A APRENDIZAGEM DA COMPARAÇÃO E ORDENAÇÃO DE NÚMEROS RACIONAIS ATRAVÉS DE UMA ABORDAGEM EXPLORATÓRIA[1]

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Marisa Quaresma
Escola Básica José Saramago, Poceirão, Palmela
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
marisa-quaresma@hotmail.com

Resumo

Procuramos saber em que medida uma unidade de ensino com uma abordagem de cunho exploratório, em que alunos do 5.º ano trabalham em simultâneo as várias representações dos números racionais, nos diferentes significados e com diferentes tipos de grandezas, proporciona o desenvolvimento da compreensão de número racional, em particular no que se refere à comparação e ordenação. A metodologia é qualitativa e interpretativa, com observação participante. Apresentamos dados da turma e do estudo de caso de uma aluna, recolhidos em duas entrevistas (com registos vídeo e áudio), produções escritas da aluna e testes diagnóstico e final. Os resultados mostram que a turma melhorou consideravelmente o seu desempenho nas questões envolvendo comparação e ordenação. A aluna melhorou a sua compreensão da ordenação e comparação de números racionais, mostrando-se mais proficiente tanto na representação em fracção como na representação decimal. Para comparar fracções com numeradores ou denominadores iguais usa estratégias informais. Para comparar fracções com numeradores e denominadores diferentes, usa sobretudo estratégias formais recorrendo principalmente à representação decimal. O estudo sugere que o trabalho com diferentes representações, numa abordagem exploratória, permite que os alunos aprendam a comparar e ordenar números racionais com base nas suas próprias estratégias, desde que combinem adequadamente os processos formais e informais.

Palavras-chave: Números racionais, Representações, Comparação, Ordenação, Aprendizagem.

Introdução

Munido das operações de adição e multiplicação, o conjunto dos números racionais constitui um corpo, uma importante estrutura algébrica. Uma das facetas desta estrutura

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projecto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

é a existência de uma relação de ordem total: dados dois números racionais $\frac{a}{b}$, e $\frac{c}{d}$ é sempre possível dizer qual deles é o maior ou se são iguais. A aprendizagem desta relação de ordem constitui um tópico do programa de Matemática, sendo importante para o desenvolvimento de uma compreensão aprofundada dos números racionais e para o estudo posterior dos números reais (nomeadamente dos intervalos em R). Para Behr, Harel, Post e Lesh (1992), a compreensão da ordenação e equivalência de fracções é fundamental para a "compreensão do número racional como uma entidade (isto é, um só número) e para a compreensão da grandeza do número" (p. 316).

Esta comunicação descreve o trabalho realizado no quadro de uma experiência de ensino no 5.º ano de escolaridade, sob o ponto de vista do desenvolvimento da capacidade dos alunos de compararem e ordenarem números racionais. O nosso objectivo é saber em que medida uma unidade de ensino em que os alunos trabalham em simultâneo as várias representações dos números racionais, nos diferentes significados, com diferentes tipos de grandezas e em tarefas sobretudo de cunho exploratório proporciona um efectivo desenvolvimento da compreensão de número racional, em particular no que se refere à comparação e ordenação.

Começamos por passar brevemente em revista as investigações realizadas sobre a comparação e ordenação de números racionais, após o que apresentamos a unidade de ensino e a metodologia de investigação. De seguida, apresentamos os resultados globais obtidos por toda a turma, bem como o desempenho de uma aluna antes da unidade e já depois desta terminada, procurando, por fim, discutir as implicações deste estudo.

Estudos sobre a comparação e ordenação de números racionais

Os estudos realizados pelo *Rational Number Project* marcam de forma decisiva o conhecimento sobre a aprendizagem dos números racionais e ainda hoje são uma referência importante, em particular no que se refere à sua comparação e ordenação. Como referem Post, Behr e Lesh (1986), antes de aprenderem os números racionais os alunos já conhecem os números naturais, havendo, uma influência desse conhecimento no modo como começam a pensar a ordenação dos números racionais. Por vezes essa influência é persistente, afectando negativamente a sua capacidade de compreenderem a relação de ordem dos números racionais.

No conjunto dos números naturais, os alunos podem pensar de duas maneiras diferentes, valorizando o aspecto cardinal do número (comparando a "grandeza" de dois números pela correspondência com elementos de dois conjuntos finitos que os representam) ou salientando o aspecto ordinal (considerando maior o número que vem depois na sequência de contagem,). Em contrapartida, não existe uma relação ordinal óbvia que permita ordenar os números racionais de forma simples. A observação de casos particulares como $\frac{1}{3}$ e $\frac{1}{4}$ sugere uma possível relação de ordem dada pela ordenação dos denominadores. No entanto, no caso geral, prestando atenção apenas aos denominadores (ou aos numeradores) não é possível comparar correctamente números racionais. De facto são necessárias diferentes estratégias para ordenar, por exemplo, $\frac{2}{3}$ e $\frac{2}{4}$ ou $\frac{3}{9}$ e $\frac{4}{9}$, ou $\frac{2}{5}$ e $\frac{3}{7}$. Como indicam Post et al. (1986), é necessário que os alunos compreendam que é a relação entre o numerador e o denominador que define o significado de uma fracção, e não as respectivas grandezas absolutas quando vistas de forma independente. Assim, $\frac{1}{2}$ é maior do que $\frac{4}{9}$, embora os dígitos que surgem em $\frac{1}{2}$ sejam menores do que os seus correspondentes em $\frac{4}{9}$. Os autores indicam que é necessário ajudar os alunos a colmatar a lacuna conceptual entre as estruturas aditivas e multiplicativas pois, alguns reflexos das suas concepções sobre os números naturais baseados nas estruturas aditivas podem perturbar o desenvolvimento das estruturas multiplicativas.

Post et al. (1986) apontam também que a noção quantitativa de número racional dos alunos deve incluir a compreensão de que os números racionais têm grandezas relativas e absolutas, e que podem ser entendidos tanto no sentido absoluto como no sentido relativo. Assim, a grandeza relativa de um par de quantidades representadas por números racionais pode ser avaliada apenas quando relacionadas com a unidade de que deriva o seu significado. Por exemplo, $\frac{1}{2}$ de uma pequena torta pode ter menos quantidade de torta que $\frac{1}{3}$ de uma torta grande. Enquanto isso, uma ordenação de valores absolutos existe dentro de um conjunto de números racionais relacionados com uma unidade comum. Por exemplo, $\frac{1}{3}$ é sempre inferior a $\frac{1}{2}$, se ambos se referem ao mesmo todo. E, como elementos do sistema matemático, $\frac{1}{3}$ é inferior a $\frac{1}{2}$, por exemplo, porque a unidade de comparação é 1. Post, Wachsmuth, Lesh e Behr (1985) referem que a ordenação de fracções exige os seguintes conhecimentos complexos: (i) a grandeza da fracção depende da relação entre os dois números naturais operada pelo símbolo de fracção; (ii) existe uma relação inversa entre o número de partes em que o todo está dividido e o "tamanho" de cada parte; e (iii) quando as fracções têm o mesmo denominador há uma relação directa entre o número de partes que se tomam e a grandeza da fracção.

As investigações de Post et al. (1986) mostraram que os alunos usam estratégias informais na resolução de tarefas de comparação de fracções. Uma delas é o *pensamento residual* que se refere à quantidade que é necessária para construir o todo. Assim, na comparação entre $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$, os alunos percebem que no primeiro caso falta $\frac{1}{6}$ para completar o todo (o valor residual) enquanto no segundo só falta $\frac{1}{8}$ e concluem então que $\frac{7}{8} > \frac{5}{6}$. Outra estratégia é *utilização de pontos de referência,* que envolve a comparação de duas fracções utilizando uma terceira como referência, frequentemente $\frac{1}{2}$ ou 1. Um aluno diz que $\frac{5}{8}$ é maior do que $\frac{3}{7}$, porque a primeira fracção é maior e a segunda é menor "do que a metade". Outra estratégia, ainda, é o *pensamento diferencial.* Alguns alunos afirmam que $\frac{5}{6}$ e $\frac{7}{8}$ são equivalentes, porque lhes falta apenas uma parte para formar o todo. Neste caso, focam-se na diferença entre 5 e 6 e entre 7 e 8, sem considerar a grandeza real da fracção, o que é uma forma característica de pensar quando de trabalha com números naturais e conduz geralmente a resultados incorrectos.

Post et al. (1992) referem que a predominância da influência dos números naturais também se verifica na ordenação de números racionais na representação de numeral decimal. Na verdade, os alunos apresentam frequentemente dificuldade na ordenação de numerais decimais com um número diferente de casas decimais. Por exemplo, quando ordenam 0, 4 e 0,39 utilizando o seu conhecimento dos números naturais, afirmam muitas vezes que "0,39 é maior do que 0,4 porque 39 é maior do que 4". Monteiro e Pinto (2006) referem igualmente esta dificuldade dos alunos.

A estratégia usual indicada no currículo escolar para comparar duas fracções é procurar fracções equivalentes com denominadores comuns. Por exemplo, para comparar $\frac{2}{5}$ e $\frac{7}{18}$

pode-se encontrar fracções equivalentes às dadas com denominador 90, $\frac{36}{90}$ e $\frac{35}{90}$, verificando-se assim que $\frac{2}{5}$ é maior. Contudo, como indicam Orton, Post, Behr, Cramer, Harel e Lesh (1995), este procedimento, geralmente, não é muito significativo para os alunos do 5.º ano. Pelo seu lado, Bezuk e Cramer (1989) indicam que uma estratégia possível para comparar e ordenar números racionais é escrevê-los na representação de numeral decimal. Associada a esta representação pode também usar-se a representação na recta numérica. Note-se que, de acordo com Gravemeijer (2005), a utilização de estratégias informais ajuda a encurtar o fosso entre o conhecimento pessoal informal dos alunos e o seu conhecimento formal. Nesta perspectiva, numa abordagem que enfatiza a capacidade dos alunos passarem facilmente de uma representação para outra, esta é uma estratégia que é natural utilizar.

Metodologia

Experiência de ensino

Este trabalho tem por base uma experiência de ensino concebida a partir da conjectura geral de ensino-aprendizagem (Cobb, Confrey, diSessa, Lehrer & Schaube, 2003) segundo a qual os alunos desenvolvem a sua compreensão e o seu sentido de número racional ao trabalharem simultaneamente as várias representações, nos diferentes significados, com diferentes tipos de grandezas e em tarefas de natureza diversificada (figura 1)

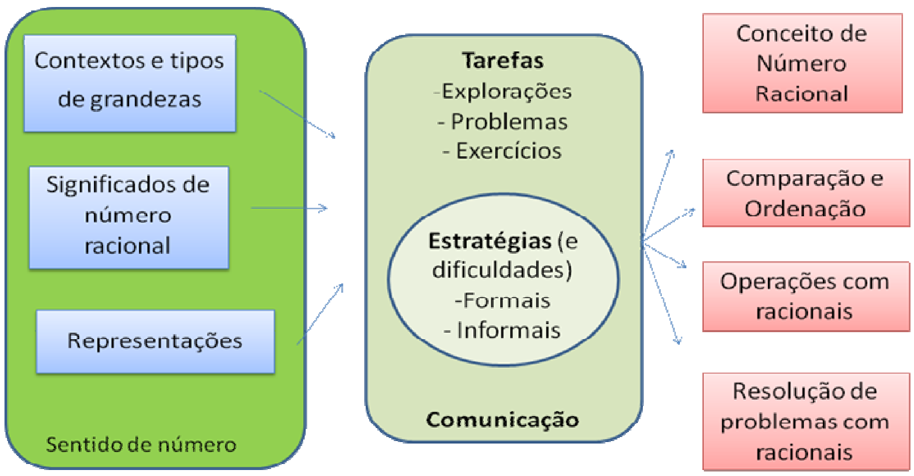


Figura 1. Quadro conceptual para o ensino-aprendizagem dos números racionais

Antes da planificação da unidade de ensino realizámos uma aula de diagnóstico de 90 minutos focada nos conhecimentos dos alunos sobre números racionais. Nesta aula foram propostas tarefas sobre a noção, ordenação e comparação de números racionais e equivalência de fracções, em diferentes representações. Os alunos ainda não tinham estudado estas noções, a não ser, eventualmente na forma decimal e no significado operador, mas, mostraram-se empenhados, esforçando-se por encontrar estratégias para resolver as tarefas. Mostraram dificuldade na linguagem própria das fracções, dizendo por exemplo "segunda parte" para se referirem a um meio, ou "terceira parte" para se referirem a um terço e evidenciaram algumas dificuldades na compreensão de números decimais. Contudo, mostraram bom desempenho na utilização de fracções unitárias como operadores, apoiando-se na ideia de divisão (o divisor é o denominador da fracção unitária). Assim, considerámos prioritário trabalhar aspectos do sistema de numeração decimal e da ordenação dos numerais decimais, como base para uma compreensão mais sólida e completa das noções a estudar.

Para além do diagnóstico, a elaboração da unidade tem em atenção o conhecimento da turma por parte da professora. Além disso, tendo por base as orientações curriculares do novo programa de Matemática (ME, 2007) e a revisão da literatura, consideramos importante: (i) enfatizar as inter-relações entre os vários significados de número racional (parte-todo, medida, quociente, operador e razão); (ii) promover a flexibilidade na conversão entre e dentro das várias representações de número racional (decimal, fracção, pictórica, percentagem e verbal); (iii) contemplar diferentes tipos de unidades e a respectiva construção; (iv) tratar a ordenação, comparação e equivalência de fracções antes das operações com fracções; e (v) reforçar as relações entre conceitos e procedimentos.

A unidade tem subjacente um percurso de ensino-aprendizagem constituído por diversas fichas de trabalho organizadas a pensar nas ideias e processos matemáticos a desenvolver pelos alunos. Começamos por introduzir as diferentes representações de número racional, evidenciando as relações existentes entre elas, bem como as respectivas conversões. De seguida, propomos tarefas na representação decimal nos diversos significados, envolvendo comparação e ordenação. Posteriormente, introduzimos fracções impróprias, numerais mistos fraccionários e percentagens, como novas formas de representação, utilizando representações pictóricas como apoio para que os alunos visualizem as transformações realizadas. Deste modo os alunos são estimulados a escolher a representação que mais se adequa ao contexto do problema ou pela qual tenham preferência. Propomos então tarefas envolvendo partilha equitativa, retomando a comparação e ordenação de números racionais estudada no 1.º ciclo na representação decimal, agora envolvendo também a representação em fracção. A comparação de fracções é introduzida começando por pares de fracções com numeradores iguais e com denominadores iguais. Pelo seu lado, a ordenação é realizada em situações envolvendo números representados em fracção, decimal e percentagem, começando por fracções simples que os alunos facilmente relacionam com as outras representações. Neste quadro, uma estratégia para comparar números racionais em diferentes representações ou dados por fracções com diferentes denominadores (e numeradores) passa por convertê-los na representação decimal. Para diversificar as estratégias de ordenação e comparação de números racionais, foi introduzida a recta numérica. Todas as tarefas propostas na unidade de ensino têm uma característica comum – usar representações e significados diferentes, para que os alunos adquiram flexibilidade nas conversões e para trabalharem de forma integrada os diversos significados de número racional. Além disso, propomos tarefas de natureza diversa, incluindo problemas, explorações e exercícios.

A realização das tarefas envolve três fases: (i) a apresentação da tarefa e o modo como os alunos a interpretam; (ii) o desenvolvimento do trabalho pelos alunos; e (iii) a discussão/reflexão final (Ponte, Oliveira, Cunha & Segurado, 1998). A actividade realizada na sala de aula envolve diferentes formas de trabalho. Na exploração das tarefas predomina o trabalho em pares. Procura-se que os momentos de discussão colectiva constituam, oportunidades para negociação de significados matemáticos e construção de novo conhecimento (Ponte, 2005). Valorizamos as estratégias intuitivas e informais dos alunos, bem como os seus conhecimentos anteriores. Assim, privilegiamos os processos informais e as representações que eles já conhecem para a partir dai introduzir, gradualmente, novas representações formais de número racional. A introdução de novas representações não implica deixar de usar as anteriores, mas sim adquirir flexibilidade para escolher a representação mais eficaz em cada contexto ou situação problemática. Procuramos que os problemas propostos envolvam, tanto quanto possível, contextos significativos para os alunos (Gravemeijer, 2005), de modo a que possam construir novo conhecimento com significado.

Metodologia de investigação

Esta investigação tem uma natureza essencialmente qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994), recorrendo também a dados quantitativos. Trata-se de uma investigação que incide sobre a prática profissional da primeira autora, que assumiu simultaneamente os papéis de professora e investigadora.

Apresentamos o caso de Leonor, uma aluna com bom desempenho em Matemática, que evidencia bom raciocínio, usa diversas estratégias na resolução de problemas e tem boa capacidade de comunicação oral e escrita. Revela também bom desempenho no cálculo mental, usando com destreza as propriedades das operações e relações entre números. A aluna é muito participativa na aula, gosta de novos desafios e mostrou-se entusiasmada com o estudo dos números racionais. Por tudo isto, é uma aluna cujo desempenho nos pareceu interessante estudar.

Foram realizadas duas entrevistas envolvendo tarefas matemáticas, uma antes e outra depois da unidade de ensino, tendo em vista conhecer a sua capacidade para lidar com o conceito de número racional, trabalhar com números racionais nas suas múltiplas representações, construir a parte, reconstruir a unidade e manipular diferentes tipos de unidade e resolver problemas envolvendo os vários significados dos números racionais. Pretendemos, também, compreender as suas estratégias e dificuldades na resolução de problemas. As entrevistas foram registadas em vídeo e áudio, sendo recolhidos e analisados os trabalhos escritos que realizou nas diversas tarefas.

A análise de dados assume um carácter descritivo e interpretativo. Procedemos à transcrição integral das gravações das entrevistas, usando na análise um sistema de categorias organizado em dois grandes temas: dificuldades e erros na utilização de várias representações de número racional (decimal, pictórica, fracção e percentagem) e estratégias e dificuldades na comparação e ordenação de números racionais.

Resultados da aprendizagem na turma

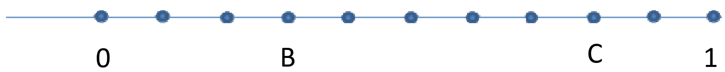
Antes da unidade de ensino foi aplicado um teste diagnóstico e no final foi aplicado um novo teste para avaliar as aprendizagens dos alunos. Trata-se, em ambos os casos, de testes que envolveram uma preparação cuidadosa, como instrumentos de avaliação das aprendizagens. No entanto, os testes não são comparáveis, sendo os itens do teste diagnóstico em geral, mais acessíveis que os do teste final. Os itens relativos a comparação e ordenação envolvem os diversos significados de número racional, usando sobretudo as representações decimal e fraccionária. Os resultados globais dos alunos estão indicados na Tabela 1.

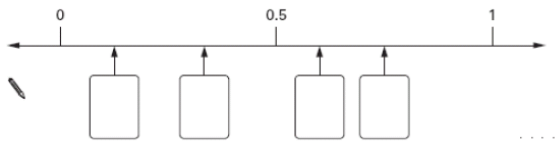
Tabela 1: Desempenho dos alunos nos testes diagnóstico e final (comparação e ordenação)

	Teste Diagnóstico			Teste Final		
Tipo de Questão	N.º de itens	N.º de respostas correctas na turma (n=21)	% de respostas correctas	N.º de itens	N.º de respostas correctas na turma (n=21)	% de respostas correctas
Comparação	9	74	40%	10	133	63%
Ordenação	6	38	30%	7	99	67%

No teste diagnóstico, os alunos mostram níveis de desempenho baixos nos itens relativos a comparação e ordenação de números racionais (na forma decimal e de fracção), o que é natural pois trata-se de assuntos que já estudaram há bastante tempo, e de modo possivelmente superficial, ou nunca estudaram. No teste final, os resultados são satisfatórios tanto nas questões de comparação como de ordenação. As percentagens globais de respostas correctas (63% e 67%), situam-se num patamar que traduz as características da turma, onde cerca de $\frac{1}{3}$ dos alunos tem bastante dificuldade em Matemática. Verifica-se um aumento significativo na percentagem das respostas correctas em relação ao teste inicial, como consequência do estudo formal destes tópicos. Alguns dos itens usados nestes testes e os resultados obtidos pelos alunos estão indicados nas Tabelas 2 e 3.

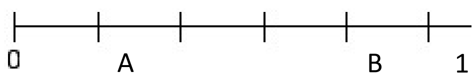
Tabela 2: Resultados dos alunos em diversos itens do teste diagnóstico

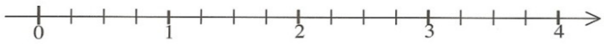
Item	N.º de respostas correctas na turma (n=21)	% de respostas correctas
1. Qual a distância entre B e C?  	8	38%
2. Observa a recta abaixo. Escreve cada uma das seguintes fracções nas caixas baixo $\frac{3}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{3}{5}$	0	0%

		
3. Ordena os seguintes números por ordem crescente: a) 3,10; 4,25; 3,5; 0,635; 4,255; 0,64	9	43%
b) $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{5}{8}$; 1; $\frac{5}{4}$; 1,5	0	0%
4. Qual é a fracção maior? De entre os pares de fracções faz um círculo em volta da maior. a) $\frac{2}{6}$ e $\frac{5}{6}$	12	57%
b) $\frac{3}{5}$ e $\frac{2}{4}$	14	67%
c) $\frac{5}{9}$ e $\frac{5}{10}$	3	14%

No teste inicial, nas questões 2 e 3b, envolvendo a representação em fracção e a recta numérica, nenhum aluno acertou. A questão 4c, envolvendo duas fracções com o mesmo numerador, permitia o uso de uma estratégia informal, mas foram muito poucos os alunos que acertaram. Ainda bastante difíceis foram as questões 1, envolvendo a recta numérica, e 3a, envolvendo a representação decimal. O desempenho foi melhor nas questões 4a,envolvendo fracções com o mesmo denominador, e 4b, que permite o uso do referencial de metade.

Tabela 3: Resultados dos alunos em diversos itens do teste final

Item	N.º de respostas correctas na turma (n=21)	% de respostas correctas
1. Observa a figura e indica qual a distância entre A e B. 	13	62%
2. Observa a recta a seguir indicada. Indica na recta cada um dos seguintes números. 1,5; 25%; $\frac{9}{4}$; $3\frac{3}{4}$	9	43%

		
3. Ordena os seguintes números por ordem crescente: a) 5,25; 0,635; 5,255; 0,64; 65%	14	67%
b) $2\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$; $\frac{7}{4}$; 1,75; $\frac{5}{5}$; 3,7	8	38%
4. Usando um dos símbolos >, < ou =, completa de modo a obteres afirmações verdadeiras: a) $\frac{6}{7}$..........$\frac{3}{7}$	18	86%
b) $\frac{5}{9}$.........$\frac{5}{3}$	16	76%
c) $\frac{2}{3}$........$\frac{4}{9}$	17	81%
d) $\frac{6}{12}$........$\frac{2}{3}$	17	81%

No teste final os alunos mostram ainda alguma dificuldade nas questões 3b, envolvendo numerais mistos, fracções impróprias, numerais decimais e percentagens, e 2, envolvendo também essas representações e ainda a recta numérica. O facto de algumas destas representações (numerais mistos e fracções impróprias) terem sido relativamente pouco usadas na unidade de ensino pode explicar estes resultados. Em contrapartida, atendendo às características da turma, notam-se níveis relativamente satisfatórios nos restantes itens, em que estas representações não estão presentes. Para uma maior compreensão do trabalho desenvolvido e das aprendizagens realizadas, apresentamos no ponto seguinte alguns exemplos relativos a uma aluna, antes e após a unidade de ensino, evidenciando aspectos significativos do seu percurso de aprendizagem.

Compreensão da comparação e ordenação de racionais antes da unidade de ensino

Começamos por mostrar como Leonor lida com questões de comparação e ordenação de números racionais na entrevista realizada antes da unidade de ensino.

Tarefa 1.

1. Ordena os seguintes números por ordem crescente:

   a) 0,5; 2,29; 0,45; 5,02; 2,200

   b) $\frac{1}{2}$; $\frac{7}{8}$; $\frac{3}{4}$

Esta tarefa, em contexto puramente matemático, envolve a ordenação de números racionais na representação decimal e fraccionária. Na questão 1a, Leonor começa por mostrar bastante à vontade na comparação dos dois números mais pequenos, acrescentando zeros para ter o mesmo número de casas decimais:

> *Leonor:* O maior… É crescente… O mais pequeno… É o 0,45.
>
> *Professora:* Porquê?
>
> *Leonor:* Porque se nós acrescentarmos mais um zero, fica 0,450 e este não (este) fica 0,500… A seguir é o 0,5… Depois é o 2,29… Depois é o 2,200…

Leonor, que tinha ordenado correctamente 0,5 e 0,45, erra na ordenação dos números 2,29 e 2,200. Começa por dizer que 2,200 é maior, sem ter em atenção o valor posicional do algarismo das centésimas que surge em 2,200 e 2,29. Mas quando a professora lhe pede que explique como está a pensar, auto-corrige-se e mostra perceber que o maior número é 2,29:

> *Professora:* Porquê?
>
> *Leonor:* Porque aqui já estão os 2 zeros e aqui se acrescentar um zero aqui fica 290 e aqui está só 200.
>
> *Professora:* Então qual é o maior desses dois números?
>
> *Leonor:* O maior destes dois números é este (2,29), não é este (2,200)… Tenho que trocar isto!

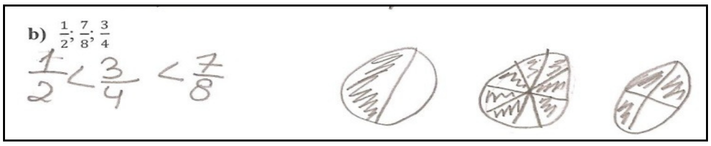
Leonor parece ter aprendido anteriormente o processo de acrescentar zeros para ficar com o mesmo número de casas decimais, mas sem o compreender completamente.

A questão 1b revela-se um problema difícil para a aluna já que esta não consegue fazer uma leitura verbal correcta de números expressos na representação fraccionária. Afirma que a maior fracção é $\frac{1}{2}$ porque se fosse, por exemplo, um bolo isso significava que comeria a metade e, segundo ela, metade "é muito". Em contrapartida, considera que $\frac{7}{8}$ não é tanto porque está "partido" em 8 partes. Ou seja, dá mais atenção ao número de fatias do que à quantidade de fatias que se tomam:

> *Leonor:* E agora tenho de pôr em [ordem] crescente estas, não é?
>
> *Professora:* Sim. Essas quê?
>
> *Leonor:* As fracções.
>
> *Professora:* Qual é que é o mais pequenino?
>
> *Leonor:* É o 7 por 8.
>
> *Professora:* Porquê?
>
> *Leonor:* Porque aqui no 1 por 2, só temos 2 é a metade e aqui temos a quarta parte e aqui temos a oitava parte… Temos a sétima parte só temos que dividir… Por 8, são 8 fatias e ele só come 7.
>
> *Professora:* Só?
>
> *Leonor:* Sim, e come menos. Muito menos do que se comesse 1 de 2.
>
> *Professora:* Muito menos?
>
> *Leonor:* Sim.

Leonor começa por considerar que $\frac{1}{2}$ é maior porque é uma fatia grande, enquanto aquilo que chama a "oitava parte" é mais pequeno. Na forma como se exprime percebe-se que compara apenas a fracção unitária em cada situação e não toma em consideração o numerador, ou seja, o número de partes do todo que se toma. Usa portanto uma estratégia informal (incorrecta) de atender, apenas, à dimensão das partes.

A professora vai fazendo perguntas à aluna no sentido de a levar a compreender o seu erro. Por fim, sugere-lhe que represente cada uma das fracções numa imagem, o que leva a aluna a ordená-las correctamente:



> *Professora:* Olhando agora para as imagens vê lá onde é que tu achas que se come menos e ordena.
>
> *Leonor:* Aqui come 7 fatias do bolo, aqui come uma que é a metade do bolo e aqui come a terça parte do bolo.
>
> *Professora:* A terça parte?
>
> *Leonor:* A quarta…

Professora: Quantas quartas partes?

Leonor: Três quartas partes.

Professora: Então agora ordena lá as imagens. Neste caso ordenas as fracções olhando para as imagens. Qual é que tu achas que é a mais pequenina? Em qual é que tu achas que comes menos?

Leonor: Em um por dois … E a seguir é 3 por 4… E depois o 7 por 8.

Professora: Então? Mudámos de perspectiva? Aquele que era o mais pequenino passou a ser o maior?

Leonor: Sim, porque come 7…

Neste caso, a mudança para a representação pictórica ajuda claramente Leonor na ordenação das fracções. Esta discussão mostra-se muito produtiva, pois a aluna através da representação pictórica das fracções contacta com a noção de equivalência de duas representações diferentes de um número racional.

Comparação e ordenação de racionais depois da unidade de ensino

Apresentamos agora o desempenho de Leonor na segunda entrevista, realizada depois de concluída a unidade de ensino.

Tarefa 1.

Um grupo de amigos foi lanchar e as 5 meninas dividiram quatro tartes e os quatro meninos dividiram três tartes iguais às das meninas.

a) Cada menina vai comer o mesmo que cada menino? Justifica a tua resposta?
b) Que fracção da tarte vai comer cada menina? E cada menino?

Depois de concluir, pictoricamente, que cada menino come $\frac{3}{4}$ de tarte e que as meninas comem $\frac{4}{5}$ de tarte, Leonor compara as duas fracções e tenta usar pensamento residual, tal como já tinha feito numa questão anterior:

Professora: E agora a pergunta: Cada menino vai comer o mesmo que cada menina?

Leonor: Sim.

Professora: Sim? Então isso quer dizer que $\frac{3}{4}$ é igual a $\frac{4}{5}$?

Leonor: Só falta um, aqui só falta $\frac{1}{5}$ para chegar à unidade e aqui só falta $\frac{1}{4}$ para chegar à unidade, mas aqui $\left(\frac{3}{4}\right)$ as fatias são maiores, porque só está dividido em 4.

Leonor considera que as fracções são iguais porque em ambas "só falta um" para chegar à unidade. Não atende ao denominador, ou seja, o "tamanho" de cada fatia, que é diferente, não dando atenção à grandeza das fracções. Deste modo, não considera a relação de compensação entre o "tamanho" e o número de partes iguais em que a unidade está dividida, evidenciando ainda a influência da forma de pensar nos números inteiros e acaba por usar pensamento diferencial (Post et al., 1986).

Conduzida pelas perguntas da professora, a aluna continua a reflectir sobre os dois números, percebendo a certo ponto que as fatias não são iguais:

Professora: Então onde é que comeram mais?

Leonor: Os meninos, porque a piza está dividida em menos partes e as fatias são maiores.

Professora: Então a fatia que sobra, ai sobra $\frac{1}{4}$, e aqui sobra quanto?

Leonor: $\frac{1}{5}$.

Professora: Então, qual é que é a fracção maior?

Leonor: $\frac{1}{5}$.

Professora: $\frac{1}{5}$ é maior do que $\frac{1}{4}$?

Leonor: Sim.

Professora: Cada fatia destas $\left(\frac{4}{5}\right)$ é maior do que cada fatia destas $\left(\frac{3}{4}\right)$?

Leonor: Não! É mais pequena.

Professora: Então $\frac{1}{5}$ é maior ou mais pequeno do que $\frac{1}{4}$?

Leonor: $\frac{1}{5}$ é mais pequeno que o outro ($\frac{1}{4}$)

Professora: Então o que sobra aqui ($\frac{1}{5}$) é maior ou mais pequeno?

Leonor: É mais pequeno

Professora: Então o que é que sobra aqui ?

Leonor: $\frac{1}{4}$.

A aluna mostra grande vontade de utilizar estratégias informais. Embora com alguma dificuldade, depois de alguma reflexão e das perguntas da professora, consegue concluir correctamente a relação entre a parte que sobra e a parte que se come.

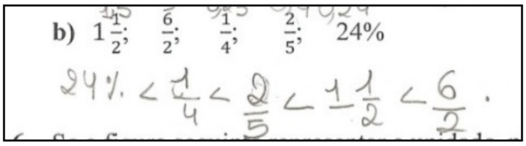
Nesta mesma entrevista consegue também de modo informal comparar $\frac{1}{6}$; $\frac{2}{12}$ e $\frac{2}{3}$ usando as fracções complementares $\frac{5}{6}$; $\frac{10}{12}$ e $\frac{1}{3}$. Mostra alguma hesitação a reconhecer que a maior fracção é aquela cuja parte que falta para fazer o todo é a mais pequena, mas finalmente faz um raciocínio correcto.

Tarefa 2.

Ordena os seguintes números por ordem crescente

a) $1\frac{1}{2}$; $\frac{6}{2}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{2}{5}$; 24%

Leonor verifica que existem números em representações diferentes e refere que, para os podermos comparar devemos convertê-los todos na mesma representação. Revela compreender que os números racionais podem ser representados de diferentes formas, mas opta por transformá-los em numerais decimais. Explica ainda que, a estratégia que usa para comparar os numerais decimais é acrescentar zeros, para ficarem todos com milésimas pois "assim é mais fácil" e afirma ainda que, devem ter todos o mesmo "nome" por senão não os conseguimos comparar.



Leonor: (…) Aqui podia ser 1,5 ($1\frac{1}{2}$), aqui podíamos dividir ($\frac{6}{2}$) para saber quanto é que era.

Professora: Fazíamos 6:3?

Leonor: Sim, 6:2.

Professora: E quanto é que dá 6:2?

Leonor: Dá 3. (Pensa alto enquanto faz as conversões) aqui é 0,25 ($\frac{1}{4}$), (…) não aqui dá 0,4 ($\frac{2}{5}$) e aqui 24% é 0,24. Primeiro é 0,24 que é 24%, depois 0,25, um quarto; depois $\frac{2}{5}$.

Professora: Depois o $\frac{2}{5}$ que é quanto? Como é que comparaste com o 0,25?

Leonor: Acrescentei zeros aqui (0,240), se acrescentar zeros aqui vamos ver que é maior (0,400). Agora o 1 e uma metade e o 3, 6 metades.

Assim, a aluna converte as fracções em numerais decimais, dividindo o numerador pelo denominador, compreende o numeral misto fraccionário e converte-o em numeral decimal sem recorrer a qualquer algoritmo. Contudo, utiliza a representação decimal apenas como apoio à ordenação uma vez que, na resposta utiliza sempre as representações dadas na pergunta.

Tarefa 3.

Num treino de basquetebol dois jogadores estiveram a fazer lançamentos ao cesto e Henrique conseguiu marcar 4 dos 6 lançamentos enquanto o Tomé conseguiu marcar 7 dos 12 lançamentos.

a) Representa sob a forma de fracção os lançamentos concretizados por cada um deles.
b) Indica quem deveria ser escolhido para representar a equipa e porquê.

Para comparar as fracções $\frac{4}{6}$ e $\frac{7}{12}$ a aluna utiliza a equivalência de fracções. Refere que, se ambos fizessem 12 tentativas o Henrique concretizaria mais golos. Justifica esta estratégia, dizendo que assim ambos estão na mesma "unidade" e depois compara apenas os numeradores.

a) Representa sob a forma de fracção os lançamentos concretizados por cada um deles. Henrique $= \frac{4}{6}$ Tomé $= \frac{7}{12}$ (

b) Indica quem deveria ser escolhido para representar a equipa e porquê.

$$\frac{4}{6} \underset{\times 2}{\overset{\times 2}{=}} \frac{8}{12}$$

Resposta: Quem devia ser escolhido para representar a equipa era o Henrique porque se ele tivesse feito 12 lançamentos tinha conseguido marcar 8 e o Tomé 7.

Leonor: Porque ele está mais perto da unidade. E se nós fizéssemos fracções equivalentes 6x2=12 e era igual. 4x2 é 8 e 6 x2 é 12

Professora: E isso quer dizer o quê?

Leonor: Que esta é maior ($\frac{8}{12}$) porque são os 2 da mesma unidade e 7 é mais pequeno do que 8.

Professora: Isso que dizer que se fizessem os dois 12 lançamentos…

Leonor: Era o Henrique que devia ser escolhido … Eu pus assim: Quem devia ser escolhido para representar a equipa era o Henrique porque ele se tivesse feito 12 lançamentos tinha conseguido marcar 8 e o Tomé 7.

Verifica-se que, após a unidade de ensino, Leonor mostra facilidade em usar as estratégias formais (conversão das fracções em numerais decimais ou em percentagens e a equivalência de fracções) para comparar fracções. Contudo, mostra por vezes alguma dificuldade no uso das estratégias informais como é o caso do *pensamento residual*.

Conclusão

A unidade de ensino permitiu aos alunos desenvolver o seu conceito de número racional e adquirir flexibilidade na conversão entre representações. No início os alunos tinham ainda dificuldade na comparação de números representados na forma decimal, com um número diferente de casas decimais, mas conseguiam comparar fracções em casos simples. Deste modo, mostravam ter algum conhecimento intuitivo, mas pouca compreensão dos processos formais que já tinham estudado.

O trabalho na unidade de ensino permitiu aos alunos desenvolver a sua compreensão do sistema decimal, deixando de ter dificuldades na comparação nesta representação. No fim da unidade de ensino, os alunos revelam muito maior à vontade na ordenação de numerais decimais do que no início, o que sugere que a decisão de realizar muito cedo um trabalho significativo com numerais decimais foi acertada, tal como a decisão de usar as diversas representações em simultâneo.

No caso das fracções, os alunos desenvolveram a capacidade de fazer comparações usando estratégias formais como a conversão das fracções em numerais decimais ou em percentagens, tal como sugerido por Bezuk e Cramer (1989), e a equivalência de fracções com denominadores comuns. Também usam estratégias informais, no caso das fracções apresentarem o mesmo numerador ou o mesmo denominar. Mas, no final, mostram ainda algumas dificuldades no uso de estratégias informais quando as fracções têm os numeradores e os denominadores diferentes. Apesar do trabalho feito na unidade, Leonor revela forte tendência para usar pensamento residual (Post et al., 1986) atestando a resistência das estruturas aditivas. O seu melhor desempenho surge quando a aluna se mostra capaz de usar estratégias já com um vincado carácter formal mas apoiadas directamente nas suas estratégias informais. Isto sugere que o grande problema do ensino é saber como promover a formalização progressiva das estratégias informais (Gravemeijer, 2005).

Deste modo, a aposta no desenvolvimento da capacidade de usar flexivelmente as diversas representações de números racionais, pondo em pé de igualdade as representações decimal e fraccionária e valorizando ainda a representação pictórica, revelou-se apropriada, fornecendo aos alunos um processo natural de ordenação de racionais. A abordagem exploratória, em que os alunos são colocados perante tarefas que têm que resolver recorrendo a estratégias por eles inventadas, revelou-se positiva no desenvolvimento da sua compreensão das relações entre representações e da relação de ordem dos números racionais.

Referências

Behr, M. J., Harel, G., Post, T., & Lesh, R. (1992). Rational number, ratio, and proportion. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 296-333). New York, NY: Macmillan.

Bezuk, N., & Cramer, K. (1989). Teaching about fractions: What, when, and how? In P. Trafton (Ed.), *New directions for elementary school mathematics* (pp. 156-167). Reston, VA: NCTM.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Cobb, P., Confrey, J., diSessa, A., Lehrer, R., & Schaube, L. (2003). Designing experiments in educational research. *Educational Researcher, 32*(1), 9-13.

Gravemeijer, K. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Monteiro, C., & Pinto, H. (2006). A aprendizagem dos números racionais. *Quadrante, 14*(1), 89-108.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do ensino básico*. Lisboa: DGIDC.http://sitio.dgidc.minedu.pt/matematica/Documents/ProgramaMatematica.pdf.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Orton, R., Post, T., Behr, M., Cramer, K., Harel, G., & Lesh, R. (1995). Logical and psychological aspects of rational number pedagogical reasoning. *Hiroshima Journal of Mathematics Education, 3*, 63-75.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Oliveira, H., Cunha, H., & Segurado, I. (1998). *Histórias de investigações matemáticas*. Lisboa: IIE.

Post, T., Behr, M., & Lesh, R. (1986). Research-based observations about children's learning of rational number concepts. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *8*(1), 39-48.

Post, T., Cramer, K., Behr, M., Lesh, R., & Harel, G. (1992). Curriculum implications of research on the learning, teaching, and assessing of rational number concepts. In T. Carpenter, L. Fennema & T. Romberg (Eds.), *Learning, Tteaching, and assessing rational number concepts: Multiple research perspectives* (pp. 327-362). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Post T., Wachsmuth I., Lesh R., & Behr M. (1985). Order and equivalence of rational number: A cognitive analysis. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*(1), 18-36.