} = E \cdot A) \end{aligned} \quad (0.2.17)$$

Em $\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$ estão definidas naturalmente funções (equivariantes) de classe C^∞ , com valores em \mathbb{R}^n , que são as projecções em cada um dos $(n+1)$ factores de $\mathbb{R}^{(n+1)n}$, notadas tradicionalmente (de forma abusiva!) por:

$$\begin{aligned} a : \mathcal{R} = \{a; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{RA}(\mathbb{R}^n) &\longmapsto a(\mathcal{R}) = a \\ \mathbf{e}_1 : \mathcal{R} = \{a; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{RA}(\mathbb{R}^n) &\longmapsto \mathbf{e}_1(\mathcal{R}) = \mathbf{e}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n : \mathcal{R} = \{a; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{RA}(\mathbb{R}^n) &\longmapsto \mathbf{e}_n(\mathcal{R}) = \mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (0.2.18)$$

Podemos por isso considerar as respectivas diferenciais:

$$da; d\mathbf{e}_1, \dots, d\mathbf{e}_n \in \Omega^1(\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n); \mathbb{R}^n)$$

Se $\xi \in T_{\mathcal{R}}\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$ é um “deslocamento infinitesimal” do referencial \mathcal{R} , então $da|_{\mathcal{R}}(\xi), d\mathbf{e}_1|_{\mathcal{R}}(\xi), \dots, d\mathbf{e}_n|_{\mathcal{R}}(\xi)$ são vectores de \mathbb{R}^n que podemos escrever como combinação linear dos elementos da base $\{\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1(\mathcal{R}), \dots, \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n(\mathcal{R})\}$ de \mathbb{R}^n :

$$\begin{cases} da|_{\mathcal{R}}(\xi) &= \sum_{i=1}^n \omega^i|_{\mathcal{R}}(\xi) \mathbf{e}_i(\mathcal{R}) \\ d\mathbf{e}_1|_{\mathcal{R}}(\xi) &= \sum_{i=1}^n \omega^i|_{\mathcal{R}}(\xi) \mathbf{e}_i(\mathcal{R}) \\ &\vdots \\ d\mathbf{e}_n|_{\mathcal{R}}(\xi) &= \sum_{i=1}^n \omega^i|_{\mathcal{R}}(\xi) \mathbf{e}_i(\mathcal{R}) \end{cases}$$

ou mais sucintamente:

$$\boxed{\begin{cases} da &= \omega^i \mathbf{e}_i \\ d\mathbf{e}_j &= \omega^i_j \mathbf{e}_i \quad j = 1, \dots, n \end{cases}} \quad (0.2.19)$$

onde $\{\omega^i\}_{1 \leq i \leq n}$ e $\{\omega^i_j\}_{1 \leq i, j \leq n}$ são 1-formas diferenciais usuais (escalares) em $\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$ (ao todo $n+n^2$ formas), cujo significado é claro - se $\xi \in T_{\mathcal{R}}\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$ é um “deslocamento infinitesimal” do referencial \mathcal{R} , então $(\omega^i|_{\mathcal{R}}(\xi))$ são **as componentes relativas** (ao referencial \mathcal{R}) do “deslocamento infinitesimal” $da|_{\mathcal{R}}(\xi)$ da origem do referencial \mathcal{R} , enquanto que, para cada $j = 1, \dots, n$ fixo, $(\omega^i_j|_{\mathcal{R}}(\xi))$ são **as componentes relativas** (ao referencial \mathcal{R}) do “deslocamento infinitesimal” $d\mathbf{e}_j|_{\mathcal{R}}(\xi)$ do vector \mathbf{e}_j do referencial \mathcal{R} , isto é, $\omega^i_j|_{\mathcal{R}}(\xi)$ é a componente relativa (a \mathcal{R}) do “deslocamento infinitesimal” do vector \mathbf{e}_j na direcção do vector \mathbf{e}_i .

As equações de estrutura, neste contexto, não são mais do que consequência de que $d^2a = d^2\mathbf{e}_i = 0$. De facto, derivando ambos os membros da primeira equação em (??) obtemos:

$$\begin{aligned} 0 = dda &= \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{e}_i d\omega^i + d\mathbf{e}_i \wedge \omega^i \right) \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{e}_i d\omega^i + \left(\sum_{j=1}^n \omega^j_i \mathbf{e}_j \right) \wedge \omega^i \right) \quad \text{atendendo a (0.2.19)} \\ &= \sum_{j=1}^n \left(d\omega^j + \sum_{i=1}^n \omega^j_i \wedge \omega^i \right) \mathbf{e}_j \end{aligned}$$

e como os \mathbf{e}_i são linearmente independentes, deduzimos que:

$$d\omega^i + \sum_{j=1}^n \omega^j_i \wedge \omega^j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (0.2.20)$$

Anàlogamente, derivando ambos os membros da segunda equação em (??), deduzimos que:

$$d\omega^i_j + \sum_{k=1}^n \omega^i_k \wedge \omega^k_j = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (0.2.21)$$

As equações (0.2.20) e (0.2.21) são exactamente as equações de estrutura obtidas em (0.2.16).

Nota...

- Do ponto de vista da teoria de fibrados principais, a aplicação:

$$a : \mathcal{RA}(\mathbb{R}^n) \cong GA(n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

dá origem ao fibrado principal $GA(n) \rightarrow \mathbb{R}^n = GA(n)/GL(n)$, com grupo de estrutura $GL(n)$. Neste contexto, a 1-forma $\omega = (\omega^i)$, definida em $\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$ e com valores em \mathbb{R}^n , é a chamada **forma canónica (ou forma de soldagem)** do fibrado de referenciais $\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$, enquanto que a 1-forma $w = (\omega^i_j)$, definida em $\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$ e com valores em $\mathfrak{gl}(n)$ é a chamada **forma de conexão**. A equação de estrutura (0.2.20) diz que esta conexão tem torção nula, enquanto que a segunda equação de estrutura (0.2.21) diz que esta conexão tem curvatura nula.

Exemplo... Grupo Euclidiano especial $SE(n)$

Os movimentos rígidos de \mathbb{E}^n constituem um grupo $SE(n)$, chamado o **grupo Euclidiano especial** de \mathbb{E}^n , que pode ser identificado com o subgrupo de $SL(n+1, \mathbb{R})$ constituído pelas matrizes da forma:

$$g \stackrel{\text{def}}{=} (a, R) \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & R \end{bmatrix} \quad \text{com } R \in SO(n), a \in \mathbb{R}^n \quad (0.2.22)$$

As equações de estrutura de $SE(n)$ são:

$$\left\{ \begin{array}{l} d\omega^i + \omega^i_k \wedge \omega^k = 0 \\ d\omega^i_j + \omega^i_k \wedge \omega^k_j = 0 \\ \omega^i_j + \omega^j_i = 0 \end{array} \right. \quad (0.2.23)$$

Exemplo... Grupo Projectivo $PGL(n)$

Seja V um espaço vectorial real de dimensão n (com a sua estrutura afim canónica), e \tilde{V} o seu fecho projectivo, i.e.:

$$\tilde{V} = V^{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(\mathbb{R} \times V)$$

Existe uma injeção canónica:

$$\begin{array}{lcl} \iota : V & \hookrightarrow & \tilde{V} = \mathbb{P}(\mathbb{R} \times V) \\ \mathbf{v} & \longmapsto & [(1, \mathbf{v})] \end{array}$$

Note que a imagem $\iota(V) \subset \tilde{V}$ é o complementar do hiperplano $\mathbb{P}(\{0\} \times V)$ em \tilde{V} . Este hiperplano diz-se o **hiperplano no infinito** e nota-se por V_∞ . Neste sentido, o fecho projectivo de V é obtido “juntando” a V o hiperplano no infinito V_∞ , isto é, adicionamos a V os pontos de V_∞ (os pontos no infinito de V). Como $V_\infty = \mathbb{P}(\{0\} \times V)$, vemos que V_∞ é o conjunto das rectas vectoriais de V , isto é, o conjunto das direcções das rectas afins de V . Portanto a cada recta afim ℓ de V , juntamos um “ponto no infinito” - a sua direcção (vista como um elemento de V_∞).

Se fixamos uma base para $\mathbb{R} \times V$ e se v^0, v^1, \dots, v^n representam as coordenadas homogéneas em $\tilde{V} = \mathbb{P}(\mathbb{R} \times V)$, relativamente a essa base, então $y^1 = \frac{v^1}{v^0}, \dots, y^n = \frac{v^n}{v^0}$, define um sistema de coordenadas locais em torno do ponto $[(1, \mathbf{0})] \in \tilde{V}$, a que chamamos a “origem” de \tilde{V} .

Uma aplicação projectiva (ou homografia) de V , é, por definição, uma homografia do fecho projectivo $\tilde{V} = V^{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(\mathbb{R} \times V)$. Portanto o grupo projectivo de V , é:

$$GP(V) = PGL(\mathbb{R} \times V) = GL(\mathbb{R} \times V) / \mathbb{R} - \{0\}$$

Fixemos uma base para $\mathbb{R} \times V$. Então um elemento de $GL(\mathbb{R} \times V)$ será representado por uma matriz não singular:

$$g = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ \mathbf{v} & A \end{bmatrix}, \quad \text{onde } A = [A^a_b] \in GL(V), \mathbf{v} = [v^a] \in V, \alpha = [\alpha_b] \in V^*, \lambda \in \mathbb{R}$$

Se $\lambda \neq 0$, então $Y^a = \frac{v^a}{\lambda}$, $Y_b^a = \frac{A_b^a}{\lambda}$, $Y_b = \frac{\alpha_b}{\lambda}$, $a, b = 1, \dots, n$, constituem um sistema de coordenadas locais numa vizinhança da Id em $GP(V) = PGL(\mathbb{R} \times V) = GL(\mathbb{R} \times V)/\mathbb{R} - \{0\}$, definida pela condição $\lambda \neq 0$. A acção de $GP(V) = PGL(\mathbb{R} \times V)$ em \tilde{V} é dada, em termos das coordenadas atrás indicadas, por:

$$(Y_b, Y_b^a, Y^a) : (y^a) \mapsto (Y_b, Y_b^a, Y^a) \cdot (y^a) = \frac{Y^a + Y_b^a y^b}{1 + Y_b y^b} \quad (0.2.24)$$

Vejamus uma observação útil para futuro. Se definimos:

$$Z_b^a \stackrel{\text{def}}{=} Y_b^a - Y^a Y_b$$

então a acção (0.10.1) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} (y^a) &\mapsto \frac{Y^a + Y_b^a y^b}{1 + Y_b y^b} \\ &= Y^a + Z_b^a y^b \left(1 - Y_c y^c + (Y_d y^d)^2 - \dots\right) \\ &= Y^a + Z_b^a y^b - \frac{1}{2} (Z_b^a Y_c + Z_c^a Y_b) y^b y^c + \text{termos de ordem mais elevada} \end{aligned} \quad (0.2.25)$$

A acção (0.10.1) é transitiva e o subgrupo de isotropia G_0 da origem $[(1, \mathbf{0})] \in \tilde{V}$, é:

$$G_0 = \left\{ g = \begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ \mathbf{0} & A \end{bmatrix} \right\} \subset GP(V) \quad (0.2.26)$$

Em termos das coordenadas (Y^a, Y_b^a, Y_b) , acima referidas, G_0 é definido por $Y^a = 0$.

Seja:

$$\begin{aligned} G &= PGL(n) = SL(n+1)/\text{Centro} \\ H &= G_0 = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda & \alpha \\ \mathbf{0} & A \end{bmatrix} : A \in GL(n), \alpha \in \mathbb{R}^{n*} \right\} / \text{Centro} \end{aligned} \quad (0.2.27)$$

A álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$ é graduada:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \underbrace{\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1}_{\mathfrak{h}}$$

onde:

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} : x + \text{traço } X = 0 \right\}, \quad \mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\} \quad (0.2.28)$$

com $\mathbf{v} \in V, \alpha \in V^*, X \in \mathfrak{gl}(n)$ e $x \in \mathbb{R}$. Alternativamente, podemos descrever a álgebra de Lie graduada $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$, da seguinte forma:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1) = V \oplus \mathfrak{gl}(n) \oplus V^* \quad (0.2.29)$$

adoptando as identificações seguintes:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{v} & 0 \end{bmatrix} &\in \mathfrak{g}_{-1} \mapsto \mathbf{v} \in V \\ \begin{bmatrix} x & 0 \\ 0 & X \end{bmatrix} &\in \mathfrak{g}_0 \mapsto X - x \text{Id}_n \in \mathfrak{gl}(n) \\ \begin{bmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{bmatrix} &\in \mathfrak{g}_1 \mapsto \alpha \in V^* \end{aligned} \quad (0.2.30)$$

O parêntesis de Lie é então dado por:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\alpha, \beta] = 0, \quad [\alpha, X] = \alpha X, \quad [X, \mathbf{v}] = X\mathbf{v}, \quad [X, Y] = XY - YX, \quad [\mathbf{v}, \alpha] = \mathbf{v}\alpha + \alpha\mathbf{v}\text{Id}_n \quad (0.2.31)$$

onde $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V; X, Y \in \mathfrak{gl}(n)$ e $\alpha, \beta \in V^*$. Relativamente a bases $\{\mathbf{e}_a\}$, para V , $\{\mathbf{e}^a\}$, para V^* , e $\{\mathbf{e}_b^a\}$, para $\mathfrak{gl}(n)$, a forma de Maurer-Cartan $\omega = \omega_{PGL(n)}$ é a 1-forma invariante à esquerda, com valores em $\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{gl}(V) \oplus V^*$:

$$\omega = \omega^a \mathbf{e}_a + \omega_b^a \mathbf{e}_b^a + \omega_b \mathbf{e}^b$$

cujas componentes são 1-formas usuais, invariantes à esquerda. As equações de estrutura de Maurer-Cartan são:

$$\boxed{\begin{cases} d\omega^a &= -\omega_b^a \wedge \omega^b \\ d\omega_b^a &= -\omega_c^a \wedge \omega_b^c - \omega^a \wedge \omega_b + \delta_b^a \omega_c \wedge \omega^c \\ d\omega_a &= -\omega_c \wedge \omega_a^c \end{cases}} \quad (0.2.32)$$

0.3 Referenciais para uma geometria de Klein

Comecemos com um exemplo bem familiar:

Exemplo ... Geometria Afim. Referenciais afins

Consideremos o espaço \mathbb{R}^n com a sua estrutura afim canónica. Uma **bijecção afim** $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação que é da forma:

$$g : P \mapsto a + A(P), \quad P \in \mathbb{R}^n \quad (0.3.1)$$

onde $A \in GL(n, \mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}^n$. As bijecções afins de \mathbb{R}^n constituem um grupo $GA(n)$, que é o produto semi-directo de \mathbb{R}^n por $GL(n)$, e para o qual utilizamos a **representação homogénea** $GA(n) \hookrightarrow GL(n+1, \mathbb{R})$ seguinte:

$$g \stackrel{\text{def}}{=} (a, A) \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{bmatrix} \quad \text{com } A \in GL(n, \mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^n \quad (0.3.2)$$

Uma bijecção afim $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fica completamente determinada pelo ponto $a = g(0) \in \mathbb{R}^n$ no qual ela transforma a origem $0 \in \mathbb{R}^n$, e pelos vectores $\mathbf{e}_1 = A(E_1), \dots, \mathbf{e}_n = A(E_n)$ nos quais a aplicação linear homogénea A , associada a g , transforma os vectores E_1, \dots, E_n da base canónica de \mathbb{R}^n . Usámos a notação matricial $\mathbf{e} = E \cdot A$.

Um **referencial afim** em \mathbb{R}^n é uma sequência da forma:

$$\mathcal{R} = (a; \mathbf{e}) = (a; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \in \mathbb{R}^n \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ factores}} \quad (0.3.3)$$

O conjunto de todos os referenciais afins em \mathbb{R}^n está em correspondência bijectiva com o grupo afim $GA(n)$, e é um aberto de $\mathbb{R}^{(n+1)n}$, que notamos por $\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \iota : \quad GA(n) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{RA}(\mathbb{R}^n) \\ g = (a, A) &\longleftrightarrow \mathcal{R}_g = (a; \mathbf{e} = E \cdot A) \end{aligned} \quad (0.3.4)$$

♣.

De acordo com E. Cartan (ver [4], pag.16), um sistema de referenciais para uma geometria de Klein $M = G/H$, é um conjunto $\mathcal{R}_G(M) = \{\mathcal{R}_g : g \in G\}$, de “figuras” em M , que está em correspondência bijectiva com os elementos do grupo G :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{R}_G(M) & \longleftrightarrow & G \\ \mathcal{R}_g & \longleftrightarrow & g \end{array}$$

Se pudermos encontrar uma figura particular \mathcal{R}_0 , tal que toda a transformação $\Phi_g (\neq \text{Id})$ transforme \mathcal{R}_0 numa figura distinta $\mathcal{R}_g = g \cdot \mathcal{R}_0$, então a família:

$$\mathcal{R}_G(M) = \{\mathcal{R}_g = g \cdot \mathcal{R}_0 : g \in G\}$$

constitui um sistema de referenciais, a que chamamos um **sistema de G -referenciais do espaço de Klein** $M = G/H$ (deduzido do referencial fixo (absoluto) \mathcal{R}_0). Por exemplo, quando G actua simplesmente transitivamente em M , então os pontos de M constituem um sistema de G -referenciais de M (considere por exemplo a acção de G em si próprio por multiplicações à esquerda ℓ_g).

Munimos $\mathcal{R}_G(M)$ de estrutura de variedade diferenciável de tal forma que a correspondência $\mathcal{R}_g \longleftrightarrow g$, seja um difeomorfismo. A acção de G em M , induz então uma acção de G no conjunto dos referenciais $\mathcal{R}(M)$:

$$G \longrightarrow \text{Diff}(\mathcal{R}(M)), \quad g \mapsto (L_g : \mathcal{R}_{g'} \mapsto \mathcal{R}_{gg'}) \quad (0.3.5)$$

É claro que, do ponto de vista formal, podemos identificar o conjunto $\mathcal{R}_G(M)$, com o conjunto dos elementos do grupo G , obtendo desta forma uma descrição abstracta de um sistema de G -referenciais do espaço $M = G/H$. Usaremos por isso sistematicamente a identificação:

$$\begin{aligned} G &\longleftrightarrow \mathcal{R}_G(M) \\ g &\longleftrightarrow \mathcal{R}_g \end{aligned} \quad (0.3.6)$$

Veja o exemplo familiar da geometria afim em \mathbb{R}^n , nomeadamente a identificação (ver (0.3.4)):

$$\begin{aligned} \iota : \quad GA(n) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{RA}(\mathbb{R}^n) \\ g = (a, A) &\longleftrightarrow \mathcal{R}_g = (a; \mathbf{e} = E \cdot A) \end{aligned}$$

Note que a correspondência (0.3.6) permite identificar a acção (0.3.5), de G no sistema de G -referenciais, com a acção de G em si próprio por multiplicações à esquerda ℓ_g :

$$(\ell_g : G \rightarrow G) \longleftrightarrow (L_g : \mathcal{R}_G(M) \rightarrow \mathcal{R}_G(M)) \quad (0.3.7)$$

Em geometria afim, um referencial afim $\mathcal{R}_{(a,A)} = (a; \mathbf{e} = E \cdot A)$, fornece também um sistema de coordenadas (global) para \mathbb{R}^n . Na situação geral de uma geometria de Klein $M = G/H$, podemos associar, de forma puramente convencional, ao referencial absoluto \mathcal{R}_0 , inicialmente dado, um sistema de coordenadas locais dado por uma parametrização local:

$$\varphi : U \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow M$$

definida num aberto U de $\mathbb{R}_{x^1, \dots, x^n}^n$, que contem $0 \in \mathbb{R}^n$, e tal que $\varphi(0) = o \in M$. A estas coordenadas locais vamos chamar **coordenadas absolutas, relativas ao referencial absoluto \mathcal{R}_0 , de “origem” o** .

Se $g \in G$, ao referencial $\mathcal{R}_g = g \cdot \mathcal{R}_0$ associaremos então a parametrização local dada, por definição, por:

$$\begin{aligned} \varphi_g : \quad U \subset \mathbb{R}^n &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto (g \circ \varphi)(x) = g \cdot \varphi(x) \end{aligned} \quad (0.3.8)$$

que transforma difeomòrficamente U sobre o aberto $g \cdot \varphi(U) \subseteq M$. \mathcal{R}_g é um referencial de “origem” $g \cdot o \in M$, e, para cada $g \in G$ e $p \in g \cdot \varphi(U) \subseteq M$, os números:

$$(x_g^i(p)) = (g \circ \varphi)^{-1}(p)$$

dizem-se as **coordenadas relativas de p no referencial \mathcal{R}_g** . Portanto as coordenadas relativas de p no referencial \mathcal{R}_g são, por definição, as coordenadas absolutas de $g^{-1} \cdot p$ (relativas ao referencial absoluto \mathcal{R}_0). Por exemplo, as coordenadas relativas de $p = g \cdot o$, no referencial \mathcal{R}_g , são $(0, 0, \dots, 0)$.

Fixemos um sistema de coordenadas absolutas $x = (x^i)$, relativas ao referencial absoluto \mathcal{R}_0 , de “origem” o . Suponhamos que uma transformação (local) $T : M \rightarrow M$, $p \mapsto T(p)$ é dada em coordenadas absolutas por $x' = T(x)$. Qual a sua expressão em coordenadas relativas a um referencial \mathcal{R}_g ? As coordenadas relativas de um ponto $T(p)$ relativamente a \mathcal{R}_g , são as coordenadas absolutas de $g^{-1} \cdot T(p) = (g^{-1} \cdot T \cdot g) \cdot (g^{-1} \cdot p)$. Mas as coordenadas de $g^{-1} \cdot p$ são precisamente as coordenadas relativas de p em \mathcal{R}_g . Logo, em coordenadas relativas a um referencial \mathcal{R}_g , a transformação $T : M \rightarrow M$ é representada por $g^{-1} \cdot T \cdot g$, onde T é a sua expressão em coordenadas absolutas.

Analisemos agora a transformação que permite passar de \mathcal{R}_g para um referencial “próximo” $\mathcal{R}_{g(t)}$, onde $g(0) = g$ e $g'(0) = \xi \in T_g G$. Temos que $\mathcal{R}_g = \Phi_g \cdot \mathcal{R}_0 \Rightarrow \mathcal{R}_0 = \Phi_{g^{-1}} \cdot \mathcal{R}_g$ isto é:

$$\mathcal{R}_{g(t)} = \Phi_{g(t)g^{-1}} \cdot \mathcal{R}_g$$

e portanto a transformação que permite passar de \mathcal{R}_g para $\mathcal{R}_{g(t)}$, é $\Phi_{g(t)g^{-1}} \cong \ell_{g(t)g^{-1}}$. Mas, em coordenadas relativas a \mathcal{R}_g , esta transformação é representada por $g^{-1} \cdot \Phi_{g(t)g^{-1}} \cdot g \cong \ell_{g^{-1}g(t)}$, cuja derivada dá a componente relativa (a \mathcal{R}_g) do deslocamento infinitesimal de \mathcal{R}_g na direcção do vector $g'(0) = \xi \in T_g G$. Essa derivada é igual a:

$$g^{-1}\xi = g^{-1}dg(\xi) = \omega_G(\xi) \in \mathfrak{g} \cong T_e G$$

onde ω_G é a chamada **forma de Maurer-Cartan de G** .

Consideremos de novo a aplicação $\Phi : G \times U \longrightarrow M$, dada por:

$$y = \Phi(x; a) \quad \text{ou} \quad y^i = \Phi^i(x^j; a^\alpha) \quad (0.3.9)$$

em coordenadas locais $a = (a^\alpha)$, para G , e $x = (x^i)$, para $U \subseteq M$. Mais uma vez, (0.3.9) é interpretado como a relação entre as coordenadas $x = (x^j)$, relativas ao referencial correspondente aos parâmetros $a = (a^\alpha)$, e as coordenadas absolutas de um mesmo ponto p de M .

Fixemos um ponto $p \in M$, cujas coordenadas absolutas são $y = (y^i)$, e consideremos o subconjunto $\Phi^{-1}(\{p\}) \subseteq G \times U$. Em coordenadas $(x; a)$ este subconjunto é dado pelas soluções da equação (0.3.9), onde y está fixo. Se $(x; a) \in \Phi^{-1}(\{p\})$, isto significa que p tem coordenadas relativas (x^i) , no referencial \mathcal{R}_a . Quando a varia, x variará também, como função de a . No entanto existe uma invariância que é essencial:

♣ **Teorema 0.3.1** ... $\Phi^{-1}(\{p\})$ é uma subvariedade de codimensão $n = \dim M$ em $G \times U \subseteq G \times \mathbb{R}^n$, cujo espaço tangente num ponto de coordenadas $(x, a) = (x^j, a^\alpha)$ é dado pelo sistema de n equações lineares:

$$\boxed{dx^i + \sum_{\alpha=1}^r X_\alpha(x^i) \omega^\alpha = 0, \quad i = 1, \dots, n, \quad \text{com } r = \dim G} \quad (0.3.10)$$

que se dizem as **equações de invariância** do espaço homogêneo M . Nesta equação X_α são os geradores infinitesimais da G -acção, e $\omega^\alpha = \omega^\alpha(a; da)$ são as formas de Maurer-Cartan de G .

• **Dem.:** É claro que p é valor regular de Φ , porque, para cada $g \in G$ fixo, a aplicação parcial:

$$\begin{aligned} \Phi_g : U &\longrightarrow M \\ x &\longmapsto \Phi(g, x) = g \cdot \varphi(x) \end{aligned}$$

é um difeomorfismo de $U \subseteq \mathbb{R}^n$ sobre $g \cdot \varphi(U) \subseteq M$, e portanto $\Phi_{*(g,x)}$ é sobrejectiva $\forall (g, x) \in \Phi^{-1}(\{p\})$. Logo $\Phi^{-1}(\{p\})$ é uma subvariedade de codimensão $n = \dim M$ em $G \times U \subseteq G \times \mathbb{R}^n$.

Como $\{\omega^\alpha; dx^i\}$ é um co-referencial (global) para $G \times U$, certamente que $T_{(g,x)}\Phi^{-1}(\{p\}) \subset T_{(g,x)}(G \times U) \cong T_g G \oplus \mathbb{R}^n$, sendo igual a $\ker \Phi_{*(g,x)}$, é dado por um sistema de n equações lineares do tipo:

$$dx^i - \sum_{\alpha=1}^r A_\alpha^i(g, x) \omega^\alpha(g) = 0, \quad i = 1, \dots, n; \alpha = 1, \dots, r = \dim G \quad (0.3.11)$$

(não há relações lineares entre os dx^i pelo que se viu acima). A questão agora reduz-se a provar que as funções A_α^i de facto dependem apenas de x e não de g , o que se demonstra invocando a invariância à esquerda das formas de Maurer-Cartan ω^α de G . De facto, para cada $g' \in G$ defina-se:

$$\ell_{g'} : G \times U \rightarrow G \times U, \quad \ell_{g'}(g, x) = (g'g, x)$$

Então:

$$T_{(g,x)}\Phi^{-1}\{\Phi(g, x)\} \quad \text{é dado por} \quad dx^i(x) = \sum_{\alpha=1}^r A_\alpha^i(g, x) \omega^\alpha(g) \quad (0.3.12)$$

enquanto que:

$$T_{(g',g,x)}\Phi^{-1}\{\Phi(g',g,x)\} \quad \text{é dado por} \quad dx^i(x) = \sum_{\alpha=1}^r A_{\alpha}^i(g',g,x)\omega^{\alpha}(g',g)$$

Mas $\Phi(\ell_{g'}(g,x)) = \Phi(g',g,x) = (g',g) \cdot \varphi(x) = g' \cdot (g \cdot \varphi(x)) = g' \cdot \Phi(g,x)$, implica que $\ell_{g'}(\Phi^{-1}\{\Phi(g,x)\}) = \Phi^{-1}\{g' \cdot \Phi(g,x)\}$. Portanto o espaço tangente a $\Phi^{-1}\{\Phi(g,x)\}$ em (g,x) é dado por:

$$\ell_{g'}^* \left(dx^i(x) = \sum_{\alpha} A_{\alpha}^i(g',g,x)\omega^{\alpha}(g',g) \right) \quad (0.3.13)$$

Mas $\ell_g^* dx^i(x) = dx^i(x)$ e $\ell_g^* \omega^{\alpha}(g',g) = \omega^{\alpha}(g)$, e comparando (0.3.12) com (0.3.13), concluímos que $A_{\alpha}^i(g',g,x) = A_{\alpha}^i(g,x)$, $\forall g' \in G$, e portanto A_{α}^i dependem apenas de x ,

♣.

Suponhamos agora que, além de $p \in M$, também $(x^i) \in U$ está fixo. Quais os referenciais $g \in G$ relativamente aos quais p tem uma posição fixa dada pelas suas componentes relativas x^i ? Neste caso, $dx^i = 0$ e as 1-formas:

$$\vartheta^i = \sum_{\alpha=1}^r X_{\alpha}(x^i)\omega^{\alpha}, \quad i = 1, \dots, n \quad (0.3.14)$$

onde $r = \dim G$, definem uma distribuição integrável em G , cuja variedade integral que passa em $e \in G$ é exactamente a componente conexa que contem e do subgrupo de isotropia do ponto p .

Exemplo

Vejamos como são as equações de invariância (0.3.10) do espaço afim. A acção é dada por:

$$y^i = \Phi^i(x^j; a^k, A_m^l) = a^i + A_j^i x^j$$

ou em notação vectorial:

$$y = a + Ax$$

Portanto:

$$\begin{aligned} 0 = dy &= A dx + da + dAx + A dx \\ \Rightarrow dx + A^{-1} da + A^{-1} Ax &= 0 \\ \Rightarrow dx^i + (A^{-1})_j^i da^j + (A^{-1})_k^i A_j^k x^j &= 0 \end{aligned} \quad (0.3.15)$$

donde se deduz que as formas de Maurer-Cartan são:

$$\begin{cases} \omega^i &= (A^{-1})_j^i da^j \\ \omega_j^i &= (A^{-1})_k^i A_j^k \end{cases}$$

e os geradores infinitesimais são:

$$\begin{cases} X_i &= \frac{\partial}{\partial x^i} \\ X_j^i &= x^j \frac{\partial}{\partial x^i} \end{cases}$$

Portanto as equações de invariância (0.3.10) do espaço afim são:

$$dx^i + \omega^i + \sum_j \omega_j^i x^j = 0 \quad i = 1, \dots, n \quad (0.3.16)$$

As 1-formas:

$$\vartheta^i = -\omega^i - \sum_j \omega_j^i x^j, \quad i = 1, \dots, n \quad (0.3.17)$$

definem uma distribuição integrável em $GA(n)$, cuja variedade integral que passa em $e \in G$ é exactamente a componente conexa que contem e do subgrupo de isotropia do ponto $p = (x^i)$.

Exemplo... Acção linear de $GL(n)$ em V

Seja $A = (A_j^i) \in GL(n, \mathbb{R})$. Podemos encarar A de várias formas:

$$\begin{array}{ccc} \boxed{A(\mathbf{v}) = (A_j^i y^j) \mathbf{e}_i} & = & \boxed{y^j (\mathbf{e}_i A_j^i)} = \boxed{y^j \mathbf{f}_j = A(\mathbf{v})} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ A \text{ activa} \end{array} \left(\begin{array}{c} y^j \mapsto A_j^i y^j \end{array} \right) & & \begin{array}{c} \uparrow \\ A \text{ passiva} \end{array} \left(\begin{array}{c} \mathbf{e}_i \mapsto \mathbf{f}_j = \mathbf{e}_i A_j^i \end{array} \right) \\ \boxed{\mathbf{v} = y^i \mathbf{e}_i} & = & \boxed{y^i \mathbf{e}_i = \mathbf{v}} \end{array}$$

Chamemos a $\mathbf{e} = \mathcal{R}_0$ o **referencial absoluto**, e às componentes de um vector relativamente a \mathcal{R}_0 , **componentes absolutas**. O quadro acima, mostra então que as **componentes relativas** de $A(\mathbf{v})$, no referencial $\mathbf{f} = \mathbf{e} \cdot A = \mathcal{R}_A$, são iguais às componentes absolutas de \mathbf{v} . Em particular, pondo $\mathbf{v} = A^{-1}\mathbf{w}$, vemos que as **componentes relativas** de \mathbf{w} , no referencial $\mathbf{f} = \mathbf{e} \cdot A$, são iguais às componentes absolutas de $A^{-1}\mathbf{w}$.

Por outro lado, como:

$$\boxed{\mathbf{v} = y^i \mathbf{e}_i = x^j \mathbf{f}_j = x^j (\mathbf{e}_i A_j^i) = (A_j^i x^j) \mathbf{e}_i} \Rightarrow \boxed{y^i = A_j^i x^j}$$

e recordando que:

$$\begin{cases} y^i & = \text{componentes absolutas de } \mathbf{v} \\ x^j & = \text{componentes relativas de } \mathbf{v}, \text{ no referencial } \mathbf{f} = \mathbf{e} \cdot A = \mathcal{R}_A \end{cases}$$

podemos dar uma terceira interpretação “relativista” para $A \in GL(n)$ - a equação:

$$\boxed{y^i = A_j^i x^j \stackrel{\text{def}}{=} \Phi(x^j; A_j^i)} \quad (0.3.18)$$

representa a **mudança das coordenadas relativas** (x^j) de \mathbf{v} , no referencial $\mathcal{R}_A = \mathbf{e} \cdot A$, para as **coordenadas absolutas** (y^i) desse mesmo \mathbf{v} (relativas ao referencial absoluto \mathbf{e}).

Suponhamos agora que os referenciais dependem de parâmetros $a = (a^\alpha) = (a^1, \dots, a^r)$ de tal forma que o referencial absoluto \mathbf{e} é igual a \mathcal{R}_0 , e $\mathbf{f} = \mathbf{e} \cdot A = \mathcal{R}_a$.

Exemplo... Acção de um grupo de Lie G numa variedade M

Suponhamos agora que os referenciais dependem de parâmetros $a = (a^\alpha) = (a^1, \dots, a^r)$, de tal forma que o referencial absoluto \mathcal{R}_0 , corresponde a $a = 0$. A acção de um grupo de Lie G numa variedade M :

$$\boxed{y^i = \Phi^i(x^j; a^\alpha)} \quad (0.3.19)$$

pode novamente ser interpretada como a **mudança das coordenadas** x^j de um ponto $p \in M$, **relativas ao referencial** $\mathcal{R}_a = \mathcal{R}_0 \cdot S_a$, para as **coordenadas absolutas** y^i desse mesmo ponto (relativas ao referencial absoluto \mathcal{R}_0).

Exemplo

Seja \mathbb{R} a recta afim. A acção de $GA(\mathbb{R})$ em \mathbb{R} é dada por:

$$y = \Phi(x; a, b) = ax + b, \quad a \neq 0$$

onde (a, b) são coordenadas para $GA(\mathbb{R})$. Se y está fixo, vem então que:

$$0 = dy = a dx + db + x da \Rightarrow dx + \frac{db}{a} + x \frac{da}{a} = 0$$

donde se deduz que as formas de Maurer-Cartan são:

$$\omega^1 = \frac{db}{a}, \quad \omega^2 = \frac{da}{a} \quad (0.3.20)$$

enquanto que os geradores infinitesimais da acção são:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x} \quad (0.3.21)$$

Exemplo

Seja $\tilde{\mathbb{R}} = \mathbb{P}(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$ a recta projectiva, e x uma coordenada local em torno da “origem” $o = [(1, 0)]$. A acção de $GP(\mathbb{R})$ em $\tilde{\mathbb{R}}$ é dada por:

$$y = \Phi(x; a, b, c) = \frac{ax + b}{1 + cx}$$

onde (a, b, c) são coordenadas locais para $GP(\mathbb{R}) = PGL(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$, na vizinhança da Id (ver (0.10.1)). Se y está fixo, vem então que:

$$\begin{aligned} 0 = dy &= d\left(\frac{ax + b}{1 + cx}\right) \\ &= \frac{1}{(1 + cx)^2} [(a - bc) dx + x(1 + cx) da + (1 + cx) db - x(ax + b) dc] \end{aligned}$$

isto é:

$$dx + \frac{db}{a - bc} + x \frac{da - b dc + c db}{a - bc} + x^2 \frac{c da - a dc}{a - bc} = 0 \quad (0.3.22)$$

donde se deduz que as formas de Maurer-Cartan são:

$$\omega^1 = \frac{db}{a - bc}, \quad \omega^2 = \frac{da - b dc + c db}{a - bc}, \quad \omega^3 = \frac{c da - a dc}{a - bc} \quad (0.3.23)$$

enquanto que os geradores infinitesimais da acção são:

$$X_1 = \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_2 = x \frac{\partial}{\partial x}, \quad X_3 = x^2 \frac{\partial}{\partial x} \quad (0.3.24)$$

0.4 Geometrias de Klein em termos de gauges locais

Genéricamente o H -fibrado principal $\pi : G \rightarrow M = G/H$, pode ser visto como um fibrado de “referenciais” sobre M . Uma secção local $\sigma : U \subseteq M \rightarrow G$ é então um **referencial móvel** (ou um **gauge local**) em U , que define portanto uma trivialização H -equivariante:

$$\begin{aligned} \psi_\sigma : U \times H &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \subset G \\ (x, h) &\longmapsto \sigma(x) \cdot h \end{aligned} \quad (0.4.1)$$

Se tivermos duas secções $\sigma, \hat{\sigma} : U \subseteq M \rightarrow G$, então existe uma **transformação local de gauge** $h : U \rightarrow H$ tal que:

$$\hat{\sigma}(x) = \sigma(x) \cdot h(x), \quad \forall x \in U \quad (0.4.2)$$

Dado um gauge local $\sigma : U \subseteq M \rightarrow G$, podemos considerar o pull-back da forma de Maurer-Cartan ω_G , obtendo uma 1-forma em $U \subseteq M$, com valores na álgebra de Lie \mathfrak{g} :

$$\underline{\omega}_\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sigma^*(\omega_G) \quad (0.4.3)$$

a que chamamos **conexão (ou potencial) (local) de Klein**. O pull-back da equação de estrutura para ω_G é:

$$d\underline{\omega}_\sigma + \frac{1}{2} [\underline{\omega}_\sigma, \underline{\omega}_\sigma] = 0 \quad (0.4.4)$$

Portanto σ associa um referencial $\sigma(x) \in G$, a cada ponto $x \in U \subseteq M$, e simultâneamente fornece uma conexão (ou potencial) local de Klein, $\underline{\omega}_\sigma = \sigma^*(\omega_G)$, que é uma 1-forma em $U \subseteq M$, com valores na álgebra de Lie \mathfrak{g} . Se $\{\mathbf{X}_a\}$ é uma base para \mathfrak{g} , podemos escrever:

$$\underline{\omega}_\sigma = \underline{\omega}_\sigma^a \otimes \mathbf{X}_a \quad (0.4.5)$$

e as componentes $\{\underline{\omega}_\sigma^a(x)\}$, de $\underline{\omega}_\sigma$, representam as **componentes relativas da variação infinitesimal do referencial** $\sigma(x)$.

Notas...

- É importante notar que, pelos teoremas 0.5.1 e 0.5.2, não apenas o gauge local σ determina a conexão local $\underline{\omega}_\sigma$, mas o recíproco é quase verdadeiro! De facto, atendendo à equação de estrutura (0.4.4), esses teoremas afirmam que $\underline{\omega}_\sigma$ determina σ , a menos de uma multiplicação por um elemento fixo de G .
- É possível mostrar que:

$$\bar{\phi}_\sigma : T_x M \xrightarrow{\underline{\omega}_\sigma} \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$$

é um isomorfismo, $\forall x \in U$.

- Se $\sigma, \hat{\sigma} : U \subseteq M \rightarrow G$ são duas secções locais, com $\hat{\sigma}(x) = \sigma(x) \cdot h(x)$, $\forall x \in U$, para uma transformação local de gauge $h : U \rightarrow H$, e se $\underline{\omega}_\sigma$ e $\underline{\omega}_{\sigma \cdot h}$ são os correspondentes potenciais de Klein, então:

$$\underline{\omega}_{\sigma \cdot h} = \text{Ad}_{h^{-1}} \underline{\omega}_\sigma + h^* \omega_H \quad (0.4.6)$$

onde ω_H é a forma de Maurer-Cartan de H .

Diremos que dois potenciais locais de gauge $\underline{\omega}, \hat{\underline{\omega}} \in \Omega^1(U; \mathfrak{g})$ são **gauge-equivalentes**, se existir uma transformação local de gauge $h : U \rightarrow H$, tal que a fórmula (0.4.6) seja válida. Escrevemos então:

$$\hat{\underline{\omega}} \cong_h \underline{\omega} \iff \hat{\underline{\omega}} = \text{Ad}_{h^{-1}} \underline{\omega} + h^* \omega_H \quad (0.4.7)$$

0.5 Teoria de Darboux-Cartan

Os teoremas seguintes são fundamentais para a justificação teórica do método do referencial móvel de E. Cartan (demonstrações em [7], por exemplo).

♣ **Teorema 0.5.1** ... *Seja S uma variedade conexa, G um grupo de Lie e $\sigma, \hat{\sigma} : S \rightarrow G$ duas aplicações C^∞ . Então existe um elemento $g \in G$ tal que:*

$$\sigma(u) = g \cdot \hat{\sigma}(u), \forall u \in S \quad \text{se e só se} \quad \sigma^*(\omega_G) = \hat{\sigma}^*(\omega_G) \quad (0.5.1)$$

(g não depende de u , nesta fórmula).

Notas...

- Se $\sigma : S \rightarrow G$ é uma aplicação C^∞ , à 1-forma diferencial:

$$\underline{\omega}_\sigma = \sigma^*(\omega_G) = \omega_G \circ \sigma_* : TS \longrightarrow \mathfrak{g} \quad (0.5.2)$$

chama-se a **diferencial de Darboux de σ** . O teorema afirma portanto que a diferencial de Darboux de $\sigma : S \rightarrow G$, determina σ a menos de multiplicação á esquerda por um elemento fixo $g \in G$.

- Formulação de Cartan ([4], pag. 32, ou [3], pag. 88): **Teorema fundamental de igualdade...** “Suponhamos que temos duas famílias contínuas de referenciais $\{R_u\}$ e $\{\widehat{R}_u\}$, que dependem do mesmo número de parâmetros $u = (u^1, \dots, u^p)$. Então existe um deslocamento que faz coincidir simultaneamente todos os referenciais da primeira família com os referenciais correspondentes da segunda família, se e só se fôr possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os referenciais das duas famílias, tal que as componentes relativas $\underline{\omega}^i(u; du)$ do deslocamento infinitesimal de um referencial da primeira família se torne igual às componentes análogas $\widehat{\underline{\omega}}^i(u; du)$ relativas à segunda família”.
- Tomando $S = G$ e $\sigma = F$, podemos deduzir o corolário seguinte:

♣ **Corolário 0.5.1** ... Seja G um grupo de Lie conexo e $F : G \rightarrow G$ um difeomorfismo. Então $F = \ell_g$ para algum $g \in G$, se e só se F preserva a forma de Maurer-Cartan:

$$\boxed{F = \ell_g \quad \text{se e só se} \quad F^* \omega_G = \omega_G} \quad (0.5.3)$$

Como poderemos caracterizar as 1-formas diferenciais com valores em \mathfrak{g} :

$$\underline{\omega} : TS \longrightarrow \mathfrak{g}$$

que são derivadas de Darboux de alguma aplicação $\sigma : S \rightarrow G$? Se isso acontece, isto é, se:

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_\sigma = \sigma^*(\omega_G)$$

então $\underline{\omega}$ deverá satisfazer a equação de estrutura seguinte:

$$d\underline{\omega} + \frac{1}{2} [\underline{\omega}, \underline{\omega}] = 0$$

uma vez que ω_G satisfaz a equação de Maurer-Cartan e $\sigma^*d = d\sigma^*$. Esta condição necessária é de facto também suficiente, pelo menos localmente. Portanto é sempre possível construir (localmente) uma aplicação $\sigma : S \rightarrow G$ da qual se conhece a respectiva diferencial de Darboux:

♣ **Teorema 0.5.2** ... Seja G um grupo de Lie e \mathfrak{g} a respectiva álgebra de Lie. Seja S uma variedade e $\underline{\omega} : TS \rightarrow \mathfrak{g}$ uma 1-forma em S , com valores em \mathfrak{g} . Então, para cada ponto $u \in S$, existe uma vizinhança U de u e uma aplicação C^∞ , $\sigma : U \subseteq S \rightarrow G$ tal que:

$$\underline{\omega}|_U = \underline{\omega}_\sigma = \sigma^*(\omega_G)$$

se e só se $\underline{\omega}$ satisfaz a equação de estrutura seguinte:

$$d\underline{\omega} + \frac{1}{2} [\underline{\omega}, \underline{\omega}] = 0 \quad (0.5.4)$$

Nota...

- Formulação de Cartan ([4], pag. 37, ou [3], pag. 191) ... “Sejam $\underline{\omega}^i(u; du)$, $i = 1, \dots, r$, 1-formas diferenciais construídas com um número qualquer de variáveis u^1, \dots, u^p e suas diferenciais du^1, \dots, du^p , e suponhamos que essas formas satisfazem as equações de estrutura (0.5.4). Então é possível construir, para cada $u = (u^1, \dots, u^p)$, um referencial R_u cujas componentes relativas do respectivo deslocamento infinitesimal são precisamente as formas $\underline{\omega}^i$ dadas”.

0.6 Os espaços generalizados de E. Cartan

Citação: “... as equações de estrutura de G , contêm em si toda a geometria diferencial do espaço de Klein associado ao grupo G , desde que sejam conhecidas as relações lineares com coeficientes constantes entre os ω^a , que definem os “pontos” do espaço ...” (Cartan, [4], pag.48).

Por exemplo, em geometria Euclideana tridimensional, podemos tomar como elementos geradores (i.e., os “pontos” da geometria), as rectas do espaço. Para isso basta escolher em cada referencial $\{a; \mathbf{e}_i\}$, uma recta que desempenha o papel de recta-origem; por exemplo, a recta $t\mathbf{e}_1$. Quando o referencial se move, de tal forma que a sua recta-origem permanece sempre fixa, sabemos que existem 4 relações lineares com coeficientes constantes entre as componentes relativas ω^i, ω_j^i , do deslocamento infinitesimal do referencial. Essas relações são claramente:

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega_1^2 = \omega_1^3 = 0$$

que formam um sistema completamente integrável e podem ser consideradas como as “equações diferenciais das rectas orientadas de \mathbb{R}^3 ” (2), ou, mais exactamente, as equações diferenciais que definem as famílias de referenciais que têm a mesma recta-origem.

Citação: “... se num espaço tridimensional forem dadas seis 1-formas diferenciais $\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3, \underline{\omega}_2^1, \underline{\omega}_3^1, \underline{\omega}_3^2$, que satisfaçam as equações de estrutura do grupo Euclidiano $G = SE(3)$, e tais que $\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3$ sejam linearmente independentes em cada ponto, então é possível integrar essas equações de tal forma a organizar Euclideanamente esse espaço ...” (Cartan, [4], pag.50).

Podemos ver nesta citação exactamente o ponto de vista das geometrias de Klein, definidas através de **gauges locais** (ver [7], pag 166-...).

De um outro ponto de vista, as seis 1-formas atrás referidas, permitem associar um deslocamento Euclidiano infinitesimal, a cada par de pontos “infinitesimalmente próximos” do espaço tridimensional - o deslocamento cujas componentes são exactamente as formas dadas $\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2, \underline{\omega}^3, \underline{\omega}_2^1, \underline{\omega}_3^1, \underline{\omega}_3^2$. Neste sentido:

**“Um contínuo organizado Euclideanamente
é um suporte de deslocamentos Euclidianos infinitesimais”.**

Mas não é demais insistir que esses deslocamentos, associados a cada par de pontos infinitesimalmente próximos, não são arbitrários - as respectivas componentes deverão satisfazer as equações de estrutura do grupo Euclidiano $G = SE(3)$.

Exemplo

Consideremos um aberto U do plano, munido de coordenadas locais (u, v) , e seja $\sigma : a \in U \mapsto \{a; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ um referencial móvel ortonormado positivo em U . As componentes relativas do deslocamento infinitesimal desse referencial são as três 1-formas:

$$\underline{\omega}^1 = A du + B dv, \quad \underline{\omega}^2 = C du + D dv, \quad \underline{\omega}_2^1 = \xi du + \eta dv$$

dadas por:

$$\begin{cases} da &= \underline{\omega}^1 \mathbf{e}_1 + \underline{\omega}^2 \mathbf{e}_2 \\ d\mathbf{e}_1 &= \underline{\omega}_2^1 \mathbf{e}_2 \\ d\mathbf{e}_2 &= -\underline{\omega}_1^2 \mathbf{e}_1 \end{cases} \quad (0.6.1)$$

com as quais se constrói uma “conexão (ou potencial) de Klein”, em U :

$$\underline{\omega} = \underline{\omega}_U : TU \mapsto \mathfrak{se}(2), \quad \underline{\omega}_U = \left[\begin{pmatrix} 1 \\ \underline{\omega}^1 \\ \underline{\omega}^2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -\underline{\omega}_2^1 \\ 0 \end{pmatrix} \right] \quad (0.6.2)$$

²este sistema desempenha exactamente o mesmo papel que o desempenhado pelo sistema $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0$, em geometria afim. Neste caso, estas são as equações diferenciais dos pontos de \mathbb{R}^3 .

onde $\underline{\omega}^1$ e $\underline{\omega}^2$ são linearmente independentes em cada ponto de U ⁽³⁾, e que satisfazem as equações de estrutura:

$$d\underline{\omega} + \underline{\omega} \wedge \underline{\omega} = 0 \quad (0.6.3)$$

isto é:

$$\begin{cases} d\underline{\omega}^1 + \underline{\omega}_2^1 \wedge \underline{\omega}^2 = 0 \\ d\underline{\omega}^2 + \underline{\omega}_1^2 \wedge \underline{\omega}^1 = 0 \\ d\underline{\omega}_2^1 = 0 \end{cases} \quad \text{isto é:} \quad \begin{cases} \frac{\partial A}{\partial v} - \frac{\partial B}{\partial u} = \eta C - \xi D \\ \frac{\partial C}{\partial v} - \frac{\partial D}{\partial u} = -\eta A + \xi B \\ \frac{\partial \xi}{\partial v} - \frac{\partial \eta}{\partial u} = 0 \end{cases} \quad (0.6.4)$$

Uma mudança de gauge, dada por:

$$h : U \rightarrow SO(2) \quad h(a) = \begin{pmatrix} \cos \theta(a) & -\sin \theta(a) \\ \sin \theta(a) & \cos \theta(a) \end{pmatrix}$$

traduz-se num novo potencial de Klein (ver (0.4.6)):

$$\widehat{\omega} = Ad_{h^{-1}} \underline{\omega} + h^* \omega_{SO(2)}$$

(onde $\omega_{SO(2)}$ é a forma de Maurer-Cartan de $SO(2)$), que aliás pode ser calculado directamente. De facto, temos sucessivamente:

$$\widehat{\sigma}(a) = \sigma(a) \cdot h(a) \iff [\widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$$

isto é:

$$\begin{cases} \widehat{\mathbf{e}}_1 = \cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2 \\ \widehat{\mathbf{e}}_2 = -\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2 \end{cases}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \widehat{\omega}^1 &= da \cdot \widehat{\mathbf{e}}_1 \\ &= da \cdot (\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2) \\ &= \cos \theta \underline{\omega}^1 + \sin \theta \underline{\omega}^2 \\ \widehat{\omega}^2 &= da \cdot \widehat{\mathbf{e}}_2 \\ &= da \cdot (-\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2) \\ &= -\sin \theta \underline{\omega}^1 + \cos \theta \underline{\omega}^2 \\ \widehat{\omega}_2^1 &= d\widehat{\mathbf{e}}_1 \cdot \widehat{\mathbf{e}}_2 \\ &= d(\cos \theta \mathbf{e}_1 + \sin \theta \mathbf{e}_2) \cdot (-\sin \theta \mathbf{e}_1 + \cos \theta \mathbf{e}_2) \\ &= \underline{\omega}_2^1 + d\theta \end{aligned} \quad (0.6.5)$$

Em particular:

$$\begin{bmatrix} \widehat{\omega}^1 \\ \widehat{\omega}^2 \end{bmatrix} = h(a)^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\omega}^1 \\ \underline{\omega}^2 \end{bmatrix} \quad (0.6.6)$$

o que permite definir formas ω^1, ω^2 no espaço $\mathcal{RO}^+(U)$, de todos os referenciais ortonormados positivos sobre U , munido de coordenadas locais (u, v, θ) , da seguinte forma - usando a trivialização determinada pelo gauge local σ , com $z = (a, R)$, pômos

$$\begin{bmatrix} \omega^1(a, R) \\ \omega^2(a, R) \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\omega}^1(a) \\ \underline{\omega}^2(a) \end{bmatrix} \quad (0.6.7)$$

formas que são semi-básicas, e que não dependem da escolha do referencial inicial $\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2$, ou mais exactamente da trivialização determinada pelo referencial móvel (gauge local) σ .

De facto, o gauge local $\sigma : a \in U \mapsto \{a; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ trivializa $\pi : \mathcal{RO}^+(U) \rightarrow U$:

$$\begin{aligned} U \times SO(2) &\longrightarrow \pi^{-1}(U) \\ (a, R) &\longmapsto \sigma(a) \cdot R \end{aligned} \quad (0.6.8)$$

Dado um outro gauge local $\widehat{\sigma} : b \in V \mapsto \{b; \widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2\}$, em $U \cap V$, existirá uma transformação de gauge $h : U \cap V \rightarrow SO(2)$, tal que:

$$\widehat{\sigma}(a) = \sigma(a) \cdot h(a), \quad a \in U \cap V \quad (0.6.9)$$

A trivialização associada a $\widehat{\sigma}$ será:

$$\begin{aligned} V \times SO(2) &\longrightarrow \pi^{-1}(V) \\ (b, S) &\longmapsto \widehat{\sigma}(b) \cdot S \end{aligned} \quad (0.6.10)$$

³ $\{\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2\}$ constituem o co-referencial dual ao referencial móvel $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

Um dado elemento $z \in \pi^{-1}(U \cap V)$, com $\pi(z) = a \in U$, terá, relativamente à primeira trivialização, uma representação do tipo $(a, R) \in (U \cap V) \times SO(2)$, onde $R \in SO(2)$ é o único elemento de $SO(2)$, tal que $\sigma(a) \cdot R = z$. Anàlogamente, esse mesmo elemento z , terá, relativamente à segunda trivialização, uma representação do tipo $(a, S) \in (U \cap V) \times SO(2)$, onde $S \in SO(2)$ é o único elemento de $SO(2)$, tal que $\hat{\sigma}(a) \cdot S = z$. Mas, como $\hat{\sigma}(a) = \sigma(a) \cdot h(a)$, virá que:

$$\begin{aligned} z = \hat{\sigma}(a) \cdot S &= \sigma(a) \cdot R \\ \Rightarrow \sigma(a) \cdot h(a) \cdot S &= \sigma(a) \cdot R \\ \Rightarrow h(a)S &= R \\ \Rightarrow S &= h(a)^{-1}R \end{aligned} \quad (0.6.11)$$

Concluindo, $U \times SO(2)$ será “colado” a $V \times SO(2)$, através da identificação:

$$(a, R) \in (U \cap V) \times SO(2) \longleftrightarrow (a, h(a)^{-1}R) \in (U \cap V) \times SO(2) \quad (0.6.12)$$

Usando a primeira trivialização, com $z = (a, R)$, então:

$$\begin{bmatrix} \omega^1(z) \\ \omega^2(z) \end{bmatrix} = R^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\omega}^1 \\ \underline{\omega}^2 \end{bmatrix} \quad (0.6.13)$$

Usando a segunda trivialização, com $z = (a, S = h(a)^{-1}R)$, então:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \omega^1(z) \\ \omega^2(z) \end{bmatrix} &= (h(a)^{-1}R)^{-1} \begin{bmatrix} \hat{\omega}^1 \\ \hat{\omega}^2 \end{bmatrix} \\ &= R^{-1}h(a)h(a)^{-1} \begin{bmatrix} \underline{\omega}^1 \\ \underline{\omega}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (0.6.14)$$

o que mostra que de facto as formas ω^1, ω^2 não dependem da escolha do referencial inicial $\underline{\omega}^1, \underline{\omega}^2$, ou mais exactamente da trivialização determinada pelo referencial móvel (gauge local) σ .

Derivemos agora (0.6.13):

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} d\omega^1 \\ d\omega^2 \end{bmatrix} &= dR^{-1} \wedge \begin{bmatrix} \underline{\omega}^1 \\ \underline{\omega}^2 \end{bmatrix} + R^{-1} \wedge \begin{bmatrix} d\underline{\omega}^1 \\ d\underline{\omega}^2 \end{bmatrix} \\ &= -R^{-1}dR \wedge R^{-1} \begin{bmatrix} d\underline{\omega}^1 \\ d\underline{\omega}^2 \end{bmatrix} + R^{-1} \begin{bmatrix} d\underline{\omega}^1 \\ d\underline{\omega}^2 \end{bmatrix} \\ &= -R^{-1}dR \wedge \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{bmatrix} + R^{-1} \begin{bmatrix} -\omega_2^1 \wedge \omega^2 \\ \omega_1^1 \wedge \omega^1 \end{bmatrix} \\ &= -R^{-1}dR \wedge \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{bmatrix} + R^{-1} \begin{bmatrix} -\omega_2^1 \wedge \omega^2 \\ \omega_1^1 \wedge \omega^1 \end{bmatrix} \\ &= -R^{-1}dR \wedge \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{bmatrix} + R^{-1} \begin{bmatrix} 0 & -\omega_2^1 \\ \omega_1^1 & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{bmatrix} \\ &= \left(-R^{-1}dR + \begin{bmatrix} 0 & -\omega_2^1 \\ \omega_1^1 & 0 \end{bmatrix} \right) \wedge \begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (0.6.15)$$

Podemos aplicar então o método do referencial móvel. Por exemplo, as rectas c , são caracterizadas pela propriedade de que a elas podemos associar um referencial, em que o primeiro eixo está sempre fixo, isto é:

$$\hat{\omega}^2(c') = 0 \quad \hat{\omega}_2^1(c') = 0$$

donde se deduz:

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{\omega^2(c')}{\omega^1(c')} \quad \text{o que implica que:} \quad \omega_2^1 + \frac{\omega^1 d\omega^2 - \omega^2 d\omega^1}{(\omega^1)^2 + (\omega^2)^2} = 0$$

(⁴) Anàlogamente, uma circunferência de raio a será caracterizada pelas equações:

$$\hat{\omega}^2(c') = 0, \quad \hat{\omega}_2^1(c') = \frac{1}{a} \hat{\omega}^1(c')$$

⁴esta última equação significa, mais exactamente, que $\omega_2^1(c') + \frac{\omega^1(c')[\omega^2(c')] - \omega^2(c')[\omega^1(c)]'}{(\omega^1(c'))^2 + (\omega^2(c'))^2} = 0$.

Consideremos agora uma curva suave $c : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow U \subseteq \mathbb{R}^2$, e fixemos um referencial de ordem 0 ao longo de c , isto é, uma aplicação:

$$\begin{aligned} \sigma : I &\longrightarrow \mathcal{RO}^+(U) \\ t &\longmapsto \sigma(t) = \{c(t); \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)\} \end{aligned}$$

Qualquer outro referencial de ordem 0 ao longo de c , digamos $\widehat{\sigma}(t) = \{c(t); \widehat{\mathbf{e}}_1(t), \widehat{\mathbf{e}}_2(t)\}$, relaciona-se com este através de:

$$[\widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2] = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2] \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad \text{onde } t \mapsto h(t) = \begin{pmatrix} \cos \theta(t) & -\sin \theta(t) \\ \sin \theta(t) & \cos \theta(t) \end{pmatrix}$$

o que significa que o conjunto $\mathcal{R}_c^{(0)} \hookrightarrow \mathcal{RO}^+(U)$, dos referenciais de ordem 0 ao longo de c , depende de 2 parâmetros - um principal t e outro secundário θ .

As formas $\begin{bmatrix} \omega^1 \\ \omega^2 \end{bmatrix}$, definidas em (0.6.13), sendo semi-básicas (não contêm a diferencial $d\theta$ - apenas contêm as diferenciais du e dv), quando restritas a $\mathcal{R}_c^{(0)} \hookrightarrow \mathcal{RO}^+(U)$, têm de satisfazer uma relação linear, já que ambas ficam múltiplos da forma dt . Como não são ambas nulas, podemos supôr por exemplo que:

$$\omega^2(c')dt = A(t, \theta)\omega^1(c')dt, \quad \text{em } \mathcal{R}_c^{(0)} \quad (0.6.16)$$

Derivemos agora (0.6.16) e apliquemos a equação de estrutura de $SE(2)$. Vem sucessivamente que:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 \wedge \omega^1 &= \\ d\omega^2 &= dA \wedge \omega^1 + A d\omega^1 \\ &= dA \wedge \omega^1 + A(\omega_2^1 \wedge \omega^2) \\ &= dA \wedge \omega^1 + A^2(\omega_2^1 \wedge \omega^1) \end{aligned} \quad (0.6.17)$$

donde:

$$[dA + (A^2 + 1)\omega_2^1] \wedge \omega^1 = 0 \quad \Rightarrow \quad dA + (A^2 + 1)\omega_2^1 = B\omega^1 \quad (0.6.18)$$

onde aplicamos o Lema de Cartan. Consideremos agora a componente vertical desta equação, restrita a uma fibra de $\mathcal{R}_c^{(0)} \rightarrow I$. Se designarmos por $\pi_2^1 = \omega_2^1|_{\{\omega^1 = \omega^2 = 0\}}$, então (0.6.18) dá que:

$$\delta A + (A^2 + 1)\pi_2^1 = 0 \quad (0.6.19)$$

o que implica que o gerador infinitesimal é:

$$X_1^2 = (A^2 + 1) \frac{\partial}{\partial A} \quad (0.6.20)$$

Podemos ver isto de outra forma. De facto, o elemento de contacto de ordem 1, tangente a c em t , é dado pela coordenada local A , onde $A = \frac{\omega^2(c')}{\omega^1(c')}$, relativamente ao referencial (de ordem 1) $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$. Sob a acção de $SO(2)$ (acção prolongada aos elementos de contacto de ordem 1), esse elemento de contacto roda de um ângulo igual a θ , o que em termos da coordenada A , significa que:

$$\begin{aligned} A &\longmapsto \widetilde{\Phi}(A; \theta) \\ &= \text{tg} [\theta + \text{arc tg } A] \\ &= A + \sec^2 [\text{arc tg } A] \theta + o(\theta^2) \\ &= A + (A^2 + 1)\theta + o(\theta^2) \end{aligned} \quad (0.6.21)$$

donde se deduz novamente que o gerador infinitesimal é $(A^2 + 1) \frac{\partial}{\partial A}$.

Daqui se conclui que podemos tomar $A(t, \theta) \equiv 0$, isto é, $\omega^2(c')dt \equiv 0$, em $\mathcal{R}_c^{(0)}$, o que geomètricamente significa que podemos escolher sempre um referencial de ordem 0, ao longo de c , digamos $\sigma(t) = \{c(t); \mathbf{e}_1(t), \mathbf{e}_2(t)\}$, tal que $\mathbf{e}_1(t) = \frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}$, $\forall t$. Os referenciais de ordem 0 que satisfazem esta condição dizem-se referenciais de ordem 1, ao longo de c , e o conjunto por eles formado nota-se por $\mathcal{R}_c^{(1)}$. Por (0.6.18), vemos que é uma variedade integral de \mathcal{R}_c (que tem dimensão 2), do sistema de Pffaf:

$$\omega^2 = 0 \quad \text{e} \quad \omega_2^1 - B\omega^1 = 0$$

As equações de estrutura restritas a $\mathcal{R}_c^{(1)}$, dizem que:

$$d\omega^1(c') = 0 \quad \text{e} \quad d\omega_2^1 = 0 \quad (0.6.22)$$

Portanto ω^1 é forma fechada e invariante, que se diz a forma eleneto de arco (Euclideano) de c . De facto:

$$1 = \omega^1(e_1) = \omega^1\left(\frac{c'(t)}{\|c'(t)\|}\right) \Rightarrow \omega^1(c')dt = \|c'\|dt = ds$$

Por outro lado, a equação de estrutura $d\omega_2^1 = 0$, e (0.6.18), dá:

$$0 = d\omega_2^1 = dB\omega^1 \Rightarrow dB = 0$$

Portanto dB é forma fechada e invariante, e:

$$B = k = \frac{\omega_2^1}{\omega^1} \tag{0.6.23}$$

que identificamos com a curvatura de c . Finalmente, as **equações de Frenet** do referencial de ordem 1 assim obtido, a que chamamos **referencial de Frenet**, são:

$$\begin{cases} da &= ds e_1 \\ de_1 &= kds e_2 \\ de_2 &= -kds e_1 \end{cases} \tag{0.6.24}$$

0.7 Geometrias (espaços generalizados) de Cartan

Passemos agora à generalização das geometrias de Klein, proposta por Elie Cartan.

0000

Consideremos um “potencial de Cartan” $\underline{\omega}_U : TU \rightarrow \mathfrak{se}(2)$, num aberto U do plano, como em (0.6.2), com formas associadas:

$$\underline{\omega}^1 = A du + B dv, \quad \underline{\omega}^2 = C du + D dv, \quad \underline{\omega}_2^1 = \xi du + \eta dv$$

tais que $\underline{\omega}^1$ e $\underline{\omega}^2$ sejam linearmente independentes em cada ponto de U , mas que agora não satisfazem necessariamente as equações de estrutura (0.6.3). Isto é:

$$d\underline{\omega} + \underline{\omega} \wedge \underline{\omega} = \underline{\Omega} \quad \text{não necessariamente igual a } 0 \tag{0.7.1}$$

ou ainda:

$$\begin{cases} d\underline{\omega}^1 + \underline{\omega}_2^1 \wedge \underline{\omega}^2 &= \underline{\Omega}^1 \\ d\underline{\omega}^2 + \underline{\omega}_1^2 \wedge \underline{\omega}^1 &= \underline{\Omega}^2 \\ d\underline{\omega}_2^1 &= \underline{\Omega}_2^1 \end{cases} \tag{0.7.2}$$

A 2-forma em U , com valores em $\mathbb{R}^2 = \mathfrak{se}(2)/\mathfrak{so}(2)$:

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} \underline{\Omega}^1 \\ \underline{\Omega}^2 \end{pmatrix} \tag{0.7.3}$$

é a chamada **torção**, e a 2-forma $u\underline{\Omega}_2^1 = d\underline{\omega}_2^1$ é a chamada **curvatura** da conexão (local) de Cartan $\underline{\omega}_U$.

Generalizando:

♣ **Definição 0.7.1** ... Seja M uma variedade de dimensão n e G/H um espaço homogéneo tal que $\dim G/H = \dim M = n$. Um **atlas de Cartan** em M é uma colecção $\mathcal{A} = \{(U, \underline{\omega}_U)\}$ onde:

- $\{U\}$ é uma cobertura aberta de M .
- $\underline{\omega}_U : TU \rightarrow \mathfrak{g}$ é uma **conexão (ou potencial) local de Cartan**, isto é, $\underline{\omega}_U$ é uma 1-forma em U , com valores na álgebra de Lie \mathfrak{g} , de G , que satisfaz as seguintes condições:

– regularidade:

$$\bar{\varphi}_U : T_x U \rightarrow \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h} \tag{0.7.4}$$

é um isomorfismo linear, $\forall x \in U$.

– **compatibilidade:** Se $(U, \underline{\omega}_U), (V, \underline{\omega}_V) \in \mathcal{A}$, então existe uma transformação local de gauge $h : U \cap V \rightarrow H$, tal que:

$$\underline{\omega}_V = \text{Ad}_{h^{-1}} \underline{\omega}_U + h^*(\omega_H) \quad (0.7.5)$$

Uma **estrutura de Cartan** em M , consiste de uma classe de equivalência de atlas de Cartan em M . Uma **geometria de Cartan** (ou **espaço generalizado de Cartan**), é uma variedade munida de uma estrutura de Cartan.

♣ **Definição 0.7.2** ... Dada uma conexão (ou potencial) local de Cartan $(U, \underline{\omega}_U)$, à 2-forma $\underline{\Omega}_U$, em U , com valores na álgebra de Lie \mathfrak{g} , definida por:

$$\underline{\Omega}_U \stackrel{\text{def}}{=} d\underline{\omega}_U + \frac{1}{2} [\underline{\omega}_U, \underline{\omega}_U] \quad (0.7.6)$$

chama-se a **curvatura** (local) da conexão (ou potencial) local de Cartan $(U, \underline{\omega}_U)$. Se $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é a projeção canônica, então à 2-forma $\underline{\tau}_U = \rho(\underline{\Omega}_U)$, em U , com valores na álgebra de Lie \mathfrak{g} , chama-se a **torção** (local) da conexão (ou potencial) local de Cartan $(U, \underline{\omega}_U)$.

Se $(U, \underline{\omega}_U), (V, \underline{\omega}_V) \in \mathcal{A}$, são compatíveis, segundo (0.7.5), então:

$$\underline{\Omega}_V = \text{Ad}_{h^{-1}} \underline{\Omega}_U \quad (0.7.7)$$

Em particular o anulamento da curvatura é um conceito intrínscico. Um espaço de Cartan de curvatura nula diz-se **plano** (flat).

0.8 Espaços com conexão afim

Seja M uma variedade de dimensão n . Para cada $p \in M$ designamos por $A_p M$ o espaço afim tangente, i.e., o espaço tangente $T_p M$ com a sua estrutura afim canônica. Pontos em $A_p M$ serão designados por P, Q, \dots , e vectores em $T_p M$ por $\mathbf{v}, \mathbf{w}, \dots$

Vamos dar uma definição formal de paralelismo afim e conexão afim em M :

♣ **Definição 0.8.1** ... Seja M uma variedade orientada de dimensão n . “**Uma estrutura de paralelismo afim**” em M , é uma família de aplicações afins $= \{\mathbf{A}_{\alpha;p,q}\}$:

$$\mathbf{A}_{\alpha;p,q} : A_p M \rightarrow A_q M$$

definidas para todos os pontos $p, q \in M$ e curvas C^∞ por pedaços $\alpha : I = [0, 1] \rightarrow M$ tais que $\alpha(0) = p$ e $\alpha(1) = q$, e que satisfazem as condições seguintes:

- $\mathbf{A}_{\alpha;p,q}$ não depende da parametrização de α .
- $\mathbf{A}_{\alpha;p,q} : A_p M \rightarrow A_q M$ é um isomorfismo afim positivo.
- $\mathbf{A}_{\beta;q,r} \circ \mathbf{A}_{\alpha;p,q} = \mathbf{A}_{\alpha\beta;p,r}$.
- $\mathbf{A}_{\alpha;p,p} = \text{Id}$ se $\alpha(t) \equiv p, \forall t$.

Seja $U \subseteq M$ é um aberto onde está definido um gauge afim local \mathbf{e} , isto é, para cada ponto $p \in U \subseteq M$, $\mathbf{e}_p = \{O_p; \mathbf{e}_1(p), \dots, \mathbf{e}_n(p)\}$ é um referencial afim positivo de $A_p M$, de classe C^∞ . Cada ponto $P \in A_p M$ terá coordenadas afins $(y^a(P))$, dadas por:

$$P = O_p + \sum_{a=1}^n y^a(P) \mathbf{e}_a(p)$$

Fixemos de uma vez por todas o referencial canônico usual, $\{\mathbf{0}; E_1, \dots, E_n\}$, para \mathbb{R}^n (munido da sua estrutura afim canônica). Cada referencial afim \mathbf{e}_p pode também ser visto como o isomorfismo afim:

$$\mathbf{e}_p : \mathbb{R}^n \longrightarrow A_p M$$

que envia $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^n$ em O_p e E_a em $\mathbf{e}_a(p)$ ($a = 1, \dots, n$).

Portanto o paralelismo afim é descrito, relativamente ao gauge local \mathbf{e} em U , através de uma família $\{\mathbf{A}_{\alpha;p,q}^{(\mathbf{e})}\}$, de isomorfismos afins positivos de \mathbb{R}^n , definidas através do diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \xrightarrow{\mathbf{A}_{\alpha;p,q}^{(\mathbf{e})}} & \mathbb{R}^n \\ \mathbf{e}_p \downarrow & & \downarrow \mathbf{e}_q \\ A_p M & \xrightarrow{\mathbf{A}_{\alpha;p,q}} & A_q M \end{array}$$

isto é:

$$\boxed{\mathbf{A}_{\alpha;p,q}^{(\mathbf{e})} = \mathbf{e}_q^{-1} \mathbf{A}_{\alpha;p,q} \mathbf{e}_p \in GA^+(n)} \quad (0.8.1)$$

Consideremos agora um ponto $p \in U$ e uma curva α , de classe C^∞ , tal que $\alpha(0) = p$ e $\alpha'(0) = \mathbf{v} \in T_p M$. Designemos por:

$$\mathbf{A}_{\alpha;p}^{(\mathbf{e})}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}_{\alpha;p,\alpha(t)}^{(\mathbf{e})} \in GA^+(n)$$

onde $GA^+(n)$ representa a componente da Id do grupo afim de \mathbb{R}^n . A curva:

$$t \longmapsto \mathbf{A}_{\alpha;p}^{(\mathbf{e})}(t)$$

é uma curva em $GA^+(n)$, que vamos supôr ser de classe C^∞ , e que no instante $t = 0$ passa na Id. Vamos supôr que a respectiva derivada:

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{A}_{\alpha;p}^{(\mathbf{e})}(t)$$

em $t = 0$, existe e depende linearmente apenas do vector tangente $\mathbf{v} \in T_p M$ (e não da curva α). Fica então definida uma 1-forma diferencial $\underline{\omega}^{(\mathbf{e})}$, em U , com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{ga}(n)$ do grupo afim $GA(n)$ de \mathbb{R}^n

$$\boxed{\underline{\omega}_p^{(\mathbf{e})} : \mathbf{v} \in T_p M \longmapsto \underline{\omega}_p^{(\mathbf{e})}(\mathbf{v}) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \mathbf{A}_{\alpha;p}^{(\mathbf{e})}(t) \in \mathfrak{ga}(n)} \quad (0.8.2)$$

chamada a **forma local de conexão afim**, relativamente ao gauge local \mathbf{e} , associada ao paralelismo afim .

Consideremos de novo um ponto $p \in U$ e uma curva α , de classe C^∞ , tal que $\alpha(0) = p$. De seguida identificaremos um ponto $p \in M$ com o vector nulo $\mathbf{0}_p \in T_p M$. Partindo de $p = \alpha(0)$, o ponto $P_0 = \mathbf{e}_p^{-1}(\mathbf{0}_p)$ estará em \mathbb{R}^n , e se consideramos as suas sucessivas imagens pelas transformações afins $\mathbf{A}_{\alpha;p}^{(\mathbf{e})}(t)$, obtemos uma curva em \mathbb{R}^n :

$$\boxed{t \longmapsto \tilde{\alpha}^{(\mathbf{e})}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A}_{\alpha;p}^{(\mathbf{e})}(t)(P_0) \in \mathbb{R}^n} \quad (0.8.3)$$

que se diz o **desenvolvimento** de M , ao longo de α , partindo de p , e relativamente ao gauge local \mathbf{e} . α diz-se uma **geodésica** do paralelismo afim, se o respectivo desenvolvimento $\tilde{\alpha}^{(\mathbf{e})}$ fôr uma recta afim em \mathbb{R}^n . Como veremos adiante, este conceito não depende do gauge afim \mathbf{e} .

Consideremos novamente o espaço \mathbb{R}^n com a sua estrutura afim canônica, munido do referencial canônico usual, $\{\mathbf{0}; E_1, \dots, E_n\}$. Uma **bijecção afim** $\mathbf{A} : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação que é da forma:

$$\mathbf{A} : P \mapsto \mathbf{a} + A(P), \quad P \in \mathbb{R}^n \quad (0.8.4)$$

onde $A \in GL(n, \mathbb{R})$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$.

As bijecções afins de \mathbb{R}^n constituem um grupo $GA(n)$, que é o produto semi-directo de \mathbb{R}^n por $GL(n)$, e para o qual utilizamos a **representação homogénea** $GA(n) \hookrightarrow GL(n+1, \mathbb{R})$ seguinte:

$$\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}, A) \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{a} & A \end{bmatrix} \quad \text{com} \quad A \in GL(n, \mathbb{R}), \mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \quad (0.8.5)$$

A álgebra de Lie $\mathfrak{ga}(n)$ pode ser identificada com a subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R})$ constituída pelas matrizes da forma:

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{x} & X \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{x} \oplus X \quad \text{com} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n, X \in \mathfrak{gl}(n) \quad (0.8.6)$$

O parêntesis de Lie em $\mathfrak{ga}(n)$ é dado por:

$$[\mathbf{x} \oplus X, \mathbf{y} \oplus Y] = (X\mathbf{y} - Y\mathbf{x}) \oplus [X, Y] \quad (0.8.7)$$

e a representação adjunta de $GA(n)$ em $\mathfrak{ga}(n)$, por:

$$Ad_{(\mathbf{a}, A)}(\mathbf{x} \oplus X) = (-AXA^{-1}\mathbf{a} + A\mathbf{x}) \oplus (AXA^{-1}) \quad (0.8.8)$$

Portanto:

$$\mathfrak{ga}(n) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n) \quad (0.8.9)$$

Esta soma directa é reductiva:

$$Ad_{GA(n)}\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n \quad (0.8.10)$$

De facto:

$$Ad_{(\mathbf{a}, A)}(\mathbf{x} \oplus 0) = A\mathbf{x} \oplus 0, \quad \forall (\mathbf{a}, A) \in GA(n), \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \quad (0.8.11)$$

Portanto, relativamente à soma directa reductiva (0.8.9), a forma local de conexão afim $\underline{\omega} = \underline{\omega}^{(e)}$ terá uma decomposição em duas componentes - a \mathbb{R}^n e a $\mathfrak{gl}(n)$ -componente:

$$\begin{aligned} \underline{\omega} &= \underline{\omega}^a \oplus \underline{\omega}_b^a \\ &= \underline{\omega}_i^a dx^i \oplus \underline{\omega}_{bj}^a dx^j \in \Omega^1(U) \otimes (\mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n)) \end{aligned} \quad (0.8.12)$$

(onde omitimos o prefixo (e), para aliviar as notações).

Calculemos agora a forma de curvatura da conexão afim ω :

$$\begin{aligned} \underline{\Omega}^{(e)} &= d\underline{\omega}^{(e)} - \underline{\omega}^{(e)} \wedge \underline{\omega}^{(e)} \\ &= d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \underline{\omega}^a & \underline{\omega}_b^a \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \underline{\omega}^a & \underline{\omega}_b^a \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \underline{\omega}^a & \underline{\omega}_b^a \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d\underline{\omega}^a + \underline{\omega}_b^a \wedge \underline{\omega}^b & d\underline{\omega}_b^a + \underline{\omega}_c^a \wedge \underline{\omega}_b^c \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (0.8.13)$$

isto é, relativamente à soma directa reductiva (0.8.9), a forma de curvatura local $\underline{\Omega} = \underline{\Omega}^{(e)}$, da conexão afim $\underline{\omega} = \underline{\omega}^{(e)}$, terá uma decomposição em duas componentes - a \mathbb{R}^n e a $\mathfrak{gl}(n)$ -componente:

$$\underline{\Omega} = \underline{\tau}^a \oplus \underline{\Omega}_b^a \quad (0.8.14)$$

onde:

$$\begin{aligned} \underline{\tau}^a &= d\underline{\omega}^a + \underline{\omega}_b^a \wedge \underline{\omega}^b \\ \underline{\Omega}_b^a &= d\underline{\omega}_b^a + \underline{\omega}_c^a \wedge \underline{\omega}_b^c \end{aligned} \quad (0.8.15)$$

(onde mais uma vez omitimos o prefixo (e), para aliviar as notações). A 1-forma $\underline{\tau} = \underline{\tau}^{(e)}$, com valores em \mathbb{R}^n , diz-se a **forma de torção** da conexão afim $\underline{\omega} = \underline{\omega}^{(e)}$, relativamente ao gauge local e.

Se $\mathbf{A}_{\alpha; p}^{(e)}(t) = \mathbf{a}^a + A_b^a(t)$, e se $P = y^a \epsilon_a$, então o paralelismo $P_0 \mapsto P(t)$, é dado por:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{a}(t) & A(t) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -A(t)^{-1}\mathbf{a}(t) & A(t)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{y}(t) \end{bmatrix} \quad (0.8.16)$$

e derivando em ordem a t , vem que:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{y}' \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{a}' & A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{y}_0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{a}' & A' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -A^{-1}\mathbf{a} & A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \mathbf{a}' - A'A^{-1}\mathbf{a} & A'A^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (0.8.17)$$

isto é:

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \left[\frac{dA}{dt} A^{-1} \right] \mathbf{y} + \left(\frac{d\mathbf{a}}{dt} - \left[\frac{dA}{dt} A^{-1} \right] \mathbf{a} \right) \quad (0.8.18)$$

Portanto a curva $t \mapsto \mathbf{y}(t) = \mathbf{a}(t) + A(t)y_0$ é solução da ODE (0.8.19):

$$\frac{d\mathbf{y}}{dt} = \xi(t)\mathbf{y} + \mathbf{x}(t) \quad (0.8.19)$$

onde pusemos:

$$\begin{aligned} \xi(t) &= \frac{dA}{dt} A^{-1}(t) \in \mathfrak{gl}(n) \\ \mathbf{x}(t) &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} - \left[\frac{dA}{dt} A^{-1} \right] \mathbf{a} = \frac{d\mathbf{a}}{dt} - \xi(t)\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (0.8.20)$$

Note que curva $t \mapsto (\mathbf{x}(t), \xi(t))$ é uma curva na álgebra de Lie $\mathfrak{ga}(n) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n)$ do grupo afim $GA(n)$ de \mathbb{R}^n .

Exemplo ...

Consideremos sobre $M = \mathbf{S}^2$ um paralelismo Riemanniano definido pela condição de que: \mathbf{v}_p é paralelo a \mathbf{v}_q se e só se \mathbf{v}_p e \mathbf{v}_q têm a mesma norma e formam um mesmo ângulo com os meridianos que passam respectivamente em p e q . É claro que um tal paralelismo é absoluto (por definição), uma vez que não faz intervir qualquer curva que una p a q . Logo a sua curvatura é nula.

Em coordenadas geográficas $\{\theta, \varphi\}$, se escolhermos o gauge local $\mathbf{e} = \left\{ \mathbf{e}_1 = \frac{\partial}{\partial \theta}, \mathbf{e}_2 = \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \right\}$, o paralelismo é dado pela aplicação identidade, e a conexão, neste gauge é nula: $\omega^{(\mathbf{e})} = 0$.

As formas duais são $\underline{\omega}^1 = d\theta$ e $\underline{\omega}^2 = \sin \theta d\varphi$, e a torção é:

$$\begin{aligned} \underline{\tau} &= d \begin{bmatrix} \underline{\omega}^1 \\ \underline{\omega}^2 \end{bmatrix} + \omega^{(\mathbf{e})} \wedge \begin{bmatrix} \underline{\omega}^1 \\ \underline{\omega}^2 \end{bmatrix} \\ &= d \begin{bmatrix} d\theta \\ \sin \theta d\varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \cos \theta \end{bmatrix} d\theta \wedge d\varphi \\ &= \begin{bmatrix} 0 \\ \cotg \theta \end{bmatrix} dA \end{aligned} \quad (0.8.21)$$

onde $dA = \sin \theta d\theta \wedge d\varphi$ é o elemento de área da esfera. A esfera, com esta conexão Euclideana, não tem pois curvatura, mas tem uma torção cuja densidade, em cada ponto $p \in M$, é representada por um vector tangente ao paralelo que passa em p , de intensidade igual a $\cotg \theta$ (por unidade de área). Ela anula-se no equador, muda de sentido quando se passa de um hemisfério para o outro, e é infinita nos pólos.

É claro que neste exemplo, os paralelos e os meridianos desenvolvem-se em rectas, e são por isso geodésicas desta conexão. Também o são as loxodrómicas.

Exemplo ...

Consideremos em $M = \mathbb{R}^3$ um paralelismo Riemanniano definido pela condição de que: \mathbf{v}_p é paralelo a \mathbf{v}_q se e só se \mathbf{v}_p e \mathbf{v}_q têm a mesma norma e \mathbf{v}_q deduz-se de \mathbf{v}_p por uma rotação positiva em torno da recta \overline{pq} , de ângulo igual a $\frac{\|p-q\|}{k}$, onde k é uma constante dada. Este espaço diz-se de **polarização rotatória**. Os cálculos mostram que este espaço tem curvatura constante e igual a $\frac{1}{k^2}$, e tem torção também constante e igual a $\frac{2}{k}$, em cada ponto, normal ao elemento de superfície considerado. As geodésicas são as rectas usuais.

De facto, escolhendo o gauge usual $\mathbf{e} = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$, com co-referencial dual $\underline{\omega} = \{ \underline{\omega}^1 = dx, \underline{\omega}^2 = dy, \underline{\omega}^3 = dz \}$, é fácil ver que a forma de conexão, nesse gauge, é dada por:

$$\underline{\omega} = \frac{1}{k} \begin{bmatrix} 0 & -dz & dy \\ dz & 0 & -dx \\ -dy & dx & 0 \end{bmatrix}$$

donde:

$$\begin{aligned} \underline{\tau}^i &= d\underline{\omega}^i + \underline{\omega}_j^i \wedge \underline{\omega}^j \\ &= d \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & -dz & dy \\ dz & 0 & -dx \\ -dy & dx & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} \\ &= \frac{2}{k} \begin{bmatrix} dy \wedge dz \\ dx \wedge dz \\ dx \wedge dy \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{0.8.22}$$

enquanto que a forma de curvatura é:

$$\begin{aligned} \underline{\Omega}_j^i &= d\underline{\omega}_j^i + \underline{\omega}_k^i \wedge \underline{\omega}_j^k \\ &= \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} 0 & -dz & dy \\ dz & 0 & -dx \\ -dy & dx & 0 \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & -dz & dy \\ dz & 0 & -dx \\ -dy & dx & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{k^2} \begin{bmatrix} 0 & -dx \wedge dy & dz \wedge dx \\ dx \wedge dy & 0 & dy \wedge dz \\ -dz \wedge dx & -dy \wedge dz & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{0.8.23}$$

0.9 Conexões de Cartan

$\omega : \begin{array}{ccc} T_{(x,h)}(U \times H) \cong T_x U \oplus T_h H & \xrightarrow{\text{Id} \oplus \omega_H} & T_x U \oplus \mathfrak{h} \\ (\mathbf{v}, \bar{\xi}) & \longmapsto & (\mathbf{v}, \omega_H(\bar{\xi})) \end{array} \longrightarrow \mathfrak{g}$ $\longmapsto \text{Ad}_{h^{-1}} \omega_U(\mathbf{v}) + \omega_H(\bar{\xi})$	(0.9.1)
--	---------

Seja:

- M uma variedade de dimensão n ,
- G um grupo de Lie,
- H um subgrupo de Lie de G , tal que $\dim G/H = \dim M = n$,
- $\pi : P \rightarrow M$ um H -fibrado principal sobre M .

Eis alguns exemplos:

♣ **Exemplo 0.9.1** ... Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo de Lie fechado em G . Consideremos então o espaço de Klein (espaço homogéneo) $M = G/H$, e o H -fibrado principal $\pi : P = G \rightarrow M = G/H$, sobre M .

♣ **Exemplo 0.9.2** ... Seja $G = GA(n)$ o grupo afim actuando em \mathbb{R}^n (com a sua estrutura afim canónica) e $H = GL(n)$, de tal forma que $G/H = GA(n)/GL(n) = \mathbb{R}^n$. Consideremos então uma variedade M de dimensão n e o $GL(n)$ -fibrado principal $\pi : P = \mathcal{R}(M) \rightarrow M$, isto é, o fibrado de referenciais (lineares) de M .

♣ **Exemplo 0.9.3** ... Seja $G = SE(n)$ o grupo especial Euclidiano actuando em \mathbb{R}^n (com a sua estrutura Euclidiana usual) e $H = SO(n)$, de tal forma que $G/H = \mathbb{R}^n$. Consideremos então uma variedade Riemanniana orientada M de dimensão n e o $SO(n)$ -fibrado principal $\pi : P = \mathcal{FO}(M) \rightarrow M$, isto é, o fibrado de referenciais ortonormados positivos (lineares) de M .

♣ **Exemplo 0.9.4** ... Seja $G = PGL(n)$ o grupo projectivo actuando em $\mathbb{RP}(n)$ e H um subgrupo de isotropia de $PGL(n)$, de tal forma que $PGL(n)/H = \mathbb{RP}(n)$. Consideremos então uma variedade M de dimensão n . Em breve construiremos um H -fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$, sobre M , a que chamamos uma **estrutura projectiva** sobre M .

♣ **Exemplo 0.9.5** ... Seja $G = O(n+1, 1)$ o grupo de Möbius actuando na esfera \mathbf{S}^n de dimensão n e H um subgrupo de isotropia de $O(n+1, 1)$, de tal forma que $O(n+1, 1)/H = \mathbf{S}^n$. Consideremos então uma variedade M de dimensão n com uma estrutura conforme. Em breve construiremos um H -fibrado principal $\pi : P \rightarrow M$, sobre M , a que chamamos o **primeiro prolongamento da estrutura conforme** sobre M .

Regressemos à teoria geral, dando a definição de geometria de Cartan (ou espaço generalizado de Cartan).

♣ **Definição 0.9.1** ... Uma **geometria de Cartan** (P, ω) em M , **modelada no espaço homogéneo** G/H , consiste dos dados seguintes:

- M - uma variedade de dimensão n ,
- G - um grupo de Lie,
- H - um subgrupo de Lie de G , tal que $\dim G/H = \dim M = n$,
- $\pi : P \rightarrow M$ - um H -fibrado principal sobre M .
- Uma **conexão de Cartan** ω em P , isto é, uma 1-forma ω em P , com valores na álgebra de Lie \mathfrak{g} , de G , que satisfaz as condições seguintes:

(a). $\omega_p : T_p P \rightarrow \mathfrak{g}$ é um isomorfismo linear, $\forall p \in P$, isto é, ω define um paralelismo absoluto em P .

(b). $\omega(\widehat{\xi}) = \xi$, $\forall \xi \in \mathfrak{h}$, onde $\widehat{\xi} \in \mathfrak{X}(P)$ é o campo fundamental associado a $\xi \in \mathfrak{h}$.

(c). $R_{\mathbf{h}}^* \omega = \text{Ad}_{\mathbf{h}^{-1}} \omega$, $\forall \mathbf{h} \in H$.

A 2-forma Ω em P , com valores na álgebra de Lie \mathfrak{g} , definida pela “equação de estrutura”:

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2} [\omega, \omega] \quad (0.9.2)$$

diz-se a **curvatura** da geometria de Cartan (P, ω) em M . Se $\rho : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ é a projecção canónica, à 2-forma $\tau = \rho(\Omega)$ em P , com valores em $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$, chama-se a **torção** da geometria de Cartan (P, ω) em M . Quando Ω toma valores em \mathfrak{h} , de tal forma que $\tau = 0$, diz-se que a geometria de Cartan (P, ω) é **livre de torção**.

Os exemplos “triviais” são os das **geometrias de Klein**:

♣ **Exemplo 0.9.6** ... **Geometrias de Klein** Seja G um grupo de Lie e H um subgrupo de Lie fechado em G . Consideremos então o espaço de Klein (espaço homogéneo) $M = G/H$, o H -fibrado principal $\pi : P = G \rightarrow M = G/H$, sobre M , e $\omega = \omega_G$ a **forma de Maurer-Cartan** de G . Neste caso:

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2} [\omega, \omega] = 0$$

que é a chamada equação de estrutura de Cartan, do grupo G . Portanto uma geometria de Klein é uma geometria de Cartan de curvatura nula.

Uma situação particularmente importante é o caso graduado. Assim, suponhamos que a álgebra de Lie \mathfrak{g} é graduada:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \underbrace{\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k}_{\mathfrak{h}} \quad (0.9.3)$$

com:

$$[\mathfrak{g}_i, \mathfrak{g}_j] \subset \mathfrak{g}_{i+j} \quad \text{e} \quad \mathfrak{h} = \mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{g}_k \quad (0.9.4)$$

Seja:

$$\omega = \omega_{-1} \oplus \underbrace{\omega_0 \oplus \omega_1 \oplus \cdots \oplus \omega_k}_{\omega_{\mathfrak{h}}} \quad (0.9.5)$$

a correspondente decomposição da conexão de Cartan. Note que a curvatura Ω não envolve as formas $\omega_0, \omega_1, \dots, \omega_k$.

♣ **Exemplo 0.9.7** ... Seja:

$$\begin{aligned} G &= PGL(n) = SL(n+1)/\text{Centro} \\ H &= \left\{ \begin{bmatrix} A & 0 \\ \alpha & a \end{bmatrix} : A \in GL(n), \alpha \in \mathbb{R}^{n*} \right\} / \text{Centro} \end{aligned} \quad (0.9.6)$$

A álgebra de Lie $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$ é graduada:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1) = \mathfrak{g}_{-1} \oplus \underbrace{\mathfrak{g}_0 \oplus \mathfrak{g}_1}_{\mathfrak{h}}$$

onde:

$$\mathfrak{g}_{-1} = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}, \quad \mathfrak{g}_0 = \left\{ \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} : x + \text{traço } X = 0 \right\}, \quad \mathfrak{g}_1 = \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} : \right\} \quad (0.9.7)$$

com $\mathbf{v} \in V, \alpha \in V^*, X \in \mathfrak{gl}(n)$ e $x \in \mathbb{R}$. Alternativamente, podemos descrever a álgebra de Lie graduada $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1)$, da seguinte forma:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(n+1) = V \oplus \mathfrak{gl}(n) \oplus V^* \quad (0.9.8)$$

adoptando as identificações seguintes:

$$\begin{cases} \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{v} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{g}_{-1} & \mapsto & \mathbf{v} \in V \\ \begin{bmatrix} X & 0 \\ 0 & x \end{bmatrix} \in \mathfrak{g}_0 & \mapsto & X - x\text{Id}_n \in \mathfrak{gl}(n) \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \alpha & 0 \end{bmatrix} \in \mathfrak{g}_1 & \mapsto & \alpha \in V^* \end{cases} \quad (0.9.9)$$

O parêntesis de Lie é então dado por:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\alpha, \beta] = 0, \quad [\alpha, X] = \alpha X, \quad [X, \mathbf{v}] = X\mathbf{v}, \quad [X, Y] = XY - YX, \quad [\mathbf{v}, \alpha] = \mathbf{v}\alpha + \alpha\mathbf{v}\text{Id}_n \quad (0.9.10)$$

onde $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in V; X, Y \in \mathfrak{gl}(n)$ e $\alpha, \beta \in V^*$. Relativamente a bases $\{\mathbf{e}_a\}$, para V , $\{\mathbf{e}^a\}$, para V^* , e $\{\mathbf{e}_b^a\}$, para $\mathfrak{gl}(n)$, a forma de Maurer-Cartan $\omega = \omega_{PGL(n)}$ é a 1-forma invariante à esquerda, com valores em $\mathfrak{g} = V \oplus \mathfrak{gl}(V) \oplus V^*$:

$$\omega = \omega^a \mathbf{e}_a + \omega_a^b \mathbf{e}_b^a + \omega_b \mathbf{e}^b$$

cujas componentes são 1-formas usuais, invariantes à esquerda. As equações de estrutura de Maurer-Cartan são:

$$\boxed{\begin{cases} d\omega^a & = & -\omega_b^a \wedge \omega^b \\ d\omega_b^a & = & -\omega_c^a \wedge \omega_b^c - \omega^a \wedge \omega_b + \delta_b^a \omega_c \wedge \omega^c \\ d\omega_a & = & -\omega_c \wedge \omega_a^c \end{cases}} \quad (0.9.11)$$

0.10 Conexões Projectivas

Seja V um espaço vectorial real de dimensão n (com a sua estrutura afim canónica), e \tilde{V} o seu fecho projectivo, i.e.:

$$\tilde{V} = V^{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(V \times \mathbb{R})$$

Existe uma injeção canónica:

$$\begin{aligned} \iota: V &\hookrightarrow \tilde{V} = \mathbb{P}(V \times \mathbb{R}) \\ \mathbf{v} &\longmapsto [(\mathbf{v}, 1)] \end{aligned}$$

Note que a imagem $\iota(V) \subset \tilde{V}$ é o complementar do hiperplano $\mathbb{P}(V \times \{0\})$ em \tilde{V} . Este hiperplano diz-se o **hiperplano no infinito** e nota-se por V_{∞} . Neste sentido, o fecho projectivo de V é obtido “juntando” a V o hiperplano no infinito V_{∞} , isto é, adicionamos a V os pontos de V_{∞} (os pontos no infinito de V). Como $V_{\infty} = \mathbb{P}(V \times \{0\})$, vemos que V_{∞} é o conjunto das rectas vectoriais de V , isto é, o conjunto das direcções das rectas afins de V . Portanto a cada recta afim ℓ de V , juntamos um “ponto no infinito” - a sua direcção (vista como um elemento de V_{∞}).

Se fixamos uma base para $V \times \mathbb{R}$ e se v^1, \dots, v^n, v^0 representam as coordenadas homogéneas em $\tilde{V} = \mathbb{P}(V \times \mathbb{R})$, relativamente a essa base, então $y^1 = \frac{v^1}{v^0}, \dots, y^n = \frac{v^n}{v^0}$, define um sistema de coordenadas locais em torno do ponto $[(\mathbf{0}, 1)] \in \tilde{V}$, a que chamamos a “origem” de \tilde{V} .

Dada uma variedade afim A em $V \hookrightarrow \tilde{V}$, a $A_{\infty} = \tilde{A} - \iota(A)$ diz-se a parte no infinito de A . Note que $\dim V = \dim \tilde{V} = 1 + \dim V_{\infty}$. Portanto cada recta afim de V tem em \tilde{V} um ponto no infinito, cada plano afim de V tem em \tilde{V} uma recta no infinito, etc....

Uma aplicação projectiva (ou homografia) de V , é, por definição, uma homografia do fecho projectivo $\tilde{V} = V^{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(V \times \mathbb{R})$. Portanto o grupo projectivo de V , é:

$$GP(V) = PGL(V \times \mathbb{R}) = GL(V \times \mathbb{R})/\mathbb{R} - \{0\}$$

Fixemos uma base para $V \times \mathbb{R}$. Então um elemento de $GL(V \times \mathbb{R})$ será representado por uma matriz não singular:

$$g = \begin{bmatrix} X & X_0 \\ X^0 & X_0^0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_b^a & X_0^a \\ X_b^0 & X_0^0 \end{bmatrix}, \quad \text{onde } X = [X_b^a] \in GL(V), A_0 = [A_0^a] \in V, A^0 = [A_b^0] \in V^*, A_0^0 \in \mathbb{R}$$

Se $A_0^0 \neq 0$, então $A^a = \frac{X_0^a}{X_0^0}$, $A_b^a = \frac{X_b^a}{X_0^0}$, $A_b = \frac{X_b^0}{X_0^0}$, $a, b = 1, \dots, n$, constituem um sistema de coordenadas locais numa vizinhança da Id em $GP(V) = PGL(V \times \mathbb{R}) = GL(V \times \mathbb{R})/\mathbb{R} - \{0\}$, definida pela condição $X_0^0 \neq 0$. A acção de $GP(V) = PGL(V \times \mathbb{R})$ em \tilde{V} é dada, em termos das coordenadas atrás indicadas, por:

$$(A_b, A_b^a, A^a) : (y^a) \longmapsto (A_b, A_b^a, A^a) \cdot (y^a) = \frac{A^a + A_b^a y^b}{1 + A_b y^b} \quad (0.10.1)$$

Vejamus uma observação útil para futuro. Se definimos:

$$B_b^a \stackrel{\text{def}}{=} A_b^a - A^a A_b$$

então a acção (0.10.1) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned} (y^a) &\longmapsto \frac{A^a + A_b^a y^b}{1 + A_b y^b} \\ &= A^a + B_b^a y^b (1 - A_c y^c + (A_d y^d)^2 - \dots) \\ &= A^a + B_b^a y^b - \frac{1}{2} (B_b^a A_c + B_c^a A_b) y^b y^c + \text{termos de ordem mais elevada} \end{aligned} \quad (0.10.2)$$

A acção (0.10.1) é transitiva e o subgrupo de isotropia G_0 da origem $[(\mathbf{0}, 1)] \in \tilde{V}$, é:

$$G_0 = \left\{ g = \begin{bmatrix} X & 0 \\ X^0 & 1 \end{bmatrix} \right\} \subset GP(V) \quad (0.10.3)$$

Em termos das coordenadas (A^a, A_b^a, A_b) , acima referidas, G_0 é definido por $A^a = 0$.

A álgebra de Lie de $GP(V) = PGL(V \times \mathbb{R})$ é a soma directa $\mathfrak{gp}(V) = V \oplus \mathfrak{gl}(V) \oplus V^*$, munida do parêntesis de Lie seguinte:

$$[\mathbf{v}, \mathbf{w}] = [\alpha, \beta] = 0, \quad [\alpha, \xi] = \alpha\xi, \quad [\xi, \mathbf{v}] = \xi\mathbf{v}, \quad [\xi, \eta] = \xi\eta - \eta\xi, \quad [\mathbf{v}, \alpha] = \mathbf{v}\alpha + \alpha\mathbf{v}\text{Id} \quad (0.10.4)$$

A forma de Maurer-Cartan $\omega = \omega_{GP(V)}$ é a 1-forma invariante à esquerda, com valores em $\mathfrak{gp}(V) = V \oplus \mathfrak{gl}(V) \oplus V^*$:

$$\omega = (\omega^a, \omega_b^a, \omega_b)$$

cujas componentes são 1-formas usuais invariantes à esquerda, que na $\text{Id} \in GP(V)$, coincidem com dA^a, dA_b^a, dA_b . As equações de estrutura de Cartan são:

$$\boxed{\begin{cases} d\omega^a &= -\omega_b^a \wedge \omega^b \\ d\omega_b^a &= -\omega_c^a \wedge \omega_b^c - \omega^a \wedge \omega_b + \delta_b^a \omega_c \wedge \omega^c \\ d\omega_a &= -\omega_c \wedge \omega_a^c \end{cases}} \quad (0.10.5)$$

Bibliography

- [1] Akivis M.A., Goldberg V.V. “*Projective differential geometry of submanifolds.*” North-Holland, 1993.
- [2] Akivis M.A., Goldberg V.V. “*Conformal differential geometry and its generalizations.*” John Wiley and Sons, Inc., 1996.
- [3] Cartan Élie, “*La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle.*” Gauthiers-Villars, 1937.
- [4] Cartan Élie, “*La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés.*” Hermann, 1935.
- [5] Griffiths P., “On Cartan’s method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in differential geometry.” *Duke Math. Journal* 41 (1974), 775-814.
- [6] Griffiths P., Harris J., “Algebraic geometry and local differential geometry.” *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 12 (1979), 355-452.
- [7] Sharpe R.W., “*Differential geometry.*” Springer-Verlag, LNM 166, 1997.