

Método do referencial móvel de E. Cartan. Exemplos

J.N.Tavares TQFT Março 2000

Índice

1	Introdução	0
2	Equações de estrutura de E.Cartan	1
3	Equações de estrutura de alguns grupos clássicos	1
3.1	Grupo Afim $GA(n)$	1
3.2	Grupo Euclideano especial $SE(n)$	4
3.3	Grupo afim unimodular ou especial afim $SA(n)$	5
3.4	Grupo Projectivo $PGL(n)$	5
4	Referenciais segundo Cartan	7
5	Teoria de Darboux-Cartan	7
6	Alguns Exemplos	9
6.1	Geometria Euclideana regradada	9
6.2	Geometria (local) afim especial (ou unimodular) de curvas planas orientadas em \mathbb{R}^2	11
6.3	Geometria Euclideana complexa. Superfícies mínimas	14

1 Introdução

O problema que nos propomos discutir é o seguinte:

Problema... Estudar a **geometria local de subvariedades S de dimensão s em espaços homogéneos (geometrias de Klein) $M = G/H$** de dimensão n , onde G é um grupo de Lie de dimensão $r \geq n$, que actua transitivamente em M , e H é o subgrupo de isotropia de um ponto fixo $o \in M$.

O **método de Cartan** ou **método do referencial móvel** é um método que permite calcular **invariantes diferenciais** de M sob a acção de G , se possível determinando um número suficiente desses invariantes que permita decidir quando duas subvariedades de M são (localmente) **congruentes**, i.e., diferem apenas (localmente) por uma transformação de G .

Grosso modo, a ideia é a seguinte: pensando em G como um fibrado de referenciais sobre $M = G/H$, tentamos associar a S um “referencial natural”, isto é, uma secção de $G \rightarrow G/H$ sobre S . Quando isto for possível, as formas de Maurer-Cartan quando restritas a esse “referencial natural” fornecem um conjunto de G -invariantes geométricos de S , que se espera venham a caracterizar a posição de S “dentro” de M , a menos de congruência.

2 Equações de estrutura de E.Cartan

Seja G um grupo de Lie de dimensão $r = \dim G$, e $\mathfrak{g} \cong T_e G \cong \mathfrak{X}_\ell(G)$ a respectiva álgebra de Lie. A **forma de Maurer-Cartan** é, por definição, a 1-forma $\omega = \omega_G : TG \rightarrow \mathfrak{g}$, invariante à esquerda, definida por:

$$\boxed{\omega_g(v) = \ell_{g^{-1}*}(v), \quad v \in T_g G}$$

Quando H é um subgrupo de G , então $\omega_H = \omega_G|_H$.

Se $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_r\}$ é uma base para a álgebra de Lie $\mathfrak{g} \cong T_e G$, e se $\{\omega^1, \dots, \omega^r\}$ é a respectiva base dual para \mathfrak{g}^* , então podemos escrever:

$$\omega_G = \sum_a \omega^a \otimes \mathbf{X}_a \quad (2.1)$$

onde as formas ω^a são invariantes à esquerda ($\ell_g^* \omega^a = \omega^a, \forall g \in G$). Suponhamos ainda que:

$$[\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b] = \sum_c C_{ab}^c \mathbf{X}_c \quad (2.2)$$

onde C_{ab}^c são as constantes de estrutura de \mathfrak{g} . Utilizemos a fórmula $d\theta(X, Y) = X\theta(Y) + Y\theta(X) - \theta([X, Y])$, válida para qualquer 1-forma θ , quando $X = \mathbf{X}_a, Y = \mathbf{X}_b$ são campos invariantes à esquerda e quando $\theta = \omega^c$. Neste caso $\omega^c(\mathbf{X}_a)$ e $\omega^c(\mathbf{X}_b)$ são constantes e, por outro lado, $\omega^c([\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b]) = \omega^c(C_{ab}^d \mathbf{X}_d) = C_{ab}^c$. Portanto:

$$d\omega^c(\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b) = -\omega^c([\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b]) = -C_{ab}^c \quad (2.3)$$

Pondo por definição, para cada $a = 1, 2, \dots, r = \dim G$:

$$\begin{aligned} d(\omega^a \otimes \mathbf{X}_a) &= d\omega^a \otimes \mathbf{X}_a \\ [\omega^a \otimes \mathbf{X}_a, \omega^b \otimes \mathbf{X}_b] &= \omega^a \wedge \omega^b \otimes [\mathbf{X}_a, \mathbf{X}_b] \end{aligned} \quad (2.4)$$

deduzimos as chamadas **equações de estrutura de Maurer-Cartan do grupo de Lie G** :

$$\boxed{d\omega_G + \frac{1}{2} [\omega_G, \omega_G] = 0} \quad (2.5)$$

Estas equações de estrutura podem ser escritas na forma de um sistema de $r = \dim G$ equações:

$$\boxed{d\omega^c + \frac{1}{2} \sum_{ab} C_{ab}^c \omega^a \wedge \omega^b = 0, \quad c = 1, 2, \dots, r} \quad (2.6)$$

A integrabilidade deste sistema é de facto equivalente às identidades de Jacobi da álgebra de Lie \mathfrak{g} .

3 Equações de estrutura de alguns grupos clássicos

3.1 Grupo Afim $GA(n)$

Consideremos o espaço \mathbb{R}^n com a sua estrutura afim canónica. Uma **bijecção afim** $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma aplicação que é da forma:

$$g : P \mapsto a + A(P), \quad P \in \mathbb{R}^n \quad (3.1)$$

onde $A \in GL(n, \mathbb{R})$ e $a \in \mathbb{R}^n$. As bijecções afins de \mathbb{R}^n constituem um grupo $GA(n)$, que é o produto semi-directo de \mathbb{R}^n por $GL(n)$, e para o qual utilizamos a **representação homogénea** $GA(n) \hookrightarrow GL(n+1, \mathbb{R})$ seguinte:

$$g \stackrel{\text{def}}{=} (a, A) \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{bmatrix} \quad \text{com } A \in GL(n, \mathbb{R}), a \in \mathbb{R}^n \quad (3.2)$$

A álgebra de Lie $\mathfrak{ga}(n)$ pode ser identificada com a subálgebra de Lie de $\mathfrak{gl}(n+1, \mathbb{R})$ constituída pelas matrizes da forma:

$$\xi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ x & X \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} x \oplus X \quad \text{com } x \in \mathbb{R}^n, X \in \mathfrak{gl}(n) \quad (3.3)$$

O parêntesis de Lie em $\mathfrak{ga}(n)$ é dado por:

$$[x \oplus X, y \oplus Y] = (Xy - Yx) \oplus [X, Y] \quad (3.4)$$

e a representação adjunta de $GA(n)$ em $\mathfrak{ga}(n)$, por:

$$Ad_{(a,A)}(x \oplus X) = (-AXA^{-1}a + Ax) \oplus (AXA^{-1}) \quad (3.5)$$

Portanto:

$$\mathfrak{ga}(n) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n)$$

Esta soma directa é reductiva:

$$Ad_{GA(n)}\mathbb{R}^n \subseteq \mathbb{R}^n \quad (3.6)$$

De facto:

$$Ad_{(a,A)}(x \oplus 0) = Ax \oplus 0, \quad \forall (a, A) \in GA(n), \forall x \in \mathbb{R}^n \quad (3.7)$$

Calculemos agora a forma de Maurer-Cartan do grupo afim $G = GA(n)$. Pondo $g = (a, A)$ vem que:

$$\begin{aligned} \omega_G &= g^{-1}dg = (a, A)^{-1}d(a, A) \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ da & dA \end{bmatrix} \\ &= A^{-1}da \oplus A^{-1}dA \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \omega^i \oplus \omega_j^i \end{aligned} \quad (3.8)$$

que é uma 1-forma diferencial em $GA(n)$, invariante à esquerda, com valores na álgebra de Lie $\mathfrak{ga}(n) = \mathbb{R}^n \oplus \mathfrak{gl}(n)$. Com $A = (A_j^i) \in GL(n, \mathbb{R})$ e $a = (a^i) \in \mathbb{R}^n$, temos explicitamente que as componentes da forma de Maurer-Cartan são:

$$\begin{cases} \omega^i &= (A^{-1})_j^i da^j & \text{para a } \mathbb{R}^n\text{-componente} \\ \omega_j^i &= (A^{-1})_k^i dA_j^k & \text{para a } \mathfrak{gl}(n)\text{-componente} \end{cases} \quad (3.9)$$

As equações de estrutura do espaço afim \mathbb{R}^n são:

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega_G + \omega_G \wedge \omega_G \\ &= d \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \omega^i & \omega_j^i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \omega^i & \omega_j^i \end{bmatrix} \wedge \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ \omega^i & \omega_j^i \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ d\omega^i + \omega_k^i \omega^k & d\omega_j^i + \omega_k^i \omega_j^k \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

isto é:

$$\boxed{\begin{cases} d\omega^i + \omega_k^i \wedge \omega^k &= 0 \\ d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k &= 0 \end{cases}} \quad (3.11)$$

Significado geométrico (cinemático) destas equações...

Uma bijecção afim $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ fica completamente determinada pelo ponto $a = g(0) \in \mathbb{R}^n$ no qual ela transforma a origem $0 \in \mathbb{R}^n$, e pelos vectores $\mathbf{e}_1 = A(E_1), \dots, \mathbf{e}_n = A(E_n)$ nos quais a aplicação linear homogénea A , associada a g , transforma os vectores E_1, \dots, E_n da base canónica de \mathbb{R}^n . Usámos a notação matricial $\mathbf{e} = E \cdot A$.

Um **referencial afim** em \mathbb{R}^n é uma sequência da forma:

$$\mathcal{R} = (a; \mathbf{e}) = (a; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \in \mathbb{R}^n \times \underbrace{\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n}_{n \text{ factores}} \quad (3.12)$$

O conjunto de todos os referenciais afins em \mathbb{R}^n está em correspondência bijectiva com o grupo afim $GA(n)$, e é um aberto de $\mathbb{R}^{(n+1)n}$, que notamos por $\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$:

$$\iota : \begin{array}{ccc} GA(n) & \xrightarrow{\cong} & \mathcal{RA}(\mathbb{R}^n) \\ g = (a, A) & \longleftrightarrow & \mathcal{R}_g = (a; \mathbf{e} = E \cdot A) \end{array} \quad (3.13)$$

Em $\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$ estão definidas naturalmente funções (equivariantes) de classe C^∞ , com valores em \mathbb{R}^n , que são as projecções em cada um dos $(n + 1)$ factores de $\mathbb{R}^{(n+1)n}$, notadas tradicionalmente (de forma abusiva!) por:

$$\begin{aligned} a : \mathcal{R} = \{a; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{RA}(\mathbb{R}^n) &\longmapsto a(\mathcal{R}) = a \\ \mathbf{e}_1 : \mathcal{R} = \{a; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{RA}(\mathbb{R}^n) &\longmapsto \mathbf{e}_1(\mathcal{R}) = \mathbf{e}_1 \\ &\vdots \\ \mathbf{e}_n : \mathcal{R} = \{a; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathcal{RA}(\mathbb{R}^n) &\longmapsto \mathbf{e}_n(\mathcal{R}) = \mathbf{e}_n \end{aligned} \quad (3.14)$$

Podemos por isso considerar as respectivas diferenciais:

$$da; d\mathbf{e}_1, \dots, d\mathbf{e}_n \in \Omega^1(\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n); \mathbb{R}^n)$$

Se $\xi \in T_{\mathcal{R}}\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$ é um “deslocamento infinitesimal” do referencial \mathcal{R} , então $da|_{\mathcal{R}}(\xi), d\mathbf{e}_1|_{\mathcal{R}}(\xi), \dots, d\mathbf{e}_n|_{\mathcal{R}}(\xi)$ são vectores de \mathbb{R}^n que podemos escrever como combinação linear dos elementos da base $\{\mathbf{e}_1 = \mathbf{e}_1(\mathcal{R}), \dots, \mathbf{e}_n = \mathbf{e}_n(\mathcal{R})\}$ de \mathbb{R}^n :

$$\left\{ \begin{array}{l} da|_{\mathcal{R}}(\xi) = \sum_{i=1}^n \omega^i|_{\mathcal{R}}(\xi) \mathbf{e}_i(\mathcal{R}) \\ d\mathbf{e}_1|_{\mathcal{R}}(\xi) = \sum_{i=1}^n \omega_1^i|_{\mathcal{R}}(\xi) \mathbf{e}_i(\mathcal{R}) \\ \vdots \\ d\mathbf{e}_n|_{\mathcal{R}}(\xi) = \sum_{i=1}^n \omega_n^i|_{\mathcal{R}}(\xi) \mathbf{e}_i(\mathcal{R}) \end{array} \right. \quad (3.15)$$

ou mais sucintamente:

$$\boxed{\left\{ \begin{array}{l} da = \omega^i \mathbf{e}_i \\ d\mathbf{e}_j = \omega_j^i \mathbf{e}_i \quad j = 1, \dots, n \end{array} \right.} \quad (3.16)$$

onde $\{\omega^i\}_{1 \leq i \leq n}$ e $\{\omega_j^i\}_{1 \leq i, j \leq n}$ são 1-formas diferenciais usuais (escalares) em $\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$ (ao todo $n + n^2$ formas), cujo significado é claro - se $\xi \in T_{\mathcal{R}}\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$ é um “deslocamento infinitesimal” do referencial \mathcal{R} , então $(\omega^i|_{\mathcal{R}}(\xi))$ são **as componentes relativas** (ao referencial \mathcal{R}) do “deslocamento infinitesimal” $da|_{\mathcal{R}}(\xi)$ da origem do referencial \mathcal{R} , enquanto que, para cada $j = 1, \dots, n$ fixo, $(\omega_j^i|_{\mathcal{R}}(\xi))$ são **as componentes relativas** (ao referencial \mathcal{R}) do “deslocamento infinitesimal” $d\mathbf{e}_j|_{\mathcal{R}}(\xi)$ do vector \mathbf{e}_j do referencial \mathcal{R} , isto é, $\omega_j^i|_{\mathcal{R}}(\xi)$ é a componente relativa (a \mathcal{R}) do “deslocamento infinitesimal” do vector \mathbf{e}_j na direcção do vector \mathbf{e}_i .

É claro que estas formas ω^i, ω_j^i coincidem com as que atrás foram definidas em (3.9). As equações de estrutura, neste contexto, não são mais do que consequência de que $d^2a = d^2\mathbf{e}_i = 0$. De facto, derivando ambos os membros da primeira equação em (3.16) obtemos:

$$0 = dda = \sum_{i=1}^n (\mathbf{e}_i d\omega^i + d\mathbf{e}_i \wedge \omega^i)$$

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{i=1}^n \left(\mathbf{e}_i d\omega^i + \left(\sum_{j=1}^n \omega_j^i \mathbf{e}_j \right) \wedge \omega^i \right) \quad \text{atendendo a (3.16)} \\
 &= \sum_{j=1}^n \left(d\omega^j + \sum_{i=1}^n \omega_i^j \wedge \omega^i \right) \mathbf{e}_j
 \end{aligned}$$

e como os \mathbf{e}_i são linearmente independentes, deduzimos que:

$$d\omega^i + \sum_{j=1}^n \omega_j^i \wedge \omega^j = 0, \quad \forall j = 1, \dots, n \quad (3.17)$$

Anàlogamente, derivando ambos os membros da segunda equação em (3.16), deduzimos que:

$$d\omega_j^i + \sum_{k=1}^n \omega_k^i \wedge \omega_j^k = 0, \quad \forall i, j = 1, \dots, n \quad (3.18)$$

As equações (3.17) e (3.18) são exactamente as equações de estrutura obtidas em (3.11).

Vejamus como são as **equações de invariância** do espaço afim. Se $P = a + \sum_i x^i \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^n$ está fixo, então vem sucessivamente que:

$$\begin{aligned}
 0 = dP &= da + dx^i \mathbf{e}_i + x^i d\mathbf{e}_i \\
 &= \omega^i \mathbf{e}_i + dx^i \mathbf{e}_i + x^i \omega_j^i \mathbf{e}_j \quad \text{por(3.16)} \\
 &= (dx^i + \omega^i + \omega_j^i x^j) \mathbf{e}_i
 \end{aligned} \quad (3.19)$$

isto é, as **equações de invariância do espaço afim** são:

$$\boxed{dx^i = -\omega^i - \sum_j \omega_j^i x^j, \quad i = 1, \dots, n} \quad (3.20)$$

As 1-formas:

$$\vartheta^i = -\omega^i - \sum_j \omega_j^i x^j, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

definem uma distribuição integrável em $GA(n)$, cuja variedade integral que passa em $e \in G$ é exactamente a componente conexa que contem e do subgrupo de isotropia do ponto $p = (x^i)$.

Nota... Do ponto de vista da teoria de fibrados principais, a aplicação:

$$a : \mathcal{RA}(\mathbb{R}^n) \cong GA(n) \longrightarrow \mathbb{R}^n$$

dá origem ao fibrado principal $GA(n) \rightarrow \mathbb{R}^n = GA(n)/GL(n)$, com grupo de estrutura $GL(n)$. Neste contexto, a 1-forma $\omega = (\omega^i)$, definida em $\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$ e com valores em \mathbb{R}^n , é a chamada **forma canónica (ou forma de soldagem)** do fibrado de referenciais $\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$, enquanto que a 1-forma $w = (\omega_j^i)$, definida em $\mathcal{RA}(\mathbb{R}^n)$ e com valores em $\mathfrak{gl}(n)$ é a chamada **forma de conexão**. A equação de estrutura (3.17) diz que esta conexão tem torção nula, enquanto que a segunda equação de estrutura (3.18) diz que esta conexão tem curvatura nula.

3.2 Grupo Euclidiano especial $SE(n)$

Os movimentos rígidos de \mathbb{E}^n constituem um grupo $SE(n)$, chamado o **grupo Euclidiano especial** de \mathbb{E}^n , que pode ser identificado com o subgrupo de $SL(n+1, \mathbb{R})$ constituído pelas matrizes da forma:

$$g \stackrel{\text{def}}{=} (a, R) \cong \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & R \end{bmatrix} \quad \text{com } R \in SO(n), a \in \mathbb{R}^n \quad (3.22)$$

As equações de estrutura do espaço Euclideano \mathbb{E}^n :

$$\boxed{\begin{cases} d\omega^i + \omega_k^i \wedge \omega^k = 0 \\ d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = 0 \\ \omega_j^i + \omega_i^j = 0 \end{cases}} \quad (3.23)$$

3.3 Grupo afim unimodular ou especial afim $SA(n)$

Grupo especial afim (ou afim unimodular) de \mathbb{R}^n - pode ser identificado com o subgrupo de $SL(n+1, \mathbb{R})$ constituído pelas matrizes da forma:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & A \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} (a, A) \quad \text{com} \quad A \in GL(n, \mathbb{R}), \det A = 1, \quad a \in \mathbb{R}^n \quad (3.24)$$

O conjunto $\mathcal{RE}(\mathbb{R}^n)$ de todos os referenciais afins especiais (ou unimodulares) em \mathbb{R}^n está em correspondência bijectiva com grupo especial afim $SA(n)$:

$$\begin{aligned} \iota: SA(n) &\longrightarrow \mathcal{RE}(\mathbb{R}^n) \\ g = (a, A) &\longmapsto \mathcal{R}_g = (a; \mathbf{e} = E \cdot A) \end{aligned} \quad (3.25)$$

onde \mathbf{e} é uma base unimodular de \mathbb{R}^n (i.e., $\det \mathbf{e} = 1$). As componentes relativas de um deslocamento infinitesimal de um referencial $\mathcal{R}_g = (a; \mathbf{e})$ são dadas por:

$$\begin{cases} da = \sum_{i=1}^n \omega^i \mathbf{e}_i \\ d\mathbf{e}_j = \sum_{i=1}^n \omega_j^i \mathbf{e}_i \quad j = 1, \dots, n \end{cases} \quad (3.26)$$

As equações de estrutura são:

$$\boxed{\begin{cases} d\omega^i + \omega_k^i \wedge \omega^k = 0 \\ d\omega_j^i + \omega_k^i \wedge \omega_j^k = 0 \\ \sum_i \omega_i^i = 0 \end{cases}} \quad (3.27)$$

3.4 Grupo Projectivo $PGL(n)$

O espaço projectivo real $\mathbb{RP}(n)$ de dimensão n , define-se por:

$$\mathbb{RP}(n) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \ell : \ell \text{ é subespaço de dimensão 1 em } \mathbb{R}^{n+1} \} \quad (3.28)$$

Definamos a aplicação natural:

$$\begin{aligned} \pi: \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\} &\longrightarrow \mathbb{RP}(n) \\ x &\longmapsto \pi(x) = [x] = \mathbb{R} \cdot x \end{aligned}$$

Se $\mathbf{e} = \{\mathbf{e}_i\}_{i=1, \dots, n+1}$ é uma base de \mathbb{R}^{n+1} e se $x = x^i \mathbf{e}_i \in \mathbb{R}^{n+1} - \{\mathbf{0}\}$, então (x^0, \dots, x^n) dizem-se as coordenadas homogéneas de $[x]$, relativamente à base \mathbf{e} , e escrevemos:

$$\pi(x) = [x^i \mathbf{e}_i] = [x^0, x^1, \dots, x^n]$$

Se $A \in GL(n+1, \mathbb{R})$ é um isomorfismo linear de \mathbb{R}^{n+1} , então, como A envia rectas em rectas (vectoriais), A induz uma aplicação $\mathbb{P}(A) : \mathbb{R}\mathbb{P}(n) \rightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}(n)$, que é evidentemente um difeomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(A) : \mathbb{R}\mathbb{P}(n) &\longrightarrow \mathbb{R}\mathbb{P}(n) \\ [x] &\longmapsto \mathbb{P}(A)([x]) = [Ax] \end{aligned}$$

O conjunto de todos os difeomorfismos de $\mathbb{R}\mathbb{P}(n)$ deste tipo constitui um grupo de Lie, notado por $PGL(n)$ e que se diz o **grupo projectivo** ou **grupo das homografias** de $\mathbb{R}\mathbb{P}(n)$. De facto $PGL(n)$ é o quociente de $GL(n)$ pelo seu centro $\cong \mathbb{R} - \{0\}$.

Um conjunto de $n+2$ pontos $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_{n+1}\}$ em $\mathbb{R}\mathbb{P}(n)$ diz-se um **referencial projectivo** de $\mathbb{R}\mathbb{P}(n)$ se existir uma base $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de \mathbb{R}^{n+1} tal que $P_i = \pi(\mathbf{e}_i)$, $i = 0, 1, \dots, n$ e $P_{n+1} = \pi(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n)$. P_0, P_1, \dots, P_n dizem-se os **vértices** e P_{n+1} o **ponto unidade** do referencial \mathcal{R} .

Alguns factos:

- Se $\mathcal{R} = \{P_0, P_1, \dots, P_{n+1}\}$ e $\mathcal{R}' = \{P'_0, P'_1, \dots, P'_{n+1}\}$ são dois referenciais projectivos em $\mathbb{R}\mathbb{P}(n)$, existe **uma única** transformação projectiva $g \in PGL(n)$ tal que $g(P_i) = P'_i$, $i = 0, 1, \dots, n+1$. Portanto temos mais uma vez uma correspondência biunívoca:

$$\begin{aligned} \iota : PGL(n) &\longleftrightarrow \mathcal{RP}(\mathbb{R}\mathbb{P}(n)) \\ g &\longleftrightarrow \mathcal{R}_g = g \cdot \mathcal{R}_0 \end{aligned}$$

onde $\mathcal{R}_0 = \{P_0, P_1, \dots, P_{n+1}\}$ é o referencial absoluto de $\mathbb{R}\mathbb{P}(n)$.

- Duas bases de \mathbb{R}^{n+1} , $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e $\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\}$, que sejam determinadas pelos $n+1$ primeiros pontos:

$$P_i = \pi(\mathbf{e}_i) = \pi(\mathbf{e}'_i), \quad i = 0, 1, \dots, n$$

e que atribuam ao último ponto P_{n+1} as coordenadas homogéneas $[1, 1, \dots, 1]$:

$$P_{n+1} = \pi(\mathbf{e}_0 + \mathbf{e}_1 + \dots + \mathbf{e}_n) = \pi(\mathbf{e}'_0 + \mathbf{e}'_1 + \dots + \mathbf{e}'_n)$$

são necessàriamente proporcionais:

$$\{\mathbf{e}'_0, \mathbf{e}'_1, \dots, \mathbf{e}'_n\} = \{\lambda \mathbf{e}_0, \lambda \mathbf{e}_1, \dots, \lambda \mathbf{e}_n\}$$

para algum $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$.

- Como:

$$\det(\lambda \mathbf{e}_0, \lambda \mathbf{e}_1, \dots, \lambda \mathbf{e}_n) = \lambda^{n+1} \det(\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)$$

podemos concluir que:

- Se n fôr par, $PGL(n) \cong SL(n+1)$.
- Se n fôr ímpar, $PGL(n) \cong SL(n+1)/\{\pm \text{Id}\}$
- em qualquer dos casos, a componente conexa de $PGL(n)$ que contem a identidade é isomorfa a $SL(n+1)$.

Portanto um referencial projectivo em $\mathbb{R}\mathbb{P}(n)$ pode ser visto como uma matriz:

$$\mathcal{R} = [\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n]$$

onde $\{\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é uma base unimodular de \mathbb{R}^{n+1} (mod ± 1 se n fôr ímpar). Definindo, como no exemplo 3.1, funções:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_i : \mathcal{RP}(\mathbb{R}\mathbb{P}(n)) &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ \mathcal{R} = [\mathbf{e}_0, \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n] &\longmapsto \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (3.29)$$

para $i = 0, 1, \dots, n$, podemos escrever para as componentes relativas de um deslocamento infinitesimal de \mathcal{R} :

$$d\mathbf{e}_i = \omega_i^j \mathbf{e}_j \quad \text{com} \quad \sum_i \omega_i^i = 0 \quad (3.30)$$

e as equações de estrutura deduzem-se como antes:

$$0 = d^2 \mathbf{e}_i \quad (3.31)$$

$$= d\omega_i^j \mathbf{e}_j + \omega_i^j \wedge d\mathbf{e}_j \quad (3.32)$$

$$= d\omega_i^k \mathbf{e}_k + \omega_i^j \wedge (\omega_j^k \mathbf{e}_k) \quad (3.33)$$

$$= (d\omega_i^k + \omega_i^j \wedge \omega_j^k) \mathbf{e}_k$$

Isto é, temos as seguintes **equações de estrutura do grupo projectivo** $PGL(n)$:

$$\boxed{d\omega_i^k = \omega_j^k \wedge \omega_i^j \quad \text{com} \quad \sum_i \omega_i^i = 0} \quad (3.34)$$

4 Referenciais segundo Cartan

De acordo com E. Cartan ([4], pag.16), um **sistema de referenciais** para uma **geometria de Klein** $M = G/H$, é um conjunto de “figuras” $\mathcal{R}(M) = \{\mathcal{R}_g : g \in G\}$ em M que está em correspondência bijectiva com os elementos do grupo G :

$$\mathcal{R}_g \longleftrightarrow g$$

Se pudermos encontrar uma figura particular \mathcal{R}_0 , tal que toda a transformação $\Phi_g (\neq \text{Id})$ transforme \mathcal{R}_0 numa figura distinta $\mathcal{R}_g = g \cdot \mathcal{R}_0$, então a família:

$$\mathcal{R}(M) = \{\mathcal{R}_g = g \cdot \mathcal{R}_0 : g \in G\}$$

constitui um sistema de referenciais, a que chamamos o **sistema de G -referenciais do espaço homogéneo** $M = G/H$ (deduzido do referencial fixo (absoluto) \mathcal{R}_0). Por exemplo, quando G actua simplesmente transitivamente em M , então os pontos de M constituem um sistema de G -referenciais de M (considere por exemplo a acção de G em si próprio por multiplicações à esquerda ℓ_g).

Munimos $\mathcal{R}(M)$ de estrutura de variedade diferenciável de tal forma que a correspondência $\mathcal{R}_g \longleftrightarrow g$, seja um difeomorfismo. A acção de G em M , induz então uma acção de G no conjunto dos referenciais $\mathcal{R}(M)$:

$$G \longrightarrow \text{Diff}(\mathcal{R}(M)), \quad g \mapsto (L_g : \mathcal{R}_{g'} \mapsto \mathcal{R}_{gg'}) \quad (4.1)$$

É claro que, do ponto de vista formal, podemos identificar o conjunto $\mathcal{R}(M)$, com o conjunto dos elementos do grupo G , obtendo desta forma uma descrição abstracta de um sistema de G -referenciais do espaço homogéneo $M = G/H$. Usaremos por isso sistematicamente a identificação:

$$\begin{aligned} G &\longleftrightarrow \mathcal{R}(M) \\ g &\longleftrightarrow \mathcal{R}_g \end{aligned} \quad (4.2)$$

5 Teoria de Darboux-Cartan

Os teoremas seguintes são fundamentais para a justificação teórica do método do referencial móvel de E. Cartan (demonstrações em [7], por exemplo).

Teorema 1 ... *Seja S uma variedade conexa, G um grupo de Lie e $F, \widehat{F} : S \rightarrow G$ duas aplicações C^∞ . Então existe um elemento $g \in G$ tal que:*

$$\boxed{F(u) = g \cdot \widehat{F}(u), \forall u \in S \quad \text{se e só se} \quad F^* \omega_G = \widehat{F}^* \omega_G} \quad (5.1)$$

(g não depende de u , nesta fórmula).

Notas... (i). Se $F : S \rightarrow G$ é uma aplicação C^∞ , à 1-forma diferencial:

$$F^* \omega_G = \omega_G \circ F_* : TS \longrightarrow \mathfrak{g} \quad (5.2)$$

chama-se a **diferencial de Darboux de F** , e nota-se por $\mathcal{D}F$. O teorema afirma portanto que a diferencial de Darboux de $F : S \rightarrow G$, determina F a menos de multiplicação á esquerda por um elemento fixo $g \in G$.

(ii). Formulação de Cartan ([4], pag. 32, ou [3], pag. 88): **Teorema fundamental de igualdade...** “Suponhamos que temos duas famílias contínuas de referenciais $\{R_u\}$ e $\{\widehat{R}_u\}$, que dependem do mesmo número de parâmetros $u = (u^1, \dots, u^p)$. Então existe um deslocamento que faz coincidir simultâneamente todos os referenciais da primeira família com os referenciais correspondentes da segunda família, se e só se fôr possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre os referenciais das duas famílias, tal que as componentes relativas $\omega^i(u; du)$ do deslocamento infinitesimal de um referencial da primeira família se torne igual às componentes análogas $\widehat{\omega}^i(u; du)$ relativas à segunda família”.

Tomando $S = G$ podemos deduzir o corolário seguinte:

Corolário 1 ... Seja G um grupo de Lie conexo e $F : G \rightarrow G$ um difeomorfismo. Então $F = \ell_g$ para algum $g \in G$, se e só se F preserva a forma de Maurer-Cartan:

$$F = \ell_g \quad \text{se e só se} \quad F^* \omega_G = \omega_G \quad (5.3)$$

Como poderemos caracterizar as 1-formas diferenciais com valores em \mathfrak{g} :

$$\omega : TS \longrightarrow \mathfrak{g}$$

que são derivadas de Darboux de alguma aplicação $F : S \rightarrow G$? O teorema anterior diz-nos que se isso acontece:

$$\omega = \mathcal{D}F = F^* \omega_G$$

então ω deverá satisfazer a equação de estrutura seguinte:

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0$$

uma vez que ω_G satisfaz a equação de Maurer-Cartan e $F^*d = dF^*$. Esta condição necessária é de facto também suficiente, pelo menos localmente. Portanto é sempre possível construir (localmente) uma aplicação $F : S \rightarrow G$ da qual se conhece a respectiva diferencial de Darboux:

Teorema 2 ... Seja G um grupo de Lie e \mathfrak{g} a respectiva álgebra de Lie. Seja S uma variedade e $\omega : TS \rightarrow \mathfrak{g}$ uma 1-forma em S , com valores em \mathfrak{g} . Então, para cada ponto $u \in S$, existe uma vizinhança U de u e uma aplicação C^∞ , $F : U \subseteq S \rightarrow G$ tal que:

$$\omega|_U = \mathcal{D}F = F^* \omega_G$$

se e só se ω satisfaz a equação de estrutura seguinte:

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega, \omega] = 0 \quad (5.4)$$

Nota... Formulação de Cartan ([4], pag. 37, ou [3], pag. 191) ... “Sejam $\omega^i(u; du)$, $i = 1, \dots, r$, 1-formas diferenciais construídas com um número qualquer de variáveis u^1, \dots, u^p e suas diferenciais du^1, \dots, du^p , e suponhamos que essas formas satisfazem as equações de estrutura (5.4). Então é possível construir, para cada $u = (u^1, \dots, u^p)$, um referencial R_u cujas componentes relativas do respectivo deslocamento infinitesimal são precisamente as formas ω^i dadas”.

Exemplo familiar

Consideremos uma parametrização natural $f : s \in I \subseteq \mathbb{R} \mapsto f(s) \in \mathbb{R}^3$, de uma curva regular em \mathbb{R}^3 , de classe C^m ($m \geq 3$), sem pontos de inflexão, e seja:

$$\begin{aligned} F : I &\longrightarrow SE(3) = \mathcal{RO}^+(\mathbb{R}^3) \\ s &\longmapsto F(s) = \{f(s); \mathbf{t}(s), \mathbf{n}(s), \mathbf{b}(s)\} \end{aligned} \quad (5.5)$$

o respectivo triedro de Frenet. Fazendo o pull-back $F^* \omega_{SE(3)}$ das formas de Maurer-Cartan do grupo $SE(3)$, obtemos as equações de Frenet usuais:

$$\begin{cases} df = ds \mathbf{t} \\ dt = k(s) ds \mathbf{n} \\ d\mathbf{n} = -k(s) ds \mathbf{t} - \tau(s) ds \mathbf{b} \\ d\mathbf{b} = \tau(s) ds \mathbf{n} \end{cases} \quad (5.6)$$

e os teoremas anteriores não são mais do que o:

Teorema 3 (Teorema fundamental da teoria local das curvas orientadas em \mathbb{R}^3) ... Dadas funções diferenciáveis $k(s) > 0$ e $\tau(s)$, $s \in \mathbf{I}$, existe uma curva parametrizada regular $f : \mathbf{I} \rightarrow \mathbb{R}^3$, tal que s é o parâmetro comprimento de arco, $k(s)$ é a curvatura e $\tau(s)$ a torção de f . Além disso, qualquer outra curva \bar{f} , que satisfaz as mesmas condições, difere de f por um movimento rígido em \mathbb{R}^3 .

6 Alguns Exemplos

6.1 Geometria Euclideana regradada

Consideremos o conjunto:

$$\begin{aligned} M &= \{ \text{rectas afins orientadas } \ell \text{ em } \mathbb{R}^3 \} \\ &= \{ (\mathbf{u}, \mathbf{p}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 : \|\mathbf{u}\| = 1 \text{ e } \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} = 0 \} \end{aligned} \quad (6.1)$$

O grupo $SE(3)$ actua em M da seguinte forma:

$$(a, R) \cdot \ell = (a, R) \cdot (\mathbf{u}, \mathbf{p}) = (R\mathbf{u}, a + R\mathbf{p} - (a \cdot R\mathbf{u})R\mathbf{u}) \quad (6.2)$$

Esta acção é transitiva, e o subgrupo de isotropia da recta $\ell_o = \{t\mathbf{e}_1, t \in \mathbb{R}\} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{0})$ é:

$$H = \{(\rho\mathbf{e}_1, R), \rho \in \mathbb{R}, R \in SO(2)\}$$

onde $SO(2)$ é o subgrupo de $SO(3)$, constituído pelas rotações que deixam a recta ℓ_o fixa. Note que $\dim H = 2$ e que a álgebra de Lie de H é definida por:

$$\mathfrak{h} = \{(\omega^i \oplus \omega_j^i) \in \mathfrak{se}(3) : \omega^2 = \omega^3 = \omega_1^2 = \omega_1^3 = 0\} \quad (6.3)$$

(recorde que $\omega_j^i = d\mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i$). As equações $\omega^2 = \omega^3 = \omega_1^2 = \omega_1^3 = 0$, que formam um sistema completamente integrável, podem ser consideradas como as “equações diferenciais das rectas orientadas de \mathbb{R}^3 ” (1).

Uma **superfície regradada em \mathbb{R}^3** é uma curva em M : $t \in I \mapsto \ell(t)$.

Referenciais de ordem 0 “por cima” de $\ell = (\mathbf{u}, \mathbf{p}) \in M$: são os referenciais afins $(a; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, de \mathbb{R}^3 , tais que $a \in \ell$ e $\mathbf{e}_1 = \mathbf{u}$. A família de referenciais de ordem 0 depende de 3 parâmetros - um **parâmetro**

¹este sistema desempenha exactamente o mesmo papel que o desempenhado pelo sistema $\omega^1 = \omega^2 = \omega^3 = 0$, em geometria afim. Nese caso, estas são as equações diferenciais dos pontos de \mathbb{R}^3 .

principal t , de que depende a geratriz da superfície regradada, e dois **parâmetros secundários** ρ e θ . Formam um fibrado principal sobre I , cujo grupo de gauge é $H \subset SE(3)$.

Quando um referencial de ordem 0, $(a; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, varia, permanecendo sempre de ordem 0 (a permanecendo sempre sobre uma mesma geratriz e o \mathbf{e}_1 sempre na direção dessa geratriz), vemos que da será paralelo a \mathbf{e}_1 , enquanto que $d\mathbf{e}_1$ será nulo. Portanto as respectivas componentes relativas satisfazem:

$$\omega^2 = \omega^3 = \omega_1^2 = \omega_1^3 = 0 \quad (6.4)$$

o que significa que as chamadas **componentes principais de ordem 0** são:

$$\boxed{\omega^2, \omega^3, \omega_1^2, \omega_1^3} \quad (6.5)$$

Isto é, são formas semi-básicas ou horizontais ($\omega^2 = A^2(t; \rho, \theta) dt, \dots$). Vejamos como é que estas componentes dependem dos parâmetros secundários ρ e θ .

Comparação de dois referenciais de ordem 0: $(a; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ e $(a; \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3)$:

$$\begin{cases} a &= b + \rho \tilde{\mathbf{e}}_1 & (\text{isto é } \vec{ab} = \rho \tilde{\mathbf{e}}_1) \\ \mathbf{e}_1 &= \tilde{\mathbf{e}}_1 \\ \mathbf{e}_2 &= \tilde{\mathbf{e}}_2 \cos \theta + \tilde{\mathbf{e}}_3 \sin \theta \\ \mathbf{e}_3 &= -\tilde{\mathbf{e}}_2 \sin \theta + \tilde{\mathbf{e}}_3 \cos \theta \end{cases} \quad (6.6)$$

onde ρ e θ são parâmetros arbitrários. A família de referenciais de ordem 0 depende pois de 3 parâmetros - um **parâmetro principal** t , de que depende a geratriz da superfície regradada, e dois **parâmetros secundários** ρ e θ .

Comparação das componentes relativas ω e $\tilde{\omega}$, dos deslocamentos infinitesimais de dois referenciais de ordem 0:

$$\begin{aligned} \omega^1 &= \mathbf{e}_1 \cdot da = \tilde{\mathbf{e}}_1 \cdot (db + d\rho \tilde{\mathbf{e}}_1 + \rho d\tilde{\mathbf{e}}_1) = \tilde{\omega}^1 + d\rho \\ \omega^2 &= \mathbf{e}_2 \cdot da = (\tilde{\mathbf{e}}_2 \cos \theta + \tilde{\mathbf{e}}_3 \sin \theta) \cdot (db + d\rho \tilde{\mathbf{e}}_1 + \rho d\tilde{\mathbf{e}}_1) \\ &= (\tilde{\omega}^2 \cos \theta + \tilde{\omega}^3 \sin \theta) + \rho (\tilde{\omega}_1^2 \cos \theta + \tilde{\omega}_1^3 \sin \theta) \\ \omega^3 &= \mathbf{e}_3 \cdot da = (-\tilde{\mathbf{e}}_2 \sin \theta + \tilde{\mathbf{e}}_3 \cos \theta) \cdot (db + d\rho \tilde{\mathbf{e}}_1 + \rho d\tilde{\mathbf{e}}_1) \\ &= (-\tilde{\omega}^2 \sin \theta + \tilde{\omega}^3 \cos \theta) + \rho (-\tilde{\omega}_1^2 \sin \theta + \tilde{\omega}_1^3 \cos \theta) \\ &\vdots \end{aligned}$$

A dependência das componentes principais de ordem 0, relativamente aos parâmetros secundários ρ e θ é portanto:

$$\begin{cases} \omega^2 &= (\tilde{\omega}^2 \cos \theta + \tilde{\omega}^3 \sin \theta) + \rho (\tilde{\omega}_1^2 \cos \theta + \tilde{\omega}_1^3 \sin \theta) \\ \omega^3 &= (-\tilde{\omega}^2 \sin \theta + \tilde{\omega}^3 \cos \theta) + \rho (-\tilde{\omega}_1^2 \sin \theta + \tilde{\omega}_1^3 \cos \theta) \\ \omega_1^2 &= \tilde{\omega}_1^2 \cos \theta + \tilde{\omega}_1^3 \sin \theta \\ \omega_1^3 &= -\tilde{\omega}_1^2 \sin \theta + \tilde{\omega}_1^3 \cos \theta \end{cases} \quad (6.7)$$

Referenciais de ordem 1... Podemos então dispôr dos parâmetros secundários ρ e θ de tal forma a que ω_1^3 e ω^2 sejam sempre nulas. Os referenciais que satisfazem essa condição dizem-se de ordem 1.

Fórmulas de Frenet... Pondo agora:

$$\omega_1^2 = d\sigma \quad \text{e} \quad \omega^3 = k d\sigma \quad (6.8)$$

e ainda:

$$\omega_2^3 = \beta d\sigma \quad \text{e} \quad \omega^1 = \alpha d\sigma \quad (6.9)$$

as fórmulas de Frenet são:

$$\begin{cases} da &= d\sigma (\alpha \mathbf{e}_1 + k \mathbf{e}_3) \\ d\mathbf{e}_1 &= d\sigma \mathbf{e}_2 \\ d\mathbf{e}_2 &= d\sigma (-\mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_3) \\ d\mathbf{e}_3 &= d\sigma (-\beta \mathbf{e}_2) \end{cases} \quad (6.10)$$

Uso das equações de estrutura

Suponhamos ainda que $f : I \subseteq \mathbb{R} \rightarrow M$ é uma superfície regrada em \mathbb{R}^3 .

Seja $\mathcal{R}_f^{(0)}$ o fibrado de referenciais de ordem 0 ao longo de f . Os pull-backs das formas $\omega^2, \omega^3, \omega_1^2, \omega_1^3$ a $\mathcal{R}_f^{(0)}$, notadas pelos mesmos símbolos, são as **componentes principais de ordem 0** - são formas semi-básicas ou horizontais, toda combinação linear da forma dt (não contém as diferenciais $d\rho$ e $d\theta$ dos parâmetros secundários). Logo existem 3 relações lineares entre elas. Se ω_1^2, ω_1^3 fossem ambas nulas, a superfície regrada f seria um cilindro. Suponhamos então que, por exemplo, $\omega_1^2 \neq 0$. Podemos então pôr:

$$\omega^2 = A \omega_1^2, \quad \omega^3 = B \omega_1^2, \quad \omega_1^3 = C \omega_1^2 \quad (6.11)$$

Quanto aos pull-backs das formas ω^1, ω_2^3 a $\mathcal{R}_f^{(0)}$, as respectivas componentes verticais:

$$\pi^1 = \{\omega^1\}_{\{\omega^2=\omega^3=\omega_1^2=\omega_1^3=0\}} \quad \text{e} \quad \pi_2^3 = \{\omega_2^3\}_{\{\omega^2=\omega^3=\omega_1^2=\omega_1^3=0\}}$$

chamam-se as **componentes secundárias de ordem 0**.

Derivando a última das equações (6.11), e entrando com as equações de estrutura de $SE(3)$, obtemos:

$$\begin{cases} [dA - (AC - B)\omega_2^3 - \omega^1] \wedge \omega_1^2 = 0 \\ [dB - C\omega^1 - (A + BC)\omega_2^3] \wedge \omega_1^2 = 0 \\ [dC + (1 + C^2)\omega_2^3] \wedge \omega_1^2 = 0 \end{cases} \quad (6.12)$$

A componente vertical da última equação dá:

$$\delta C + (1 + C^2) \pi_2^3 = 0 \quad \Rightarrow \quad X_3^2 = (1 + C^2) \frac{\partial}{\partial C} \quad (6.13)$$

Portanto, ou $1 + C^2 = 0$ ou $1 + C^2 \neq 0$. Neste último caso, podemos variar o parâmetro secundário de tal forma a que $C = 0$. Virá então de (6.12):

$$\begin{cases} [dA + B\omega_2^3 - \omega^1] \wedge \omega_1^2 = 0 \\ [dB - A\omega_2^3] \wedge \omega_1^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \delta A + B\pi_2^3 - \pi^1 = 0 \\ \delta B - A\pi_2^3 = 0 \end{cases} \quad (6.14)$$

Os geradores infinitesimais em $\mathbb{R}_{A,B}^2$ são pois $X_3^2 = B \frac{\partial}{\partial A} - A \frac{\partial}{\partial B}$ e $X_1 = -\frac{\partial}{\partial A}$. Podemos pois escolher os parâmetros secundários de tal forma que $A = B = 0$, e assim fixar o triedro de Frenet (de ordem 1). Pondo $\omega_1^2 = d\sigma$ e:

$$\omega^1 = \alpha d\sigma, \quad \omega_2^3 = \beta d\sigma, \quad \omega^3 = k d\sigma$$

(e $\omega^2 = \omega_1^3 = 0$), obtemos as fórmulas de Frenet:

$$\begin{cases} da = d\sigma (\alpha \mathbf{e}_1 + k \mathbf{e}_3) \\ d\mathbf{e}_1 = d\sigma \mathbf{e}_2 \\ d\mathbf{e}_2 = d\sigma (-\mathbf{e}_1 + \beta \mathbf{e}_3) \\ d\mathbf{e}_3 = d\sigma (-\beta \mathbf{e}_2) \end{cases} \quad (6.15)$$

6.2 Geometria (local) afim especial (ou unimodular) de curvas planas orientadas em \mathbb{R}^2

As componentes relativas de um deslocamento infinitesimal de um referencial afim especial (ou unimodular) em \mathbb{R}^2 :

$$\mathcal{R}_g \cong g = (a; \mathbf{e} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2] = E \cdot A) \quad (6.16)$$

onde $g = (a, A) \in SA(2)$, são dadas por:

$$\begin{cases} da = \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 \\ d\mathbf{e}_1 = \omega_1^1 \mathbf{e}_1 + \omega_1^2 \mathbf{e}_2 \\ d\mathbf{e}_2 = \omega_2^1 \mathbf{e}_1 + \omega_2^2 \mathbf{e}_2 \end{cases} \quad \text{onde } \omega_1^1 + \omega_2^2 = 0 \quad (6.17)$$

As equações de estrutura são:

$$\begin{cases} d\omega^1 &= \omega^1 \wedge \omega_1^1 + \omega^2 \wedge \omega_2^1 \\ d\omega^2 &= \omega^1 \wedge \omega_1^2 - \omega^2 \wedge \omega_2^1 \\ d\omega_1^1 &= \omega_1^2 \wedge \omega_2^1 \\ d\omega_1^2 &= 2\omega_1^1 \wedge \omega_2^1 \\ d\omega_2^1 &= -2\omega_1^1 \wedge \omega_2^1 \end{cases} \quad (6.18)$$

Consideremos agora uma curva:

$$\begin{aligned} f : I \subset \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ t &\longmapsto f(t) = (x(t), y(t)) \end{aligned} \quad (6.19)$$

definida num intervalo aberto $I \subset \mathbb{R}$.

Fibrado de referenciais de ordem 0:

$$\mathcal{R}_f^{(0)} = \{(f(t); \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) : \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\} \text{ é uma base de } \mathbb{R}^3, \text{ tal que } \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2) = 1\}$$

Um referencial especial $g = (f(t); \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$, de ordem 0, depende de um parâmetro primário t e de 3 parâmetros secundários (ou de gauge) α^i que definem o referencial especial $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$.

$\mathcal{R}_f^{(0)}$ é um fibrado principal sobre I com grupo de estrutura $H = Sp(2)$ constituído pelas matrizes reais 2×2 de det 1 (tem dimensão 3). As fibras são as variedades integrais do sistema de Pfaff completamente integrável $\omega^1 = \omega^2 = 0$.

Façamos o pull-back das formas $\{\omega^i, \omega_j^i\}$ a $\mathcal{R}_f^{(0)}$, que representamos pelos mesmos símbolos. Como ω^1, ω^2 são semi-básicas e não ambas nulas, deveremos ter uma relação linear do tipo:

$$\omega^2 = A \omega^1, \quad A \in C^\infty(\mathcal{R}_f^{(0)}) \quad (6.20)$$

onde A depende de t e dos 3 parâmetros secundários. Portanto $T\mathcal{R}_f^{(0)} \subset SA(2)$ é definido pela equação $\omega^2 - A \omega^1 = 0$, e $\dim \mathcal{R}_f^{(0)} = 4$.

Fibrado de referenciais de ordem 1:

Podemos já supôr que $A = 0$, i.e., que \mathbf{e}_1 tem a direcção da recta tangente à curva, definindo desta forma os os referenciais de ordem 1. Como $\omega^2 = 0$, vem por (6.18), que:

$$0 = d\omega^2 = \omega^1 \wedge \omega_1^2 \quad \Rightarrow \quad \omega_1^2 = B \omega^1 \quad (6.21)$$

Portanto $T\mathcal{R}_f^{(1)} \subset SA(2)$ é definido pelas equações $\omega^2 = 0$ e $\omega_1^2 - B \omega^1 = 0$, i.e., $\dim \mathcal{R}_f^{(1)} = 3$. O grupo de gauge G_1 , de ordem 1, é o subgrupo de $SA(2)$ que deixa uma recta fixa, e tem dimensão 2. Existem pois 2 parâmetros secundários de ordem 1, e como $\pi_1^2 = 0$, as formas π_1^1 e π_2^1 formam um co-referencial vertical para $\mathcal{R}_f^{(1)} \rightarrow I$.

Derivando agora (6.21): $\omega_1^2 = B \omega^1$ e atendendo novamente às equações de estrutura, vem que:

$$\begin{aligned} 2\omega_1^1 \wedge B \omega^1 &= \\ 2\omega_1^1 \wedge \omega_1^2 &= \\ &= d\omega_1^2 \\ &= dB \wedge \omega^1 + B d\omega^1 \\ &= dB \wedge \omega^1 + B \omega^1 \wedge \omega_1^1 \end{aligned} \quad (6.22)$$

donde se deduz que:

$$\omega^1 \wedge (dB - 3B \omega_1^1) = 0 \quad \Rightarrow \quad dB - 3B \omega_1^1 = -3C \omega^1 \quad (6.23)$$

e para a derivada vertical:

$$\boxed{\delta B - 3B \pi_1^1 = 0} \quad (6.24)$$

- Se $B = 0$, então $\omega_1^2 = 0$ e de (6.17) viria que $d\mathbf{e}_1 = \omega_1^1 \mathbf{e}_1$, isto é, \mathbf{e}_1 mantém uma direção fixa, e a curva é uma recta. A redução não pode continuar.
- Se $B \neq 0$, podemos definir os referenciais de ordem 2, tomando $B = 1$ (orientando a curva), e portanto $\pi_1^1 = 0$.

Fibrado de referenciais de ordem 2:

Existe agora apenas uma componente principal de ordem 1, que é $\omega_1^2 = \omega^1$, e os referenciais de ordem 2 dependem apenas de 1 parâmetro secundário. $T\mathcal{R}_f^{(2)} \subset SA(2)$ é definido pelas equações $\omega^2 = 0$, $\omega_1^2 - \omega^1 = 0$ e $\omega_1^1 - C\omega^1 = 0$, i.e., $\dim \mathcal{R}_f^{(1)} = 2$. O grupo de gauge G_2 , de ordem 2 tem dimensão 1. Existe pois 1 parâmetro secundário de ordem 2, e como $\pi_1^2 = 0 = \pi_1^1$, a forma π_2^1 é um co-referencial vertical para $\mathcal{R}_f^{(2)} \rightarrow I$.

Como $B = 1$, então (6.23) é $\omega_1^1 = C\omega^1$, e portanto:

$$d\omega^1 = \omega^1 \wedge \omega_1^1 + \omega^2 \wedge \omega_2^1 = 0 \tag{6.25}$$

o que significa que ω^1 é fechada, logo exacta, e podemos pôr $\omega^1 = d\sigma$, que é uma 1-forma invariante chamada o **arco afim**. Note que para definir o arco afim precisamos de $f'(t)$ e de $f''(t)$.

Referenciais de ordem 3:

Derivando agora (6.23), com $B = 1$: $\omega_1^1 = C\omega^1$ e atendendo novamente às equações de estrutura, vem que:

$$\begin{aligned} \omega_1^2 \wedge \omega_2^1 &= \\ \omega^1 \wedge \omega_2^1 &= \\ &= d\omega_1^2 \\ &= dC \wedge \omega^1 + C d\omega^1 \\ &= dC \wedge \omega^1 + C \omega^1 \wedge \omega_1^1 \\ &= dC \wedge \omega^1 \end{aligned} \tag{6.26}$$

donde se deduz que:

$$\omega^1 \wedge (dC + \omega_2^1) = 0 \quad \Rightarrow \quad dC + \omega_2^1 = D\omega^1 \tag{6.27}$$

e para a derivada vertical:

$$\boxed{\delta C + \pi_2^1 = 0} \tag{6.28}$$

O referencial de Frenet de ordem 3 pode ser então definindo tomando $C = 0$, isto é, $\pi_2^1 = 0$. Não restam parâmetros de gauge. Pondo $D = -k$, obtemos um invariante de ordem 4, a que chamamos **curvatura afim**. Finalmente as equações de Frenet são:

$$\left\{ \begin{array}{l} da = d\sigma \mathbf{e}_1 \\ d\mathbf{e}_1 = d\sigma d\mathbf{e}_2 \\ d\mathbf{e}_2 = -kd\sigma \mathbf{e}_1 \end{array} \right. \tag{6.29}$$

Um cálculo mostra que:

$$\frac{d\sigma}{dt} = (x'y'' - y'x'')^{1/3} = D^{1/3} \tag{6.30}$$

e:

$$k(t) = D^{5/3} \det \left[\frac{d^2a}{dt^2}, \frac{d^3a}{dt^3} \right] - \frac{1}{2} \left(D^{-2/3} \right)' \tag{6.31}$$

6.3 Geometria Euclideana complexa. Superfícies minimais

Seja $\phi : U \subseteq \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}^3$, $t \mapsto \phi(t) = (x(t), y(t), z(t))$ uma curva complexa isotrópica (ou minimal), isto é, tal que:

$$\phi'(t)^2 \stackrel{\text{def}}{=} x^2(t) + y^2(t) + z^2(t) = 0, \quad \forall t \in U$$

onde U é um aberto simplesmente conexo de \mathbb{C} . Vamos utilizar os chamados **triedros cíclicos directos** da forma $\mathcal{R} = \{a; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ tais que:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1^2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2^2 & \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.32)$$

e ainda:

$$\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 = i\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3 = i\mathbf{e}_3 \quad \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1 = i\mathbf{e}_2 \quad (6.33)$$

As componentes relativas do deslocamento infinitesimal de um triedro cíclico directo são obtidas através de:

$$\begin{cases} da &= \omega^i \mathbf{e}_i \\ d\mathbf{e}_i &= \omega_j^i \mathbf{e}_j \end{cases} \quad (6.34)$$

Além disso, diferenciando as relações (6.32), obtemos $\mathbf{e}_i \cdot d\mathbf{e}_j + \mathbf{e}_j \cdot d\mathbf{e}_i = 0$. Substituindo as diferenciais pelas suas expressões (6.34) e atendendo a (6.32), obtemos então:

$$\omega_1^3 = 0, \quad \omega_2^3 = 0, \quad \omega_3^1 = 0, \quad \omega_1^2 + \omega_2^3 = 0, \quad \omega_1^1 + \omega_3^3 = 0, \quad \omega_2^1 + \omega_3^2 = 0 \quad (6.35)$$

O sistema (6.34) toma então a forma seguinte:

$$\begin{cases} da &= \omega^1 \mathbf{e}_1 + \omega^2 \mathbf{e}_2 + \omega^3 \mathbf{e}_3 \\ d\mathbf{e}_1 &= \omega_1^1 \mathbf{e}_1 + \omega_1^2 \mathbf{e}_2 \\ d\mathbf{e}_2 &= \omega_2^1 \mathbf{e}_1 - \omega_2^2 \mathbf{e}_2 \\ d\mathbf{e}_3 &= -\omega_3^1 \mathbf{e}_1 - \omega_3^2 \mathbf{e}_2 \end{cases} \quad (6.36)$$

onde:

$$\begin{cases} \omega^1 &= \mathbf{e}_3 \cdot da, & \omega_1^1 &= \mathbf{e}_3 \cdot d\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \cdot d\mathbf{e}_3 \\ \omega^2 &= \mathbf{e}_2 \cdot da, & \omega_1^2 &= \mathbf{e}_2 \cdot d\mathbf{e}_1 = -\mathbf{e}_1 \cdot d\mathbf{e}_2 \\ \omega^3 &= \mathbf{e}_1 \cdot da, & \omega_2^1 &= \mathbf{e}_3 \cdot d\mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_2 \cdot d\mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (6.37)$$

o que significa que as seis formas $\omega^1, \omega^2, \omega^3, \omega_1^1, \omega_1^2, \omega_2^1$ são suficientes para determinar o deslocamento infinitesimal de um triedro.

Consideremos agora os **triedros cíclicos directos de ordem 1**, isto é, os triedros da forma $\mathcal{R} = \{a; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, para os quais a é um ponto da curva minimal dada e \mathbf{e}_1 é um vector tangente a essa curva em a . Num triedro de ordem 1, da deverá ser paralelo a \mathbf{e}_1 e portanto:

$$\omega^2 = 0 = \omega^3 \quad (6.38)$$

Fixemos um triedro de ordem 1, $\{a; \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3\}$, e vejamos como são os triedros de ordem 1, $\{a; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, que têm o mesmo vértice. Usando a definição, as relações (6.32) e (6.33), e após alguns cálculos, obtemos:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 &= \alpha \tilde{\mathbf{e}}_1 \\ \mathbf{e}_2 &= \tilde{\mathbf{e}}_2 + \lambda \tilde{\mathbf{e}}_1 \\ \mathbf{e}_3 &= \frac{1}{\alpha} \left(\tilde{\mathbf{e}}_3 - \lambda \tilde{\mathbf{e}}_2 - \frac{\lambda^2}{2} \tilde{\mathbf{e}}_1 \right) \end{cases} \quad (6.39)$$

donde se conclui que a família dos triedros cíclicos directos de ordem 1 depende de um **parâmetro principal** t , que localiza a posição de a sobre a curva dada, e de dois **parâmetros secundários (ou de gauge)** $\alpha \neq 0$ e λ .

Comparemos agora as componentes relativas do deslocamento infinitesimal dos dois triedros de ordem 1 acima referidos. Usando (6.33), (6.36), (6.37) e (6.39), obtemos:

$$\begin{aligned}\omega^1 &= \mathbf{e}_3 \cdot da = \frac{1}{\alpha} \left(\tilde{\mathbf{e}}_3 - \lambda \tilde{\mathbf{e}}_2 - \frac{\lambda^2}{2} \tilde{\mathbf{e}}_1 \right) \cdot da = \frac{1}{\alpha} \tilde{\omega}^1 \\ \omega_1^1 &= \mathbf{e}_3 \cdot d\mathbf{e}_1 = \frac{1}{\alpha} \left(\tilde{\mathbf{e}}_3 - \lambda \tilde{\mathbf{e}}_2 - \frac{\lambda^2}{2} \tilde{\mathbf{e}}_1 \right) \cdot (\alpha d\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 d\alpha) = \tilde{\omega}_1^1 - \lambda \tilde{\omega}_1^2 + \frac{d\alpha}{\alpha} \\ &\vdots\end{aligned}$$

isto é:

$$\begin{cases} \omega^1 &= \frac{1}{\alpha} \tilde{\omega}^1 \\ \omega_1^1 &= \tilde{\omega}_1^1 - \lambda \tilde{\omega}_1^2 + \frac{d\alpha}{\alpha} \\ \omega_1^2 &= \alpha \tilde{\omega}_1^2 \\ \omega_2^1 &= \frac{1}{\alpha} \left(\tilde{\omega}_2^1 - \frac{\lambda^2}{2} \tilde{\omega}_1^2 + \lambda \tilde{\omega}_1^1 + d\lambda \right) \end{cases} \quad (6.40)$$

e ainda $\omega^2 = \tilde{\omega}^2 = 0 = \omega^3 = \tilde{\omega}^3$. Como se vê, existem certas combinações lineares das componentes ω , onde não figuram as diferenciais $d\alpha$ e $d\lambda$ dos parâmetros secundários: são as combinações lineares de $\omega^1, \omega^2, \omega^3$ e ω_1^2 . Os seus valores dependem apenas da escolha do triedro $\{a; \mathbf{e}_i\}$ e do deslocamento infinitesimal do seu vértice. Designaremos estas componentes:

$$\boxed{\omega^1, \quad \omega^2 \text{ (que é nula)}, \quad \omega^3 \text{ (que é nula)}, \quad \omega_1^2}$$

por **componentes principais de ordem 1**. De (6.40) deduzimos que:

$$\alpha^2 \frac{\tilde{\omega}_1^2}{\tilde{\omega}_1^1} = \frac{\omega_1^2}{\omega^1}$$

e por isso podemos escolher o parâmetro α de maneira a reduzir a um valor numérico fixo (por exemplo igual a 1) a razão $\frac{\omega_1^2}{\omega^1}$. Os triedros de ordem 1, para os quais se tem:

$$\omega_1^2 = \omega^1$$

dizem-se **triedros de ordem 2** ⁽²⁾.

Vamos agora comparar dois triedros de ordem 2. Fixemos um triedro de ordem 2, $\{a; \tilde{\mathbf{e}}_1, \tilde{\mathbf{e}}_2, \tilde{\mathbf{e}}_3\}$, e vejamos como são os triedros de ordem 2, $\{a; \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$, que têm o mesmo vértice. Nas fórmulas (6.40) vemos que λ pode ser arbitrário mas que $\alpha = \pm 1$. “Orientemos” a curva dada, isto é, suponhamos que $\alpha = 1$. Então (6.39) e (6.40) tomam o aspecto seguinte:

$$\begin{cases} \mathbf{e}_1 &= \tilde{\mathbf{e}}_1 \\ \mathbf{e}_2 &= \tilde{\mathbf{e}}_2 + \lambda \tilde{\mathbf{e}}_1 \\ \mathbf{e}_3 &= \tilde{\mathbf{e}}_3 - \lambda \tilde{\mathbf{e}}_2 - \frac{\lambda^2}{2} \tilde{\mathbf{e}}_1 \end{cases} \quad (6.41)$$

$$\begin{cases} \omega^1 &= \tilde{\omega}^1 \\ \omega_1^1 &= \tilde{\omega}_1^1 - \lambda \tilde{\omega}_1^2 \\ \omega_1^2 &= \alpha \tilde{\omega}_1^2 \\ \omega_2^1 &= \tilde{\omega}_2^1 - \frac{\lambda^2}{2} \tilde{\omega}_1^2 + \lambda \tilde{\omega}_1^1 + d\lambda \end{cases} \quad (6.42)$$

onde λ é arbitrário. Daqui se conclui que ω^1 é sempre o mesmo para todos os triedros de ordem 2 de uma curva orientada - é uma forma de Pfaff invariante (de ordem 2), que só depende do parâmetro principal t , que se diz a **diferencial do pseudo-arco** e se nota por $d\sigma$.

As combinações lineares das componentes de um triedro de ordem 2, onde não figura a diferencial $d\lambda$ do parâmetro secundário λ , são combinações lineares das componentes principais seguintes:

$$\underbrace{\omega^1, \quad \omega^2 \text{ (que é nula)}, \quad \omega^3 \text{ (que é nula)}, \quad \omega_1^2 (= \omega^1)}_{\text{de ordem 1}}, \quad \underbrace{\omega_1^1}_{\text{de ordem 2}}$$

²Esta definição não é possível quando $\omega_1^2 = 0$. Excluimos para já este caso exceptional...

Como λ é arbitrário, podemos seleccionar de entre os triedros de ordem 2, aqueles para os quais:

$$\omega_1^1 = 0$$

a que chamamos triedros de ordem 3. A forma $\omega_1^2 = k d\sigma$ será pois invariante e a função k será um invariante a que chamamos **pseudo-curvatura**. As **fórmulas de Frenet** da curva de mínima são pois:

$$\begin{cases} da &= \mathbf{e}_1 d\sigma \\ d\mathbf{e}_1 &= \mathbf{e}_2 d\sigma \\ d\mathbf{e}_2 &= (k\mathbf{e}_1 - \mathbf{e}_2) d\sigma \\ d\mathbf{e}_3 &= k\mathbf{e}_2 d\sigma \end{cases} \quad (6.43)$$

References

- [1] Akivis M.A., Goldberg V.V. “*Projective differential geometry of submanifolds.*” North-Holland, 1993.
- [2] Akivis M.A., Goldberg V.V. “*Conformal differential geometry and its generalizations.*” John Wiley and Sons, Inc., 1996.
- [3] Cartan Élie, “*La théorie des groupes finis et continus et la géométrie différentielle.*” Gauthiers-Villars, 1937.
- [4] Cartan Élie, “*La méthode du repère mobile, la théorie des groupes continus et les espaces généralisés.*” Hermann, 1935.
- [5] Griffiths P., “On Cartan’s method of Lie groups and moving frames as applied to uniqueness and existence questions in differential geometry.” *Duke Math. Journal* 41 (1974), 775-814.
- [6] Griffiths P., Harris J., “Algebraic geometry and local differential geometry.” *Ann. Sci. École Norm. Sup.* 12 (1979), 355-452.
- [7] Sharpe R.W., “*Differential geometry.*” Springer-Verlag, LNM 166, 1997.