

COMPENSAÇÃO E VARIAÇÃO: UM ESTUDO SOBRE O PENSAMENTO RELACIONAL DE ALUNOS DO 4.º ANO DE ESCOLARIDADE¹

Célia Mestre
Agrupamento de Escolas Romeu Correia, Almada
celiamestre@hotmail.com

Hélia Oliveira
Instituto da Educação da Universidade de Lisboa
hmoliveira@ie.ul.pt

Resumo

Nesta comunicação apresenta-se um estudo inserido numa investigação mais ampla de implementação de uma experiência de ensino em que se pretende desenvolver o pensamento algébrico de alunos de uma turma do 4.º ano de escolaridade. O objectivo particular deste artigo é analisar o pensamento relacional evidenciado pelos alunos em tarefas que exploram igualdades numéricas com duas variáveis. A recolha de dados incide sobre a realização de duas tarefas em aula, tendo sido usados, como métodos, a observação participante e a análise documental das fichas de trabalho dos alunos. Conclui-se que os alunos apresentam evidências da mobilização do pensamento relacional, expressando claramente as relações numéricas presentes e as noções de compensação e variação em diferentes representações.

Palavras-chave: Early álgebra, Pensamento algébrico, Pensamento relacional, Variação.

Introdução

No âmbito da Educação Matemática em Portugal, o novo Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte *et al.*, 2007), representa uma inovação curricular no que respeita ao tratamento do tema Álgebra ao considerar como um dos quatro eixos fundamentais do ensino-aprendizagem o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade. Esta abordagem está em sintonia com as recentes tendências internacionais que consideram que a introdução ao pensamento algébrico deve começar nos primeiros anos, mas que este não deve constituir simplesmente um

¹ Trabalho realizado no âmbito do *Projecto PPPM - Práticas Profissionais de Professores de Matemática*, apoiado pela FCT - Fundação para a Ciência e Tecnologia (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

tema adicional do currículo. Ao invés, deve ser entendido como uma forma de pensamento que aporta significado, profundidade e coerência à aprendizagem de outros temas. Também o *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000) considera a Álgebra como um *fio condutor curricular* desde os primeiros anos de escolaridade e que pode contribuir para unificar o currículo da Matemática. Assim, desde cedo, pode ser construída uma base sólida centrada, por exemplo, nos números e nas suas propriedades que cimemente o trabalho posterior com os símbolos e expressões algébricas e também na experiência sistemática com padrões que poderá vir a desenvolver a compreensão da noção de função.

O trabalho de investigação em curso, no qual se integra este artigo, tem como objectivo geral compreender como se desenvolve o pensamento algébrico dos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade. Em particular, este artigo tem como objectivo analisar o pensamento relacional evidenciado pelos alunos em tarefas que exploram igualdades numéricas com duas variáveis.

O pensamento algébrico e a aritmética

O pensamento algébrico pode ser encarado como um processo em que os alunos generalizam ideias matemáticas a partir de um conjunto de exemplos particulares, estabelecem essa generalização através do discurso da argumentação e expressam-na gradualmente de uma forma simbólica apropriada à sua idade (Blanton & Kaput, 2005). No pensamento algébrico dá-se atenção não só aos objectos, mas também às relações existentes entre eles, representando e raciocinando sobre essas relações, tanto quanto possível de modo geral e abstracto (Ponte, 2006).

Uma das possíveis abordagens para o desenvolvimento do pensamento algébrico baseia-se no carácter potencialmente algébrico da aritmética, ou seja, na aritmética generalizada. Isso implica a construção da generalização a partir das relações numéricas e das operações aritméticas e suas propriedades e inclui ainda a noção de equivalência associada ao sinal de igual (=). Carpenter et al. (2003) reconhecem essas ideias como o pensamento relacional, isto é, a capacidade de *olhar* para expressões ou equações na sua concepção mais ampla, revelando as relações existentes nessas expressões ou equações. Para ilustrar o que pretendem dizer com pensamento relacional, Carpenter et al. (2005) usam a igualdade numérica seguinte: $8+4= _ +5$. Para resolvê-la, os alunos podem

adicionar 8 e 4 e depois pensar em quanto têm de adicionar a 5 para obter 12. No entanto, o processo usado, ainda que válido, não tem em conta a relação entre os números envolvidos. O aluno que apreenda a expressão no seu todo, pode considerar que 5 é mais um do que 4 e, por isso, o número a colocar no espaço será menos um do que 8, usando a seguinte relação: $8+4=(7+1)+4=7+(1+4)$.

A aritmética tem sido, ao longo dos tempos, o tema com maior incidência no currículo da escola elementar, no entanto, torna-se necessário reconsiderar o modo como, habitualmente, tem sido ensinada e o seu papel na formação matemática das crianças. Numa perspectiva tradicional do ensino da Matemática tem existido uma preocupação quase exclusiva com o cálculo, e, nesta perspectiva, o propósito é operacionalizar um conjunto de números a partir de um conjunto de passos para gerar um único número, que é a resposta pretendida. Numa perspectiva mais algébrica, por outro lado, o foco desloca-se para as relações numéricas. Carpenter et al. (2003), por exemplo, referem que a separação artificial entre álgebra e aritmética impede que os alunos construam formas poderosas de pensamento sobre a Matemática, nos primeiros anos, e torna mais difícil a aprendizagem da álgebra nos anos mais avançados.

Na perspectiva de Stephens (2006), o desenvolvimento do pensamento relacional depende de os alunos serem capazes de ver e usar possibilidades de variação entre os números de uma expressão numérica. Reconhecendo a importância de ser trabalhada a igualdade numa perspectiva relacional, este autor refere-se à capacidade de usar a variação numa expressão numérica como uma importante característica do pensamento relacional, argumentando que é essencial que os alunos identifiquem as direcções dessa variação e não apenas que reconheçam que ela existe.

O pensamento relacional pode ser expresso através de uma grande variedade de métodos e formas, mas que dependem sempre das ideias fundamentais de equivalência e compensação requeridas em operações particulares (Stephens, 2006). Também Irwin e Britt (2005) reconhecem que os métodos de compensação e equivalência que alguns alunos usam na resolução de expressões numéricas constituem evidências da utilização do pensamento relacional.

As explicações gerais dos estudantes sobre o porquê da veracidade da expressão numérica $78 - 49 + 49 = 78$ e a sua capacidade de usar exemplos específicos daquilo que mais tarde será uma relação geral ($a - b + b = a$) foram descritas como o *pensamento quase – variável* (Fujii & Stephens, 2008). A expressão *quase-variável*

significa um número ou conjunto de números numa expressão que revelam a relação matemática subjacente e que se manterá verdadeira independentemente dos números que sejam usados (Fujii, 2003). Desta forma, os alunos podem usar expressões numéricas generalizáveis, centrando a atenção na estrutura dessas expressões, e identificar e discutir a generalização algébrica antes da introdução da simbologia algébrica formal.

De acordo com Fujii e Stephens (2008) o trabalho em torno destas expressões numéricas pode ser visto como um tipo de *proto-álgebra* onde se procuram explorar padrões de variação que podem ser, mas não necessariamente, representados por expressões algébricas. Muitas expressões numéricas têm esse potencial, mas como esse potencial pode ser usado depende de como os alunos conseguem apreender essa possibilidade de variação.

Stephens e Wang (2008) aplicaram um questionário a alunos dos 6.º e 7.º anos de escolaridade, com o objectivo de perceber como os alunos mobilizavam o pensamento relacional na exploração de expressões numéricas. As questões do questionário envolviam a igualdade e a compensação aplicadas às quatro operações aritméticas. As questões foram categorizadas em três tipos:

Tipo I) Expressões numéricas com um número “em falta” ou um número “desconhecido” que poderiam ser resolvidas através do cálculo ou usando o pensamento relacional:

$$43 + \square = 48 + 76, \quad 39 - 15 = 41 - \square, \quad \square \times 5 = 20 \times 15, \quad 21 \div 56 = \square \div 8$$

Figura 1. Questões do Tipo I (Stephens & Wang, 2008).

Tipo II) Expressões envolvendo dois números desconhecidos, mas inter-relacionados:

(a) In each of the sentences below, can you put numbers in Box A and Box B to make each sentence correct?

$$18 + \boxed{\text{Box A}} = 20 + \boxed{\text{Box B}}$$

$$18 + \boxed{\text{Box A}} = 20 + \boxed{\text{Box B}}$$

$$18 + \boxed{\text{Box A}} = 20 + \boxed{\text{Box B}}$$

(b) When you make a correct sentence, what is the relationship between the numbers in Box A and Box B?

(c) If instead of 18 and 20, the first number was 226 and the second number was 231 what would be the relationship between the numbers in Box A and Box B?

(d) If you put any number in Box A, can you still make a correct sentence? Please explain your thinking clearly.

(e) What can you say about c and d in this mathematical sentence? $c + 2 = d + 10$

Figura 2. Questões do Tipo II e III (Stephens & Wang, 2008).

Tipo III) Expressões semelhantes às segundas, mas envolvendo símbolos, correspondendo à alínea c) da figura anterior: “ $c+2=d+10$ ”.

Estes dois últimos tipos de questões tinham como principal objectivo mobilizar a utilização do pensamento relacional, pois embora fosse possível usar o cálculo para obter alguns exemplos particulares, a identificação da estrutura relacional da expressão exigiria a mobilização do pensamento relacional.

Os autores categorizaram as respostas dos alunos às questões de tipo II e III, concluindo que estes evidenciavam a utilização do *pensamento relacional estabelecido* quando eram capazes de: a) especificar claramente a relação entre os números das caixas A e B com claras referências ao valor numérico e à direcção da compensação aritmética; b) descrever a condição para que qualquer número possa ser usado na caixa A e manter a expressão verdadeira; c) explicar claramente como c e d estão relacionados para que a expressão do tipo III seja verdadeira, tratando c e d como números gerais.

Stephens e Wang (2008) concluem com este estudo que questões, como as descritas, que envolvem duas variáveis impulsionam os alunos para a utilização do pensamento relacional. Assinalam que os resultados demonstraram que os alunos que revelavam um pensamento relacional ainda emergente evidenciavam uma concepção limitada da noção de variável, concentrando a sua atenção em algumas características da relação numérica, mas não a apreendendo no seu todo.

Metodologia do estudo

Os resultados apresentados nesta comunicação inserem-se num estudo mais amplo, de tipo interpretativo, ainda em fase inicial, assente na implementação de uma experiência de ensino, onde se pretendem explorar tarefas que promovam o desenvolvimento do pensamento algébrico nos alunos de uma turma de 4.º ano de escolaridade do 1.º Ciclo do Ensino Básico.

Este artigo foca-se na exploração de duas tarefas específicas, envolvendo igualdades numéricas com duas variáveis e procura analisar o pensamento relacional evidenciado pelos alunos na resolução dessas tarefas. Para recolha dos dados foram gravadas em formato vídeo as duas aulas em que os alunos realizaram as duas tarefas e analisados os momentos de discussão colectiva. Também foram usadas para análise as fichas de trabalho dos alunos. Estas duas aulas foram dinamizadas pela investigadora deste estudo (primeira autora deste artigo) e a professora titular de turma assumiu um papel de coadjuvante, apoiando os alunos nos diferentes pares. Refira-se que a investigadora é professora de 1.º Ciclo na mesma escola da turma onde se implementa a experiência de ensino e que, anteriormente a esta investigação, já mantinha um contacto directo com a professora e os alunos, nomeadamente a partir da coordenação de projectos.

Para análise dos dados definiram-se como indicadores da utilização do pensamento relacional os seguintes: a) identificação da relação entre os números colocados nas caixas A e B, com claras referências ao valor numérico e à direcção da compensação aritmética; b) identificação da condição para que qualquer número possa ser usado nas caixas A e B, de forma a manter a igualdade; c) utilização de formas de representação que expressam a generalização da relação numérica.

A experiência de ensino

A experiência de ensino decorre durante o presente ano lectivo e as tarefas exploradas em sala de aula têm como base os temas e tópicos matemáticos da planificação anual definida pela professora titular de turma, respeitando a perspectiva de conceber o pensamento algébrico como um *fio condutor curricular* (NCTM, 2000), numa lógica de integração curricular. De acordo com a potencialidade de tratamento algébrico de cada um dos tópicos matemáticos da planificação anual da turma, as tarefas foram

introduzidas na experiência de ensino com uma média de duas tarefas por semana e com a duração de 90 minutos cada uma. Foram realizadas, até ao momento, vinte e uma tarefas, inseridas nos tópicos “múltiplos e divisores” e “operações com números naturais”, de acordo com o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007).

A turma onde decorre a experiência de ensino é constituída por 19 alunos, 7 raparigas e 12 rapazes, com uma média de nove anos de idade. Embora a turma estivesse a trabalhar de acordo com o PMEB (Ponte et al., 2007) desde o 3.º ano de escolaridade, no início da experiência de ensino os alunos revelavam algumas dificuldades na exploração de questões que envolviam o sentido de número, privilegiando quase exclusivamente a utilização dos algoritmos na resolução das tarefas. Esse facto era expresso inclusivamente quando os alunos comunicavam os seus raciocínios, referindo que colocavam os números “em cima” e “em baixo”, ilustrando o procedimento que efectuam quando resolvem o algoritmo. Também a exploração de relações numéricas denotava algumas fragilidades por parte dos alunos. Refira-se, como exemplo, o início da exploração de sequências numéricas, onde os alunos ficaram muito surpreendidos com a expressão 11×3 , argumentando que “a *tabuada do três* terminava no 10×3 ”.

As tarefas exploradas na experiência de ensino centraram-se na exploração das relações numéricas e das propriedades das operações, numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número, e tendo em conta os tópicos matemáticos, como já foi referido. A exploração destas tarefas tinha como objectivos a identificação de regularidades e expressão da generalização através da linguagem natural, e a iniciação de um percurso em direcção à simbolização através da passagem da linguagem natural para a linguagem matemática. A utilização de alguma simbologia informal começou a ser introduzida, em particular, em quatro tarefas (10^a , 12^a , 14^a e 17^a), como se descreve em seguida.

Na décima tarefa, “Salas de cinema” era pedido aos alunos que descobrissem de quantas formas seria possível arrumar uma sala de cinema com cem cadeiras, tendo cada fila o mesmo número de cadeiras. Na parte final da exploração dessa tarefa, foi proposto pela professora a utilização do símbolo “?” para expressar “qual o número” em expressões como “ $? \times 5 = 100$ ”.

A décima segunda tarefa, “Calcular usando o dobro”, explorava uma estratégia de cálculo em que se usava a *tabuada do 4* para calcular produtos da *tabuada do 8*, a partir de expressões numéricas como $6 \times 8 = 2 \times 6 \times 4$ e $12 \times 8 = 2 \times 12 \times 4$. Ao generalizar essa

estratégia, os alunos expressaram em linguagem natural o seguinte: “Para descobrirmos a tabuada do oito fazemos o dobro da tabuada do quatro”. Quando lhes foi pedido para traduzirem esta frase em linguagem matemática, os alunos propuseram “ $?x8=2x?x4$ ”. O símbolo “?” aqui apresentado traduzia para os alunos a expressão “qualquer número”.

A décima quarta tarefa, “A estratégia do Afonso”, explorou a relação entre as tabuadas do cinco e do dez a partir da seguinte expressão numérica “ $36x5=360:2$ ”. Traduziu-se em linguagem natural em: “Para descobrirmos a tabuada do cinco fazemos metade da tabuada do dez”. Os alunos traduziram essa generalização para linguagem matemática do seguinte modo:

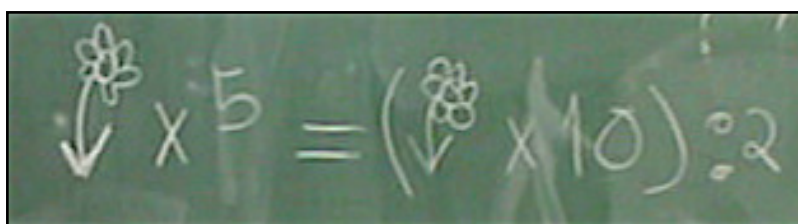

$$\downarrow \text{flor} \times 5 = (\downarrow \text{flor} \times 10) : 2$$

Figura 3. Representação simbólica da generalização apresentada pelos alunos.

A décima sétima tarefa, “A estratégia da Marta”, explorou a expressão numérica “ $18x9=180-18$ ” e foi traduzida em linguagem natural e em linguagem matemática como nas tarefas descritas anteriormente.

A utilização de simbologia como o ponto de interrogação e a flor apresentada pelos alunos, surgiu sempre no contexto específico da tarefa e para expressar matematicamente aquilo que tinha sido dito em linguagem natural. Para os alunos, nestas três últimas tarefas descritas, o significado destes símbolos relacionava-se com a utilização de um mesmo número (“qualquer número”) em cada um dos lados da igualdade para manter a sua veracidade.

As tarefas que estiveram na base do estudo que aqui se apresenta (20ª e 21ª) são as primeiras em que os alunos são confrontados com a situação de dois números desconhecidos inter-relacionados numa igualdade.


Apresentação dos resultados

Em seguida, apresenta-se a exploração das duas tarefas em discussão neste artigo: “Os cromos da Ana e do Bruno” e “Descobre A e B”, inspiradas na questão do tipo II apresentada no estudo de Stephens e Wang (2008). Na primeira tarefa considerou-se importante criar um contexto de modelação ancorado na realidade, de forma a dar sentido aos conceitos mais abstractos apresentados (Tabach & Friedlander, 2008). As duas tarefas foram resolvidas pelos alunos em pares e tiveram momentos de discussão colectiva na turma. Para análise da exploração das tarefas apresentam-se alguns trabalhos dos alunos e excertos significativos das discussões colectivas.

Tarefa “Os cromos da Ana e do Bruno”

“Os cromos da Ana e do Bruno”

A Ana e o Bruno estão a fazer uma colecção de cromos. No domingo passado, a avó ofereceu a cada um deles a mesma quantidade de cromos para colarem nas suas cadernetas. A Ana colou 18 cromos na caderneta e guardou os restantes na caixa A. O Bruno colou 20 cromos na caderneta e guardou os restantes na caixa B.



Podemos representar a **quantidade de cromos que a Ana tem**, da seguinte forma:

$$18 + \textcircled{A}$$

Número de cromos colados na caderneta cromos guardados na caixa A

Podemos representar a **quantidade de cromos que o Bruno tem**, da seguinte forma:

$$20 + \textcircled{B}$$

Número de cromos colados na caderneta cromos guardados na caixa B

Como os dois meninos têm o mesmo número total de cromos, podemos construir a seguinte igualdade:

$$18 + \textcircled{A} = 20 + \textcircled{B}$$

a) Quantos cromos terá a Ana na caixa \textcircled{A} e quantos cromos terá o Bruno na caixa \textcircled{B} ?

Figura 4. Enunciado da tarefa “Os cromos da Ana e do Bruno”, primeira parte.

Na apresentação da tarefa considerou-se importante começar por trabalhar o contexto, interpretando o enunciado em conjunto com os alunos. Foi projectado um acetato com o enunciado da tarefa e procurou-se clarificar aspectos como o que representavam os números 18 e 20, a simbologia usada para as caixas A e B e que os alunos atendessem à igualdade verificando que os meninos, Ana e Bruno, tinham a mesma quantidade de cromos.

Para responder à primeira questão da tarefa os alunos atribuíram valores às caixas A e B. Nessa resposta, três dos oito pares reconheceram a comutatividade da adição e usaram apenas os números presentes no enunciado, 18 e 20, para manter a igualdade, ficando $18+20=20+18$. Os restantes pares usaram outros números, como mostra o exemplo, onde se observa a escrita da igualdade envolvida:

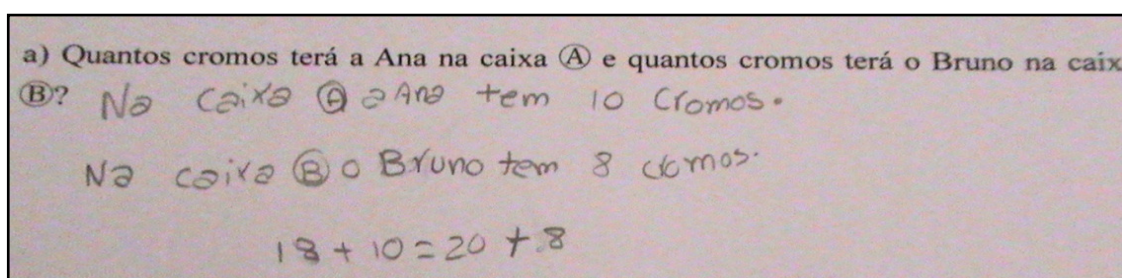


Figura 5. Resolução da alínea a) feita pelo par Joana e Gonçalo.

Em seguida, foi distribuída a segunda parte da tarefa, onde na alínea b) era pedido aos alunos que usassem outros valores para A e B mantendo a igualdade. Todos os alunos resolveram essa questão sem dificuldade, apresentando mais do que um par de valores que mantinham a igualdade.

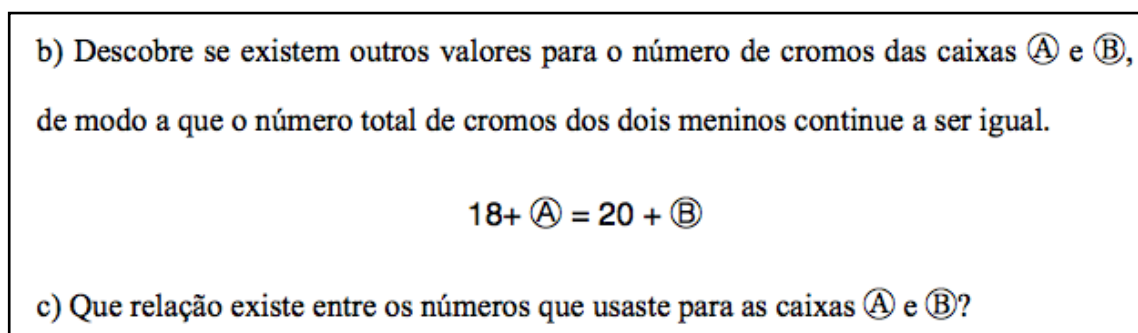


Figura 6. Enunciado da tarefa “Os cromos da Ana e do Bruno”, segunda parte.

A alínea c) teve respostas diferentes por parte dos pares. Cinco pares conseguiram mostrar de forma muito clara a relação entre as caixas A e B com referências explícitas da compensação usada. Um par expressou essa relação, mas com pouca clareza na linguagem e dois pares não identificaram correctamente a relação, embora na alínea anterior tivessem respondido correctamente. No exemplo que se apresenta em seguida, os alunos mostraram que reconheciam a relação numérica empregue na igualdade, incluindo o valor numérico e a direcção da compensação aritmética. Reconheceram e explicitaram ainda que a relação existente entre os valores atribuídos às caixas A e B estava dependente da relação entre os valores iniciais 20 e 18.

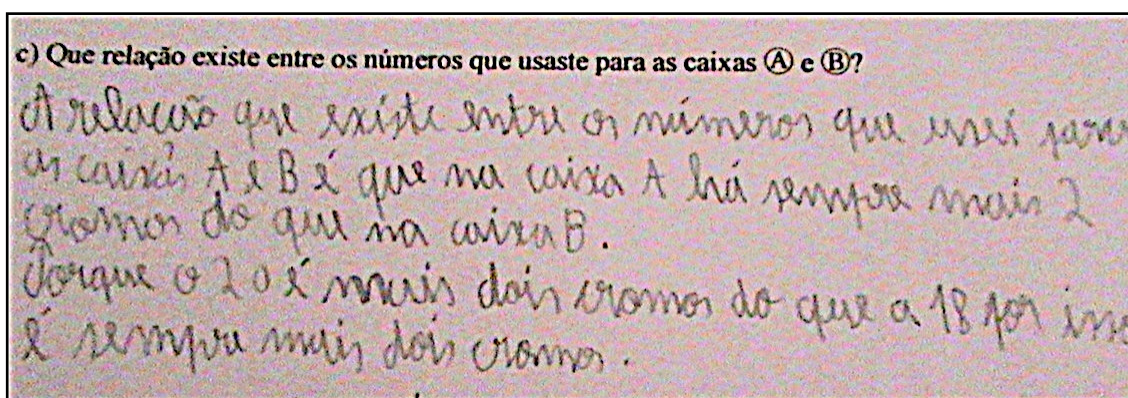


Figura 7. Resolução da alínea c) feita pelo par Henrique e Rita.

Na discussão colectiva referente à alínea c), Gonçalo escreve no quadro: “A relação que existe entre os números que usei para as caixas A e B é que a B tem sempre menos dois cromos do que a A”. Neste momento, Fábio acrescentou que a relação entre os números relativos às caixas A e B poderia ser escrita em linguagem matemática. Quando lhe é pedido para escrever no quadro aquilo a que se referia, o aluno apresenta a seguinte expressão:

$$B - 2 = A$$

Figura 8. Representação do valor de A apresentada pelo Fábio.

Para facilitar a discussão da expressão apresentada pelo Fábio, a professora² propôs a construção de uma tabela no quadro, com possíveis pares de valores para A e B. A professora foi registando, na tabela, os valores que os alunos iam sugerindo:

(A)	(B)
4	<u>2</u>
6	4
8	6
10	8
2	0
5	3

Figura 9. Tabela explorada durante a discussão colectiva.

Em seguida, retomou-se o que Fábio tinha referido relativamente à representação do valor de A e Rita sugeriu que a forma correcta deveria ser $A=B+2$. Essa representação foi escrita no quadro e foram experimentados alguns valores da tabela para confirmar se estava correcta:

$$\begin{aligned}
 &A = B + 2 \\
 6 &= 4 + 2 \quad \text{(V)} \\
 8 &= 6 + 2 \quad \text{(V)}
 \end{aligned}$$

Figura 10. Representação de A durante a discussão colectiva.

Neste momento, a relação entre os números colocados em cada uma das caixas parecia estar compreendida por todos os alunos, reconhecendo o valor e a direcção da compensação aritmética usada. No entanto, importava perceber se eles reconheciam a dependência dessas variáveis com os valores usados na expressão numérica. O excerto que se segue mostra o momento da discussão colectiva em que esta questão foi explorada:

² Nesta comunicação, a referência “professora” diz respeito à professora/investigadora.

Rita: (...) a relação que existia entre os números que usei para as caixas A e B é que na caixa A há sempre mais dois cromos do que na caixa B. Porque o 20 é mais 2 cromos do que o 18, por isso é sempre mais dois cromos.

Professora: (...) porquê o “mais dois”? Porque é que a caixa A tem sempre mais dois do que a caixa B?

Gonçalo: Porque a diferença é de dois.

Professora: E porque é que a caixa B tem sempre menos dois do que a caixa A?

Rita: Ali no dezoito mais A e vinte mais B, o 18 é menos dois do que o 20.

No momento de sistematização, a professora explicita a relação entre os números usados na igualdade. A partir do esquema que se apresenta na figura seguinte, são evidenciados o valor numérico e a direcção da compensação, assim como a sua dependência dos valores 18 e 20:

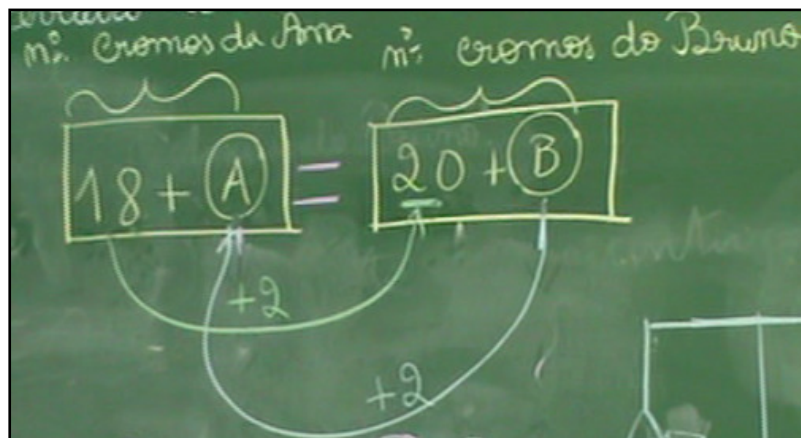


Figura 11. Representação das relações da igualdade durante a discussão colectiva.

Também foi usado o *modelo da balança* para ilustrar como a relação de igualdade poderia ser vista como uma relação de equilíbrio. Foram atribuídos valores a cada prato da balança, usando o contexto das medidas de massa com diversas possibilidades para manter a balança em equilíbrio. Depois, foi transposto para a balança o contexto da tarefa e experimentadas diversas possibilidades daquela compensação aritmética.

Em seguida, é distribuída a terceira e última parte da tarefa. Nesta questão pretendia-se que os alunos reconhecessem a relação entre A e B, mas com um valor numérico diferente na compensação.

d) Se a igualdade for a seguinte, que relação poderá existir entre os números das caixas **A** e **B**?

$$226 + \text{A} = 231 + \text{B}$$

Figura 12. Enunciado da tarefa “Os cromos da Ana e do Bruno”, terceira parte.

Decorridos cerca de dez minutos já todos os alunos tinham completado esta parte da tarefa. A maior parte dos pares conseguiu identificar de forma explícita e clara a relação entre os números das caixas A e B nesta nova igualdade:

d) Se a igualdade for a seguinte, que relação poderá existir entre os números das caixas **A** e **B**?

$$226 + \text{A} = 231 + \text{B}$$
$$\begin{array}{r} 231 \\ -226 \\ \hline 005 \end{array}$$

A relação é que a caixa **A** terá mais 5 do que a caixa **B**.

Porque se a Ana coloca menos cromos na caderneta do que o Bruno, e se tiverem a mesma quantidade, a Ana terá mais cromos guardados na caixa.

Figura 13. Resolução da alínea d) feita pelo par Matilde e André.

Um dos pares conseguiu ainda representar correctamente, através de uma expressão, o valor de A em relação a B:

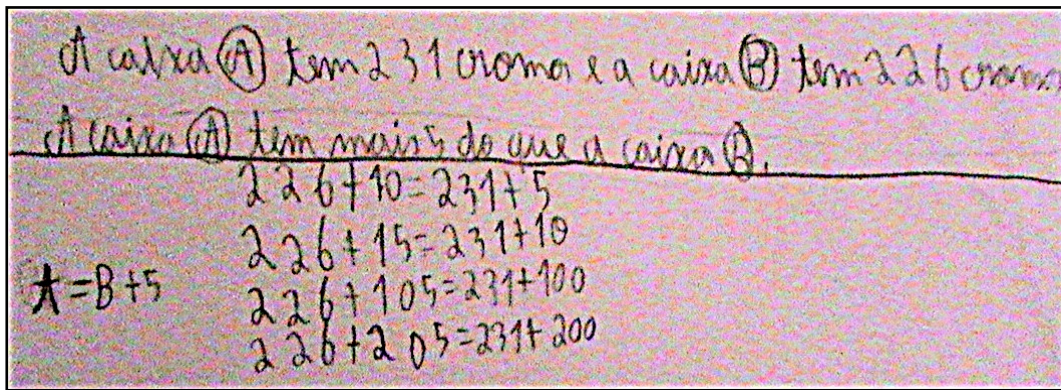


Figura 14. Resolução da alínea d) feita pelo par Henrique e Rita.

Analisando esta primeira aula, pode perceber-se que os alunos começam a dar evidências da utilização do pensamento relacional quando explicam a relação entre os números da caixa A e B. A partir da utilização de diferentes números possíveis para cada uma das caixas, os alunos *descobrem a regra*, ou seja, a estrutura daquela igualdade numérica e conseguem explicitar de forma clara essa relação para qualquer número colocado na caixa A e na caixa B: “na caixa A há sempre mais dois cromos do que na caixa B”. Os exemplos anteriormente analisados evidenciam que a professora sugeriu diferentes representações para expressar as relações existentes, a que os alunos foram correspondendo bem, embora ainda com algumas limitações.

Tarefa “Descobre A e B”

“Descobre A e B”

1. Observa a seguinte igualdade:

$$6 \times \textcircled{A} = 12 \times \textcircled{B}$$

a) Coloca números nas caixas A e B de modo a teres três afirmações verdadeiras.

$$6 \times \textcircled{A} = 12 \times \textcircled{B}$$

Ⓐ =

Ⓑ =

$$6 \times \textcircled{A} = 12 \times \textcircled{B}$$

Ⓐ =

Ⓑ =

$$6 \times \textcircled{A} = 12 \times \textcircled{B}$$

Ⓐ =

Ⓑ =

b) Que relação existe entre os números que colocaste nas caixas A e B?

Figura 15. Enunciado da tarefa “Descobre A e B”, primeira parte.

Esta tarefa é, em continuidade com a primeira, igualmente adaptada de Stephens (2008) e foi aplicada sem contexto de modelação. Apresenta também uma situação de compensação aritmética, mas envolvendo agora as operações multiplicação e divisão. Pretendia-se que, numa primeira alínea, os alunos atribuíssem valores a A e B mantendo a igualdade e, na segunda alínea, identificassem a relação entre esses valores.

Analisando as resoluções dos alunos pode referir-se que oito dos nove pares conseguiram identificar a relação entre os números das caixas A e B de forma bastante clara, como mostra o exemplo seguinte:

b) Que relação existe entre os números que colocaste nas caixas A e B?

A relação que existe entre os números que coloquei na caixa A e B é que $6 \times 2 = 12$ e porque 12 é o dobro ($\times 2$) do número 6 por isso todos os números todos que eu pus na caixa A são todos o dobro ($\times 2$) da caixa B.

Figura 16. Resolução da alínea b) feita pelo par João e Lawry.

O exemplo seguinte mostra a resolução de um par que consegue representar simbolicamente, através de duas expressões diferentes, a relação entre os valores de A e B (como dobro e como metade). Os alunos apresentam ainda uma tabela evidenciando o reconhecimento de A e B como variáveis e um sentido de co-variação. No entanto, possivelmente sugestionados pela natureza aditiva da compensação presente na tarefa anterior, concretizam erradamente o terceiro par de valores, assumindo que “a diferença é de 2”.

b) Que relação existe entre os números que colocaste nas caixas A e B?

A relação que existe é que os números são sempre o dobro ($\times 2$)

Porque a diferença é de 2.

A	B
2	1
4	2
6	4

$A = B \times 2$
 $B = A : 2$

$\frac{12}{00} \mid \frac{6x}{0}$

Figura 17. Resolução da alínea b) feita pelo par António e Fábio.

Na discussão colectiva, os alunos da turma apresentaram, sem dificuldade, a relação entre os números da caixa A e da caixa B e vice-versa. Relacionando os números da igualdade, uma das alunas representa esquematicamente as relações numéricas envolvidas nesta tarefa.

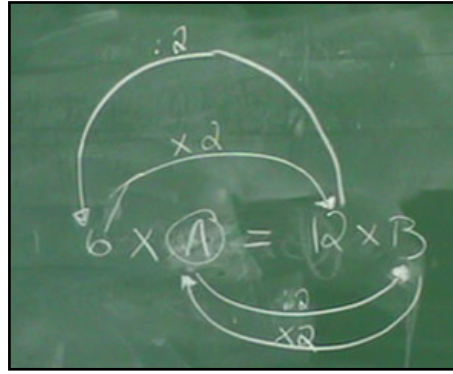


Figura 18. Representação das relações na igualdade, feita pela Rita.

Ainda na discussão colectiva surgem afirmações dos alunos que mostram como conseguiram, para além de apreenderem a relação numérica entre os valores desconhecidos, chegar a uma generalização dos valores que satisfazem a igualdade presente e identificar o conceito de variável. Os excertos seguintes são exemplo disso:

João: ... A caixa A vai ser sempre o dobro da caixa B. Os números da caixa A vão ser sempre o dobro do que está na caixa B.

Matilde: A caixa A pode ser um número qualquer, mas tem de ser sempre o dobro da caixa B.

Tendo em conta o trabalho realizado com as expressões simbólicas na tarefa anterior, a professora solicita ainda uma forma de escrever A e B. Matilde vai ao quadro e escreve correctamente:

$$A = 2 \times B$$

$$B = A : 2$$

Figura 19. Representação do valor de A e de B, feita pela Matilde.

Por último, os alunos resolvem a segunda parte da tarefa que envolve também as operações multiplicação e divisão, mas que apresenta as relações mais complexas de triplo e terça parte.

“II - Descubre A e B”

c) Se a igualdade for a seguinte, que relação poderá existir entre os números das caixas A e B?

$$15 \times A = 5 \times B$$

Figura 20. Enunciado da tarefa “Descubre A e B”, segunda parte.

Perante esta questão, todos os pares conseguiram expressar a relação entre os valores de A e B de forma mais ou menos explícita, usando, pelo menos, uma representação correcta. Nenhum dos pares usou apenas uma forma de representação, completando a explicitação da relação em linguagem natural com outra forma de representação, como a tabela ou o diagrama de setas. Por exemplo, na resolução do par que a seguir se apresenta observa-se a dupla utilização de uma tabela estruturada e uma *proto-tabela* constituída por duas colunas, embora em ambos os casos apenas com dois pares de valores. Os alunos conseguem expressar, em linguagem natural, de forma clara, a relação entre os valores atribuídos às caixas A e B.

The image shows a handwritten student solution. At the top, it repeats the problem statement: "c) Se a igualdade for a seguinte, que relação poderá existir entre os números das caixas A e B?". Below this, the equation $15 \times A = 5 \times B$ is written. A vertical line separates the variables A and B. To the left of the line, the values 1, 2, and 3 are listed vertically. To the right of the line, the values 3 and 6 are listed vertically. Arrows point from the values 1 and 2 on the left to the value 3 on the right. Another arrow points from the value 3 on the left to the value 6 on the right. Above the equation, there are two vertical arrows: one pointing down from 15 to 3, and another pointing down from 5 to 1. Below the equation, there is a handwritten note: "A relação que a é que a caixa B é o triplo da A e a caixa A é a terça parte da B".

Figura 21. Resolução da alínea c) feita pelo par João e Marco.

Um outro par utiliza diferentes formas de expressar a relação entre os números das caixas A e B. O diagrama com setas tem explícito o tipo de relações entre os valores A e

B e também a relação de dependência com o 15 e o 5. Recorre ainda à representação da balança para ilustrar um exemplo daquela igualdade.

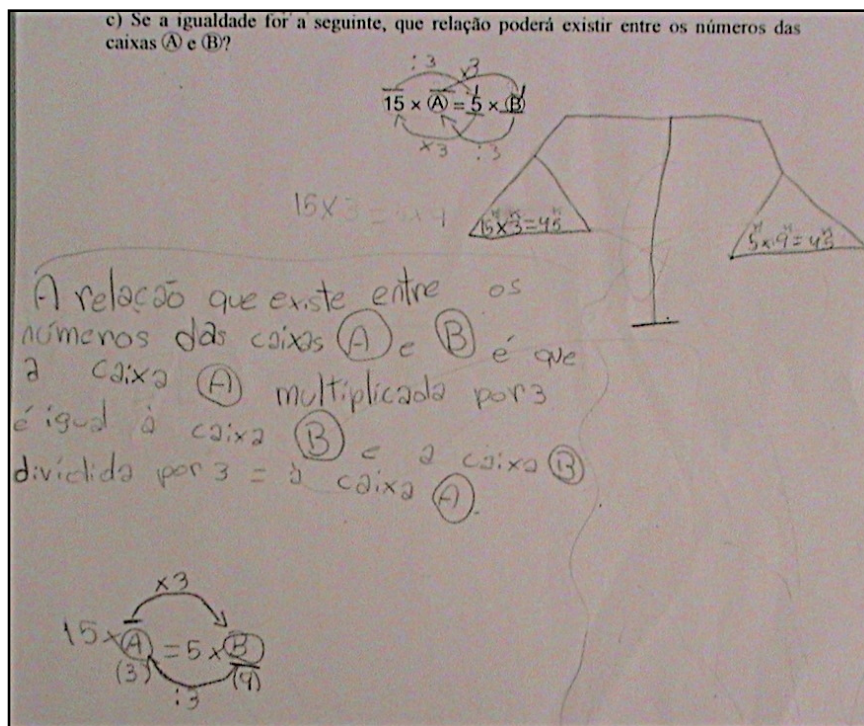


Figura 22. Resolução da alínea c) feita pelo par Gonçalo e Joana.

No momento da discussão colectiva verifica-se que a generalidade dos alunos não só compreendeu as relações numéricas em causa nesta questão, como conseguem expressá-las em linguagem simbólica através de uma expressão matemática. Essa compreensão é manifesta quando os alunos reagem a uma resolução apresentada pelo par Fábio e António. António vai ao quadro e expressa correctamente as relações numéricas presentes através da linguagem natural:

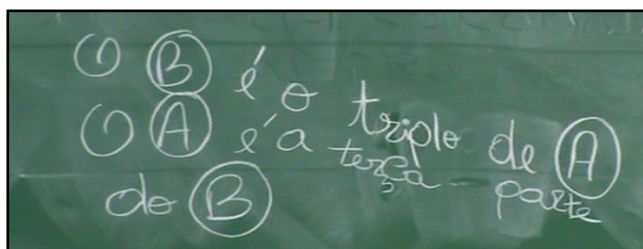
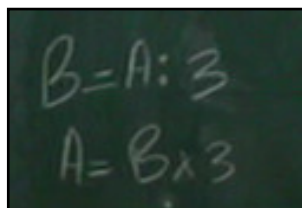


Figura 23. Representação da relação entre A e B, apresentada pelo António.

No entanto, quando, em seguida, António apresenta simbolicamente os valores de A e B, escreve incorrectamente $B = A : 5$ e $A = B \times 5$. Os colegas reagem, de imediato, e o par de alunos admite que se tinha enganado e substitui o cinco pelo três:



The image shows a chalkboard with two equations written in white chalk. The top equation is $B = A : 3$ and the bottom equation is $A = B \times 3$.

Figura 24. Representação dos valores de A e B, apresentada pelo António.

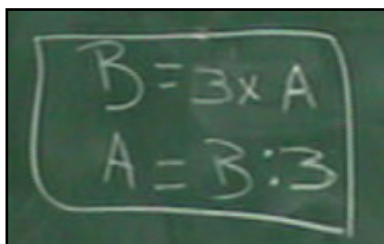
Os colegas mantêm-se atentos às expressões que foram registadas pelo António. Uma das alunas consegue identificar o erro dos colegas, corrigindo-o :

Rita: Aqui, como eles estão a dizer (apontando para o que os colegas escreveram em linguagem natural)... O B é o triplo... Aqui era o vezes (apontando para a expressão $B = A : 3$, escrita pelo António) do A.

(...)

Rita: Porque eles disseram que o B é a terça parte do A.

E representa correctamente as duas expressões:



The image shows a chalkboard with two equations written in white chalk, enclosed in a hand-drawn rectangular border. The top equation is $B = 3 \times A$ and the bottom equation is $A = B : 3$.

Figura 25. Representação dos valores de A e B, feita pela Rita.

Quando a professora questiona os alunos sobre o porquê de isso acontecer, Rita refere que “cinco vezes três é quinze e quinze a dividir por três é cinco”. Matilde acrescenta ainda que “B podia ser um número qualquer, mas tinha que ser o triplo do A”, expressando a generalização da relação trabalhada.

Nesta segunda tarefa, aplicada sem contexto de modelação, os alunos conseguem também expressar a relação entre os números da caixa A e da B, de forma clara e evidenciando a utilização do pensamento relacional. Na comparação desta tarefa para a primeira percebe-se uma evolução nas formas de representação que os alunos usam

agora, nesta tarefa, com maior variedade. A escrita simbólica das relações entre os números das caixas A e de B é mais facilmente conseguida na primeira parte desta tarefa, que envolvia a relação de dobro e metade. Na parte da tarefa que envolvia uma relação de triplo e terça parte, o aluno que tinha tido a iniciativa de experimentar usar esta representação na primeira tarefa troca as relações e apresenta o contrário do que tinha expressado com as outras representações. Esta situação foi discutida na turma e corrigida de forma a expressar a relação correcta. Este episódio demonstra como os alunos estão, ainda, numa fase inicial neste processo e a apropriar-se do significado na escrita simbólica.

Considerações finais e conclusões

Tendo em conta os dados apresentados, procuramos agora analisar o pensamento relacional que os alunos do 4.º ano evidenciaram ao explorarem igualdades numéricas com duas variáveis, usando como referência os indicadores referidos.

Ainda que numa fase inicial, o trabalho desenvolvido pelos alunos manifesta algumas evidências da utilização do pensamento relacional, tais como, a identificação clara da relação existente entre os números colocados nas caixas A e B, referindo os valores e a direcção da compensação aritmética; a descrição da condição para que qualquer número pudesse ser usado nas caixas A e B, mantendo a igualdade inicial; e, a utilização, por alguns alunos, de formas de representação que expressam a generalização da relação numérica.

O conceito de variável surge pela primeira vez e, de modo informal, a partir da exploração de duas variáveis numa igualdade. A utilização inicial de um contexto de modelação significativo na primeira tarefa, “Os cromos da Ana e do Bruno”, parece ter contribuído para que os alunos atribuíssem significado às variáveis A e B. Assim, para além de conseguirem usar diferentes valores para A e B, os alunos ainda conseguiram generalizar que aquela igualdade seria possível para qualquer número desde que obedecesse às relações de dependência identificadas. Possivelmente, sugestionados pela representação em forma de tabela, alguns alunos começaram a usar a noção de co-variância entre as grandezas, mas ainda de forma muito incipiente e com alguns erros decorrentes da tentativa de aplicação à segunda tarefa da estrutura aditiva presente na

primeira tarefa. Esta é também uma noção ainda em estado embrionário, mas que se mostra promissora para as etapas seguintes de construção da noção de variável.

Tendo em conta as formas de representação apresentadas nas resoluções dos alunos, a exploração destas tarefas permitiu a utilização de um conjunto diversificado de representações. Os alunos usaram a linguagem natural, tabelas, diagramas de setas e conseguiram, até mesmo, apresentar de forma simbólica os valores de A em relação a B, e vice-versa. Embora este processo ainda esteja numa fase inicial, pode constatar-se que os alunos começam a utilizar a linguagem simbólica para expressar matematicamente aquilo que traduzem em linguagem natural. A tentativa de um aluno de encontrar uma forma de escrever B em relação a A, na primeira tarefa, sem que isso lhe tenha sido solicitado, demonstra o reconhecimento da utilidade dessa representação e como os alunos lhe atribuíram valor e sentido. Após a sua exploração na aula, outros alunos procuraram essa forma de expressar as relações envolvidas, embora, nem sempre, a conseguissem expressar de forma correcta, o que é natural nesta fase inicial.

Para compreender melhor os resultados apresentados é importante considerar o trabalho desenvolvido até ao momento na experiência de ensino. Pela descrição, ainda que sucinta, de algumas das tarefas realizadas anteriormente, pode depreender-se a importância que teve para os alunos o trabalho desenvolvido em torno do sentido de número, nomeadamente a exploração de expressões numéricas envolvendo estratégias de cálculo, por exemplo. Essas tarefas permitiram trabalhar a generalização e simbolização a partir de expressões numéricas particulares passíveis de ser generalizadas. Este procedimento enquadra-se no conceito de *quase-variável* apresentado por Fujii (2003) e justifica a sua pertinência e utilidade para a construção do conceito de variável.

Concluindo, pode referir-se que os alunos conseguiram mobilizar o pensamento relacional nas tarefas com igualdades numéricas com duas variáveis. A expressão clara das relações envolvidas na igualdade numérica, a identificação da variação tendo em conta o seu valor e a sua direcção e, a utilização de casos particulares para a construção da generalização são indicadores de como os alunos fizeram uso do pensamento relacional. A utilização de diversas representações para expressar as relações envolvidas na igualdade numérica também revela a apreensão de uma forma de pensar que vai para além dos procedimentos básicos da aritmética e que atende à natureza estrutural das expressões numéricas envolvidas. No entanto, temos consciência de que esta é apenas

uma fase inicial de desenvolvimento do pensamento relacional por parte dos alunos. Os resultados aqui apresentados e a reflexão por eles suscitada constituem uma importante contribuição para subsequente desenvolvimento e aperfeiçoamento da experiência de ensino em curso.

Referências

- Blanton, M., & Kaput, J., (2005). Characterizing a classroom practice that promotes algebraic thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic & algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Carpenter, T. P., Levi, L., Franke, M. L. & Zeringue, J. K. (2005). Algebra in the elementary school: developing relational thinking. *ZDM – The International Journal on Mathematics Education*, 37(1), 53-59.
- Fujii, T. (2003). Probing Students' Understanding of Variables through Cognitive Conflict Problems: Is the Concept of a Variable So Difficult for Students to Understand? In N. A. Pateman, B. J. Dougherty, & J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 49–65). Honolulu: PME.
- Fujii, T., & Stephens, M. (2008). Using number sentences to introduce the idea of variable. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.) *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook*, (pp. 127-149). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Irwin, K., & Britt, M. (2005). The algebraic nature of students' numerical manipulation in the New Zealand Numeracy Project. *Educational Studies in Mathematics*, 58, 169-188.
- National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.
- Ponte, J. P. (2006). Números e álgebra no currículo escolar. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & P. Canavarró (Orgs.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 5-27). Lisboa: SEM-SPCE.
- Ponte, J. P.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Breda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M. & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: ME - DGIDC.
- Stephens, M. (2006). Describing and exploring the power of relational thinking. In P. Grootenboer, R. Zevenbergen & M. Chinnappan (Eds.), *Identities, cultures and learning spaces* (pp. 479-486). Canberra: MERGA.
- Stephens, M. & Wang, X. (2008). Investigating some junctures in relational thinking: a study of year 6 and year 7 students from Australia and China. *Journal of Mathematics Education*, 1(1), 28-39.
- Tabach, M., & Friedlander, A. (2008). The role of context in learning beginning algebra. In C. Greenes & R. Rubenstein (Eds.) *Algebra and algebraic thinking in school mathematics: Seventieth Yearbook*, (pp. 223-232). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.