"O SINAL DE IGUAL" – UM ESTUDO VERTICAL

Laura Bandarra
Agrupamento de Escolas Artur Gonçalves, Torres Novas
laurabandarra@hotmail.com

Resumo

O presente artigo tem como foco as perspectivas que os alunos de diferentes ciclos de escolaridade têm do sinal de igual. O estudo é uma primeira abordagem de uma investigação em desenvolvimento dedicada a compreender o pensamento algébrico numa perspectiva de articulação vertical. A recolha de dados relativa a este artigo foi realizada com alunos dos três ciclos de escolaridade, mais concretamente dos 2º, 5º e 8º anos, de turmas em que é leccionado o Programa de Matemática do Ensino Básico. Da análise dos dados conclui-se que alunos de diferentes anos possuem formas díspares de encarar o sinal de igual e que este facto interfere com a compreensão e aprendizagem de conceitos aritméticos e algébricos, e com o desenvolvimento do pensamento relacional.

Palavras-chave: Álgebra, Igualdade, Operacional, Relacional, Vertical.

Introdução

De acordo com as actuais orientações curriculares, a Álgebra escolar deve ser pensada desde os primeiros anos de escolaridade e fortemente ligada aos conceitos aritméticos (NCTM, 2007; ME, 2007). Assim, todos os alunos devem desenvolver o pensamento algébrico, ao longo do percurso escolar, porque os torna poderosos a resolver problemas, expande as suas oportunidades e fornece-lhes um conjunto de ideias matemáticas que são úteis em muitas profissões e carreiras (NCTM, 2007). Desta forma, a competência algébrica revela-se importante na vida adulta, quer no trabalho, quer como preparação para o ensino superior.

A esta visão transversal do ensino e da aprendizagem da Álgebra encontram-se interligadas duas noções fundamentais – a *generalização* e a *simbolização* – categorizadas como o "coração" do pensamento algébrico (Kaput, Blanton & Moreno, 2008), em que a Álgebra surge relacionada com as operações e propriedades aritméticas e o pensamento sobre as relações e formas e respectiva formalização. São também estas duas noções que Kaput (2008) utiliza para caracterizar o pensamento algébrico. Este investigador considera-as os "aspectos nucleares", e associa-lhes ainda três ramos: (i) o estudo de estruturas abstractas; (ii) o estudo de funções, relações e de variação conjunta de duas variáveis; e (iii) a utilização de múltiplas linguagens na modelação matemática e no controlo de fenómenos.

Neste contexto, a Álgebra escolar não se restringe ao ensino e aprendizagem de um conjunto de regras e técnicas, mas transforma-se numa forma de pensar e raciocinar, em que os alunos generalizam, modelam e analisam situações matemáticas (Kieran, 2007). Desta forma, os alunos necessitam de compreender os conceitos algébricos, as estruturas e o formalismo de forma a utilizarem, de forma adequada, a simbologia para registar as suas ideias e conclusões (NCTM, 2007).

No entanto, a simbologia é uma das grandes potencialidades da Álgebra, mas também é fonte de algumas controvérsias e dificuldades de aprendizagem dos alunos (Lannin, 2001). Por exemplo, o sinal de igual é um dos mais utilizados nas aulas de Matemática, mas a maioria dos alunos possui concepções limitadas sobre o seu significado e apenas o encara como operador (Falkner, Levi & Carpenter, 1999; Carpenter, Franke & Levi, 2003).

O sinal de igual e o pensamento relacional

De acordo com o NCTM (2007), a noção de *igualdade* deve ser desenvolvida ao longo do currículo e associada também à de *equivalência* e *equilíbrio*. Por sua vez, a brochura *Álgebra no Ensino Básico* (Ponte, Branco & Matos, 2009) considera fundamental que os alunos explorem situações em que o sinal de igual surja com significados distintos, nomeadamente como operador (uma operação a realizar), a indicar uma equivalência entre dois objectos matemáticos ou expressões ou para definir uma relação funcional.

Um estudo realizado por Carpenter et al. (2003) revela que os alunos do ensino básico encaram este sinal como um cálculo ou sequências de cálculos a efectuar e, na maioria dos casos, estabelecem uma analogia entre este e o procedimento da calculadora. Para estes investigadores, esta perspectiva sobre o sinal de igual impede que os alunos compreendam determinadas ideias matemáticas básicas e sejam flexíveis na sua representação e utilização. Por exemplo, ao resolverem a situação $8+4 = \square+5$, a maioria dos alunos considera que a solução do problema pode ser doze (se adicionarem o oito com o quatro) ou dezassete (se adicionarem todos os algarismos da situação ou efectuarem uma extensão do problema, $8+4=12+5=17$).

Para McNeil e Alibali (2005), a forma limitada como os alunos encaram a utilização do sinal de igual deve-se sobretudo às experiências matemáticas que vivenciam no ensino básico. Segundo estes investigadores, as situações de aprendizagem mais utilizadas resumem-se sobretudo ao cálculo para obter uma resposta numérica. Também Molina, Castro e Castro (2009) consideram que a visão operacional dos alunos resulta das aprendizagens pré-simbólicas originadas por situações aritméticas tradicionais e de limitações cognitivas.

No entanto, reconhecer e utilizar o símbolo de igual, de forma fluida, para expressar relações constituem ideias matemáticas importantes para a aprendizagem da Aritmética (Carpenter et al., 2003) e da Álgebra (Kieran, 1992; Carpenter, Levi, Franke & Zerigue, 2005). Os alunos que o encaram de forma redutora limitam-se a memorizar um conjunto de regras e manifestam dificuldades na compreensão das equações (Kieran, 1992; Falkner et al., 1999) e dos procedimentos para as resolver (Knuth, Stephens, McNeil & Alibali, 2006). Nesta situação, para resolver as equações, utilizam preferencialmente estratégias de natureza aritmética (substituem as letras por valores numéricos) ou pré-algébrica (recorrem às operações inversas).

Para alterar este panorama, Carpenter et al. (2003) aconselham a dinamização de discussões, colectivas ou em pequenos grupos, sobre as concepções que os alunos possuem acerca deste sinal. Segundo estes investigadores, tais momentos permitem articular ideias e criar diferentes contextos que desafiam as opiniões dos alunos, e fornecem uma "janela" para os seus pensamentos. Para além disto, afirmam que, ao defenderem as suas concepções, os alunos desenvolvem a capacidade de produzir argumentos matemáticos. Quanto às tarefas a concretizar, consideram que se deve optar pela exploração de igualdades numéricas, que não sejam apenas do tipo a+b=c, em que se analise a veracidade destas ou o preenchimento de espaços em branco. Sugerem também a utilização de palavras e notações para expressar relações (por exemplo, "oito é o mesmo que três mais cinco"). Defendem, ainda, que a concretização destas estratégias permite que os alunos evoluam na forma como encaram o sinal de igual e passem a considerá-lo como uma relação entre expressões numéricas, que até pode ser analisada sem o recurso ao cálculo. Por sua vez, Knuth et al. (2006) consideram que estas situações devem ser concretizadas em todo o ensino básico, pois os alunos que frequentam o final do 3.º ciclo também possuem concepções erróneas sobre este símbolo.

Esta forma de “olhar” para as expressões, igualdades e equações como um todo e de utilizar um pequeno conjunto de princípios matemáticos para estabelecer relações depende do desenvolvimento do pensamento relacional dos alunos. Este inclui também a capacidade de compreender e utilizar as propriedades fundamentais dos números e operações para estabelecer relações e possuir flexibilidade na concretização de procedimentos (Carpenter et al., 2003; Franke, Carpenter & Battey, 2008). O desenvolvimento do pensamento relacional inicia-se com a compreensão do sinal de igual e edifica-se quando os alunos conjecturam, generalizam e justificam. Este tipo de pensamento revela-se essencial para a aprendizagem da Aritmética e da Álgebra.

Para Carpenter et al. (2003) muitos alunos que terminam o ensino básico não desenvolvem este pensamento e apenas conseguem reproduzir procedimentos rotineiros. Desta forma, não reconhecem que a Aritmética e a Álgebra possuem as mesmas ideias fundamentais e não desenvolvem a sua compreensão da Matemática.

Em termos gerais, a literatura revela que o pensamento algébrico e, em particular, o relacional deve ser desenvolvido desde os primeiros anos de escolaridade. A par disto, considera que devem ser concretizadas situações de aprendizagem que permitam a compreensão dos diferentes significados do sinal de igual, sendo este um aspecto fundamental para a aprendizagem dos conceitos aritméticos e algébricos.

O objectivo e a metodologia do estudo

O presente artigo descreve um estudo desenvolvido no quadro de uma investigação mais ampla que se foca no pensamento algébrico dos alunos dos três ciclos de escolaridade, numa perspectiva de articulação vertical. Tem como objectivo analisar a forma como os alunos de diferentes ciclos de escolaridade encaram o sinal de igual, mais concretamente, o significado que atribuem a este sinal quando exploram determinadas tarefas.

A recolha de dados foi realizada com alunos dos três ciclos de escolaridade, nomeadamente uma turma do 2.º ano, outra do 5.º ano e duas do 8.º ano, de três escolas distintas do concelho de Torres Novas (uma por cada ciclo), com as quais trabalho regularmente[1]. Para a selecção das professoras titulares destas turmas tive em consideração os seguintes aspectos: (i) existência de hábitos de trabalho colaborativo; (ii) proximidade geográfica; (iii) possuírem formação no PMEB; e (iv) manifestarem interesse em colaborar comigo neste estudo. Por sua vez, as professoras seleccionaram as turmas com as quais possuem uma boa relação e conhecimento, tanto a nível global como individual.

Note-se que os alunos dos 2.º e 8.º anos de escolaridade encontram-se no segundo ano de implementação do PMEB e os do 5.º ano de escolaridade no primeiro. Os alunos do 2.º ano exploram situações que permitem desenvolver o sentido do número, a compreensão dos números e das operações e a capacidade de cálculo mental e escrito, e utilizam estes conhecimentos e capacidades para resolver problemas em contextos diversos (ME, 2007). As aulas dos alunos do 5.º ano de escolaridade são planificadas de acordo com as orientações do PMEB, mas a professora titular da turma salienta que a maioria dos alunos não compreende o significado do sinal de igual. Por sua vez, no ano anterior, ao explorarem tarefas relacionadas com o subtópico *Equações do 1.º grau*, os alunos do 8.º ano de escolaridade manifestaram algumas dificuldades em compreender a noção de *equação* e a resolver equações do 1.º grau, utilizando as regras de resolução.

A recolha de dados relativa a este estudo exploratório foi realizada durante os meses de Fevereiro e Março de 2011. Durante este processo, assumi o papel de observadora participante. Numa primeira fase, planifiquei com as professoras e acompanhei a exploração das tarefas e posteriormente reflecti em conjunto com elas sobre os resultados obtidos.

Foram concretizadas algumas tarefas que incluem o uso do sinal de igual pelos alunos e recolhidos os dados que permitem fazer a análise do significado que os alunos atribuem a este sinal. Estas tarefas foram inspiradas na literatura de investigação consultada e também na brochura *Álgebra no Ensino Básico* (Ponte et al., 2009) orientada pelo PMEB.

---

[1] Actualmente exerço o cargo de Professora Acompanhante do Plano da Matemática e do Programa de Matemática do Ensino Básico (PMEB). Neste âmbito, dinamizo reuniões regulares de planificação, elaboração e concretização de materiais e discuto possíveis estratégias a implementar na sala de aula com os professores das escolas que acompanho. As turmas referidas neste estudo pertencem a professores que acompanho profissionalmente neste contexto e que manifestaram interesse em compreender as razões das dificuldades dos alunos em usar de forma adequada o sinal de igual, em especial no 3.º ciclo.

A recolha de dados relativa aos alunos dos 2.º e 5.º anos tem como referência as tarefas 1[2] e 2[3] que a seguir se apresentam:

Tarefa 1:
Completa os seguintes espaços em branco:
12-4=13-   -6=15-7   14-9= -10
9-4= -3   17- =18-8

Os dados recolhidos foram diversificados. Relativamente aos 2.º e 5.º anos, foram registadas em áudio ou vídeo as justificações que os alunos apresentaram na realização das duas tarefas indicadas, bem como recolhidos os registos escritos que produziram.

No caso do 8.º ano, optou-se pela realização de um inquérito aos trinta e seis alunos das duas turmas que, no ano lectivo anterior, manifestaram muitas dificuldades na compreensão da noção de *equação* e na aplicação dos procedimentos algébricos para resolver equações de 1.º grau. Este instrumento foi aplicado no início da abordagem do tema *Álgebra*, no tópico *Equações*, com o objectivo de captar os significados que os alunos tinham interiorizado relativamente ao sinal de igual.

O inquérito continha cinco questões de resposta aberta, mas neste artigo irei analisar as respostas a apenas três situações. Para realizar este instrumento baseei-me nas situações propostas nos estudos realizados por Carpenter et al. (2003) e Knuth et al. (2006).

Para classificar as respostas fornecidas pelos alunos, verifiquei se a perspectiva que transmitiam era relacional ou operacional. Assim, uma resposta foi categorizada de *relacional* se a opinião do aluno residia na utilização do símbolo de igual para representar uma igualdade de expressões, e de *operacional* se o aluno considerava que o símbolo de igual representava o resultado a obter.

---

[2] Inspirada em Carpenter et al. (2003) e Molina et al. (2009).

[3] Retirada da brochura *Álgebra no Ensino Básico* (Ponte et al., 2009)

Apresentação e análise de dados

Os alunos do 2.º ano

Os vinte alunos do 2.º ano de escolaridade que exploraram estas tarefas já tinham analisado situações semelhantes. Apresenta-se de seguida excertos de aula onde se realizou a Tarefa 1 e a Tarefa 2, e inclui-se a análise do significado que os alunos atribuem ao sinal de igual.

No início da aula em que se realizou a Tarefa 1, a professora referiu que já tinha explicado anteriormente o significado do sinal de igual e que os alunos deveriam sombreá-lo a vermelho para reforçar a ideia de "que as coisas eram iguais dos dois lados". Quando iniciaram a exploração das situações, a professora lembrou esta justificação e os alunos coloriram o sinal de igual.

Após uma breve explicação das tarefas, os alunos individualmente preencheram os espaços em branco, manifestando, por vezes, dificuldades na compreensão da subtracção. Depois de alguns minutos de exploração, a professora colocou, no quadro, uma folha contendo o enunciado das tarefas e solicitou a alguns alunos que registassem as suas respostas e explicassem à turma os seus raciocínios.

Para resolver a primeira situação da Tarefa 1, 12-4=13- , João produziu a seguinte justificação:

> No 12 tiro 2 e ponho 3…é como juntar um. Para ter o 13 do outro lado, tenho de colocar mais 1 no 12. Se junto 1 no 12 tenho que tirar 1 do 4. Se em vez do 12 tenho o 13, tenho de juntar 1 ao 12 então tenho de juntar também 1 ao 4.

Podemos verificar que João analisou a igualdade numérica na sua totalidade e respondeu de forma correcta. Desta forma, manifestou que compreendeu a subtracção nos sentidos retirar, comparar e completar.

Quando João comunicou o seu raciocínio à turma, um aluno, Dinis, colocou o dedo no ar e afirmou que não concordava com essa justificação. Perante esta situação, a professora solicitou a Dinis, que indicasse como realizou o exercício. Nesta fase dos trabalhos, decorreu o seguinte diálogo:

Professora: Que número colocaste?
Dinis: Coloquei o 6.
Professora: Então diz lá….12-4…
Dinis: Dá 6.
Professora: Diz lá…13-6
Dinis: Dá 7. Ah! Tem de ser o 5.

Desta forma, a professora associou o significado do sinal de igual à igualdade de resultados entre operações.

Para a segunda situação, -6=15-7, Dinis utilizou um raciocínio muito semelhante ao do João e respondeu correctamente que "é 14 porque temos que tirar menos 1 do 7 e se no outro tem 6, temos que tirar menos 1". Desta forma, este aluno manifestou que encara a igualdade numérica como um todo e subtraiu, recorrendo a estratégias de cálculo mental.

Ao resolver 9-4= -3, Rafael comentou que colocou o valor 8, mas que considerou que deve ser 6. Perante esta afirmação, estabeleceu-se o seguinte diálogo entre este aluno e a professora:

Professora: Quanto é que dá 9-4?
Rafael: 5.
Professora: E 6-3?
Rafael:3.
Professora: Então dá o mesmo dos dois lados?
Rafael: Não.
Professora: Olha… coloca os resultados em cima, para perceberes melhor.
(Rafael escreve os valores por cima de ambos os membros da igualdade)
Rafael: Oh, não dá.
Professora: Então ? Qual é o número que dá?
Rafael: o 5.

Desta forma, para ajudar o aluno a resolver a situação de forma correcta a professora propõe a realização de registos informais.

Durante a resolução da situação 17- =18-8, Gonçalo enunciou o seguinte raciocinio: "olhei para a casa das unidades e vi que que era 8. 18-8 dá 10. Tenho 8 e 8. Na outra tenho de por 7 para ser 17 e 7."

Por fim, Miguel resolveu o último exercicio, 14-9= -10, de forma incorrecta, pois considerou que a solução era 5. Para justificar este valor, o aluno afirmou o seguinte:

"Eu meti 5 porque se tirarmos de 10, 5 fica 5". Perante esta afirmação, a professora lembrou o aluno e o resto da turma da história das maçãs.

> Lembram-se quando contei a história das maçãs? Tinha maçãs num bolso e no outro bolso e tinha que tirar. Lembram-se quando eu não tinha nada no bolso…tinha 0 maçãs? Eu podia tirar 45 maçãs?

Perante esta intervenção da professora, os alunos cometaram que não poderiam retirar as quarenta e cinco maçãs e que apenas se deveria utilizar um valor mais pequeno do que o número total de maçãs. Em particular, Miguel percebeu que o valor inicialmente proposto, cinco, não é o correcto e alterou a sua resposta para quinze.

Analisando este momento da aula, verificamos que, para auxiliar os alunos na resolução de uma situação, a professora recorreu a um problema já explorado, que envolvia as operações com os números naturais.

Depois de analisarem as respostas e os raciocínios de alguns alunos e esclarecerem algumas dúvidas pontuais que foram surgindo, os alunos resolveram a Tarefa 2. De acordo com as informações fornecidas pela professora, durante a planificação desta aula, estes alunos já tinham explorado situações análogas.

Da análise dos registos efectuados pelos alunos durante a exploração desta tarefa, verificamos que estes utilizaram estratégias diferentes para explicar os seus raciocínios.

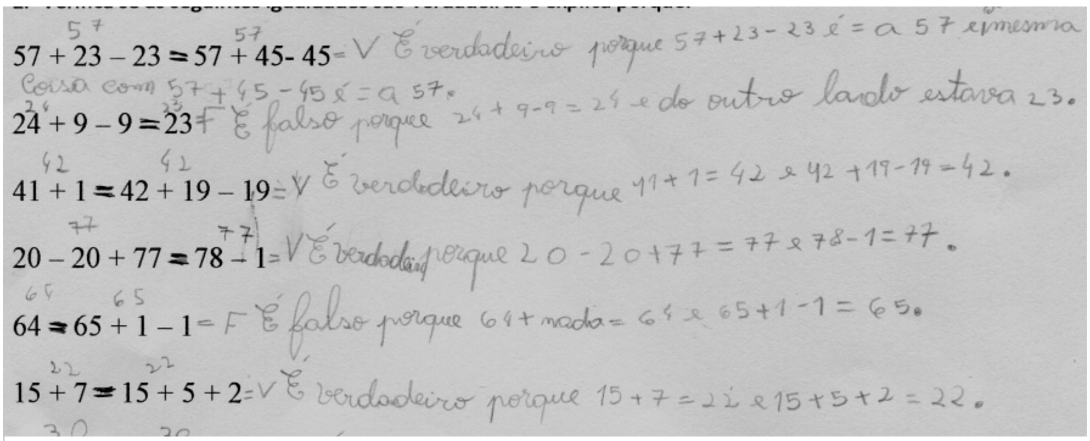

Figura 1. Resolução efectuada por Ana na Tarefa 2

Observando as justificações de Ana, constatamos que a aluna destaca o sinal de igual, efectua as operações indicadas, utilizando a representação horizontal, e verifica se os resultados são os mesmos em ambos os membros da igualdade. Ana considera que a afirmação é verdadeira se os valores obtidos são iguais e falsa na situação contrária. Desta forma, a aluna reconhece que o sinal de igual pode ser utilizado para expressar uma equivalência.

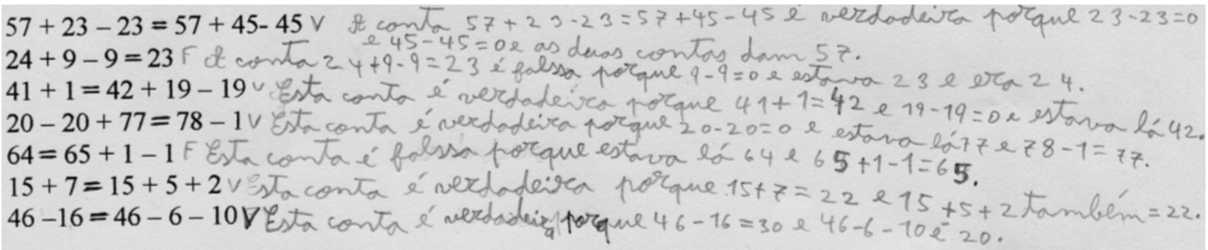

Figura 2. Resolução efectuada por Teresa da Tarefa 2

Por sua vez, Teresa encara a igualdade como um todo e verifica que em algumas situações existe a adição e subtracção do mesmo valor e que o resultado destas operações é zero. Para os restantes casos, a aluna efectua as operações e regista os seus raciocínios de forma clara, utilizando a representação horizontal e estratégias de cálculo mental escrito.

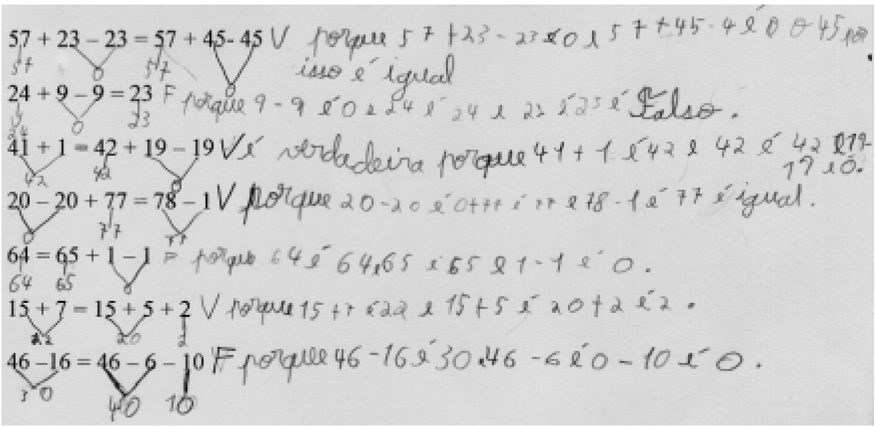

Figura 3. Resolução efectuada por David da Tarefa 2

Já David encara a igualdade como um todo, utiliza esquemas para realizar subtracções cuja diferença seja zero, regista em linguagem natural estes valores e verifica se existe uma igualdade numérica de resultados. Caso isto ocorra, o aluno considera que a afirmação é verdadeira; na situação contrária, atribui o valor lógico Falso. Da análise do seu trabalho, podemos, ainda, verificar que David resolve de forma incorrecta a última igualdade numérica, pois, embora registe que o resultado da subtracção de 46 com 6 é 40, na sua justificação considera que esta diferença é zero.

Na discussão global dos resultados obtidos realizada com o grupo-turma, os alunos apresentaram esquemas e raciocínios idênticos aos de David. Nesta fase da aula, a maioria dos alunos resolveu e justificou correctamente as diversas situações.

No entanto, Alexandre utilizou uma estratégia incorrecta para a situação 41+1=42+19-19, pois adicionou 42 com 19 e subtrai 19 com 19. Perante esta resolução, a professora lembrou os alunos que já trabalharam com exercícios semelhantes e que não deveriam utilizar os mesmos valores duas vezes. Desta forma, com esta ajuda, o aluno consegue resolver correctamente o exercício.

Por sua vez, Liliana afirmou que não consegue resolver as duas últimas situações porque "as outras dão sempre zero de um lado e do outro e aqui não dá". Perante isto, a professora solicitou a esta aluna que resolvesse a penúltima situação, 15+7=15+5+2. Com a ajuda de alguns alunos da turma, Liliana adicionou correctamente as diversas parcelas, utilizando a representação horizontal, e concluiu com sucesso o exercício.

Em termos gerais, os alunos desta turma encaram o sinal de igual de uma forma relacional. Consideram a igualdade como um todo e usam estratégias de cálculo, mental ou escrito, baseadas nas propriedades das operações e nas relações entre números e operações para concluir se existe um equilíbrio nos resultados obtidos. Nas operações com os números naturais utilizam a representação horizontal e entendem os sentidos retirar, completar e comparar da subtracção.

Joana e Mafalda - As alunas do 5.º ano

Em relação ao 5.º ano de escolaridade, apresento a forma como duas alunas encaram o sinal de igual ao explorarem cinco tarefas matemáticas, no decorrer de uma entrevista. Duas destas situações eram comuns às que foram analisadas pelos alunos do 2.º ano, o que possibilitou também comparar as justificações dos alunos dos 2.º e 5.º anos.

Joana e Mafalda possuem um desempenho regular na disciplina de Matemática. Foram seleccionadas para esta entrevista pela sua professora de Matemática porque manifestaram interesse em colaborar neste estudo e gostam de participar em actividades extra lectivas.

Sobre o significado do sinal de igual, Joana possui ambas as perspectivas: a relacional e a operacional. Afirmou que este pode representar um resultado ou uma igualdade de resultados entre dois membros, mas que, em determinadas situações, considera que significa um resultado. Referiu que, quando se depara com este sinal, associa-o ao cálculo. Já Mafalda apenas encara este sinal de uma forma operacional, pois considerou que ele é utilizado para “dizer o resultado de uma conta e que não tem outro significado”.

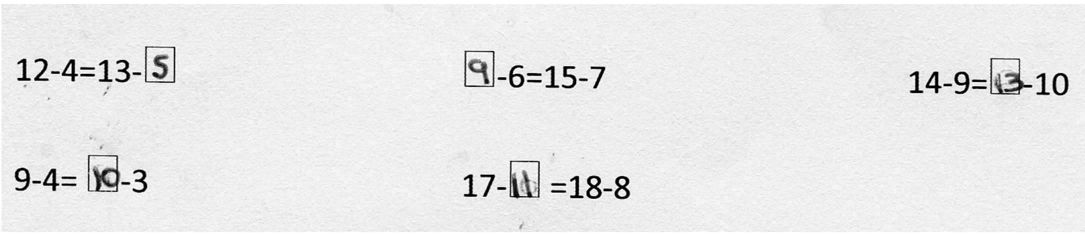

Figura 4. Resolução efectuada por Joana da Tarefa 1

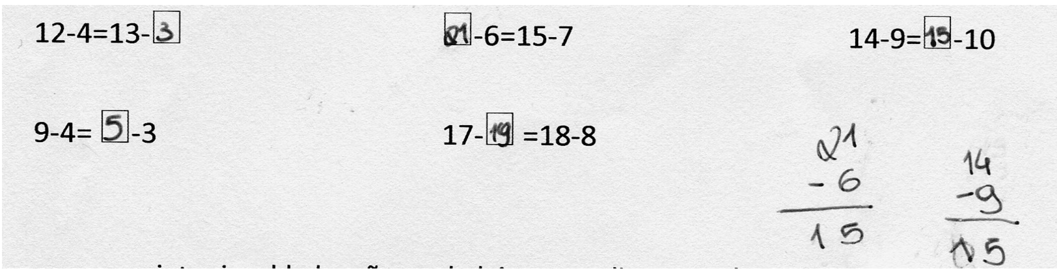

Figura 5. Resolução efectuada por Mafalda da Tarefa 1

Na Tarefa 1, para a situação 12-4=13- , Joana encarou a igualdade como um todo, comparou os aditivos de ambas as subtracções e verificou que se tem 12 num membro e no outro 13 então deve colocar 5 no espaço em branco. Explicou este raciocínio da seguinte forma: “Do 12 para o 13 juntou-se um, então ao 4 tem de se juntar também mais um, fica 5…vejo 12 e 13 e fica 4 e 5”. Em contrapartida, Mafalda comentou que não entendeu este exercício porque o espaço a preencher não se situava após o sinal de igual. A aluna resolveu a situação de forma incorrecta, pois considerou 17- =18-8 e conclui que “se nesta temos 18 e 8 então em cima temos 13 e 3”.

Na resolução de -6=15-7, Joana subtraiu 7 a 15, verificou que o resultado deste cálculo é 9 (de forma incorrecta) e preencheu o espaço em branco com este algarismo. De igual modo, Mafalda adicionou 15 com 6 e considerou que se deve colocar 21. Desta forma, ambas as alunas encaram o sinal de igual de uma forma operacional.

Nas situações 14-9= -10 e 9-4= -3, Joana utilizou o mesmo tipo de raciocínio. Assim, comparou as duas subtracções e verificou que ”se de 9 passa para 10 então de 14 passa para 13”, para a primeira, e “se de 4 passa para 3 então de 9 passa para dez”, na segunda. Assim, esta aluna resolveu estes exercícios sem verificar se os resultados obtidos estão correctos e manifestou alguma dificuldade em compreender o algoritmo da subtracção. Já Mafalda realizou as subtracções, utilizando a representação vertical, e concluiu que “14 menos 9 dá 15 e 9 menos 4 dá 5”.

Para 17- =18-8, Joana verificou que deve colocar onze no espaço em branco porque “do 17 para o 18 vai 1 e temos 17 e 18 logo é dez…1 e 10 fica 11”. Nesta situação a aluna encarou o sinal de igual como operador e efectuou um cálculo mental incorrecto para a subtracção. Da mesma forma, Mafalda subtraiu 17 com 19 e concluiu, de forma equívoca, que o valor a colocar era 19 porque “de 9 para 7 vão 8, e vai 1, 1 mais1 é 2 e 1 menos 2 é 1”.

Em termos gerais, durante a resolução da Tarefa 1, Joana mostrou que simultaneamente possui uma visão operacional e relacional do sinal de igual. Em determinadas situações, a aluna encarou a igualdade como um todo e comparou os algarismos e as subtracções, mas, por vezes, considerou que este sinal significa um resultado e efectua cálculos mentais incorrectos para subtrair. Já Mafalda encarou sempre o sinal de igual de uma forma operacional. Para resolver as situações, esta aluna usa a representação vertical para realizar o algoritmo da subtracção.

Na Tarefa 2, para as cinco primeiras situações, Joana utilizou sempre o mesmo raciocínio. A aluna encarou a igualdade como um todo, comparou os membros das igualdades, verificou que em ambos os lados do sinal de igual existem subtracções cujas diferenças são zero e atribuiu às afirmações valores lógicos correctos. Na situação 15+7 =15+5+2, adicionou cinco com dois, verificou que o total desta operação é sete e considerou que a afirmação é verdadeira porque “adicionamos o 7 dos dois lados do igual”. Para determinar o valor lógico de 46-16=46-6-10, a aluna efectuou as subtracções em ambos os membros do sinal de igual e concluiu que esta afirmação também é verdadeira porque “30 é igual a 30”.

Durante a resolução desta tarefa, Joana mostrou que encara o sinal de igual de uma forma relacional, pois analisou as igualdades na sua totalidade e efectuou cálculos mentais correctos para responder. A aluna possuiu facilidade em trabalhar com a adição de números naturais, mas, quando se deparou com subtracções, efectuou todas as operações e não conseguiu comparar as propriedades da adição com as da subtracção.

Para explorar as diversas situações desta segunda tarefa, Mafalda utilizou sempre o mesmo tipo de estratégia: efectuou as operações indicadas no primeiro membro do sinal de igual e verificou se o resultado obtido coincidia com o valor expresso a seguir ao sinal de igual. Desta forma, a aluna encarou sempre este sinal de uma forma operacional e mostrou dificuldades em utilizar o algoritmo da subtracção.

Os alunos do 8.º ano

Como já referi, o inquérito realizado continha cinco questões de resposta aberta, mas neste artigo irei analisar as respostas a apenas três situações.

Questão 1: Na expressão $a = b+2$, qual é maior o a ou o b? Explica o teu raciocínio.

Analisando as respostas fornecidas pelos alunos para esta questão, verifica-se que sete (19,44 %) consideram que não se pode afirmar qual deles é maior e justificam que estes valores são incomparáveis porque as letras a e b são diferentes.

Também seis alunos (16,67%) afirmam que o maior valor é o de b. Destes alunos, cinco (13,89%) justificam que se adicionou duas unidades a b e um aluno (2,78%) não explica a sua resposta.

Por sua vez, vinte e três alunos (63,89%) consideram que o valor do a é maior que o do b. Para justificar esta resposta, seis alunos (16,67%) referem que o sinal de igual significa uma equivalência entre duas quantidades (relacional), três (8,33%) concretizam valores particulares para a e b, um aluno utiliza a manipulação simbólica (2,78%), treze (36,11%) encaram o sinal de igual como um cálculo a efectuar e afirmam que "representa o resultado" (operacional) e um aluno (2,78%) não justifica a sua opção.

Questão 2: Considera a expressão $3+4\underset{\uparrow}{=}7$.

- Como se chama o símbolo assinalado e o que significa?
- Este símbolo poderá ter outro significado? Qual ou quais?

Das respostas fornecidas pelos alunos, podemos verificar que a maioria dos alunos possui uma visão operacional do sinal de igual e alguns deles nem o interpretam correctamente ou compreendem o significado das variáveis.

Para esta questão, dos trinta e seis alunos que responderam ao inquérito, onze (30,56%) consideram que o sinal de igual pode ser utilizado para representar um resultado ou uma igualdade entre expressões (relacional) e vinte e cinco alunos (69,44%) consideram que apenas pode representar um cálculo a efectuar (operacional).

Questão 3: Que valor de m torna verdadeiras as seguintes afirmações? Explica o teu raciocínio.

a) $4m+10 = 70$
b) $3m+7=25$

Comparando as respostas dadas às duas questões anteriores, verificamos que dos dez alunos (27,78%) que possuem uma perspectiva relacional do sinal de igual, dois (5,56%) não conseguem resolver equações, três (8,33%) utilizam pelas tentativas numéricas, três (8,33%) efectuam as operações inversas e dois alunos (5,56 %) optam pelas regras de resolução de equações.

Por sua vez, dos vinte e seis alunos (72,22%) que encaram o sinal de igual como um resultado, treze (36,11%) utilizam as tentativas numéricas, sete (19,44%) não respondem, cinco (13,89%) utilizam as operações inversas e apenas um aluno (2,78%) consegue utilizar as manipulações simbólicas e o formalismo algébrico, para resolver esta questão.

Dos resultados obtidos nestas questões, podemos verificar que a maioria dos alunos considera que o sinal de igual representa um cálculo a efectuar e associam-no às operações aritméticas. Para resolver equações, utilizam maioritariamente as tentativas numéricas (estratégia aritmética) ou as operações inversas (estratégia pré-algébrica). Existe, ainda, um grupo de alunos que não consegue resolver as equações. Podemos também constatar que os alunos que possuem uma visão relacional do sinal de igual recorrem mais vezes às regras de resolução de equações, mas os que optam por esta estratégia ainda são em número muito reduzido.

Conclusões

Da realização deste estudo conclui-se que os alunos de diferentes ciclos encaram o sinal de igual de forma distinta.

Assim, a maioria dos alunos do 2.º ano de escolaridade possui uma visão relacional do sinal de igual, pois encara as igualdades numéricas como um todo e usa estratégias de cálculo, mental ou escrito, baseadas nas propriedades das operações e nas relações entre números e operações para concluir se existe um equilíbrio nos resultados obtidos. Nas operações com os números naturais, os alunos utilizam a representação horizontal e entendem os sentidos retirar, completar e comparar da subtracção. Para resolverem alguns dos exercícios, certos alunos efectuam todas os cálculos para constatar se existe igualdade numérica, enquanto outros evidenciam um maior desenvolvimento do pensamento relacional e a capacidade de compreender e utilizar as propriedades fundamentais dos números e operações para estabelecer relações e possuir flexibilidade na concretização de procedimentos (Carpenter et al., 2003; Franke et al., 2008).

Em relação ao 5.º ano de escolaridade, uma aluna mostrou que possui simultaneamente uma visão operacional e relacional do sinal de igual. Em determinados casos, considera a igualdade como um todo e efectua cálculos mentais correctos para responder, embora manifeste alguma dificuldade com a subtracção de números naturais e com os sentidos retirar, comparar e completar. Por vezes, para resolver estas situações, esta aluna utiliza o sentido operacional do sinal de igual. Em contrapartida, a outra aluna encarou sempre este sinal de uma forma operacional: efectuou as operações assinaladas no primeiro membro da igualdade, utilizando as representações verticais das operações, e analisou se o resultado obtido coincidia com o valor apresentado após este símbolo.

Já o inquérito realizado a alunos do 8.º ano de escolaridade revelou que a maioria deles possui uma visão operacional do sinal de igual, pois consideram que este representa um cálculo e efectuar. Para resolver as equações, utilizam preferencialmente estratégias de natureza aritmética ou pré-algébrica (Knuth et al., 2006) e um número muito reduzido de alunos recorre às regras de resolução de equações. Desta forma, podemos concluir que uma concepção limitada do sinal de igual interfere com a compreensão dos conceitos e algoritmos algébricos (Carpenter et al., 2003) e, em particular, das equações de 1.º grau.

Da análise destas constatações, podemos concluir que, durante todo o Ensino Básico, devem ser concretizadas situações que permitam analisar os diferentes significados do sinal de igual e desenvolver o pensamento relacional, pois destes dependem a compreensão dos conceitos aritméticos e algébricos.

Para além disto, também devemos considerar o tipo de tarefas a concretizar e o ambiente de sala de aula. Assim, os alunos que manifestam melhores desempenhos, os do 2.º ano de escolaridade, já tinham analisado igualdades numéricas semelhantes às propostas, em que o sinal de igual surge associado a diferentes significados, costumam comunicar as suas estratégias oralmente ou por escrito e exploram situações diversas que permitem desenvolver o pensamento relacional. Por sua vez, embora também se encontrem no segundo ano de implementação do PMEB, os alunos do 8.º ano possuem uma visão redutora do sinal de igual e evidenciam a necessidade de explorarem situações em que este surge associado a outros significados.

Sendo assim, urge concretizar estratégias e iniciativas que fomentem o trabalho colaborativo entre professores dos três ciclos de ensino e que promovam a troca de saberes e experiências entre professores de todos os níveis de ensino, pois delas depende a aprendizagem dos nossos alunos.

Referências

Carpenter, T. P., Franke, M. L., & Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: Integrating arithmetic and algebra in elementary school*. Portsmouth, NH: Heinemann.

Carpenter, T.P., Levi, L., Franke, M. & Zeringue, J. (2005). Algebra in the elementary school: Developing rational thinking. *ZDM, 37*(1), 53-59.

Falkner, K. P., Levi, L., & Carpenter, T. P. (1999). Children's understanding of equality: A foundation for algebra. *Teaching Children Mathematics*, *6*, 232-236.

Franke, M. L., Carpenter, T. P., & Battey, D. (2008). Content matters: The case of algebraic reasoning in teacher professional development. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton, (Eds.) *Algebra in the Early Grades* (pp. 333-359). Hillside, NJ: Lawrence Erlbaum.

Kaput, J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp.5-17). New York: Lawrence Erlbaum Associate.

Kaput, J., Blanton, M., & Moreno, L. (2008). Algebra from a symbolization point of view. In J. Kaput, D. Carraher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp.133-160). New York: Lawrence Erlbaum Associates.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In Grows, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390-419). New York: MacMillan.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching Algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F.K.Lester, Jr., (Ed.), *Second Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Knuth, E., Stephens, A., McNeil, N., & Alibali, M. (2006). Does understanding the equal sign matter? Evidence from solving equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *37* (4), 297–312.

Lannin, J. K. (2001). *Developing middle school students' understanding of recursive and explicit reasoning.* Unpublished doctoral dissertation, Illinois State University. Acedido em 10 de Agosto, 2010, de http://matheducation.missouri.edu/homepages/john/Chapter2.pdf.

McNeil, N., & Alibali, M. (2005). Knowledge change as a function of mathematics experience: All contexts are not created equal. *Journal of Cognition and Development*, *6* (2), 285–306.

Ministério da Educação (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Ministério da Educação, DGIDC.

Molina, M., Ambrose, R., Castro E., & Castro, E. (2009). Breaking the addition addiction: creating the conditions for knowing-to act in early algebra. En S. Lerman y B. Davis (Eds.), *Mathematical Action & Structures Of Noticing: Studies inspired by John Mason* (pp. 121-134). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publisher.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos A. (2009). *A Álgebra no ensino básico*. Ministério da Educação, DGIDC.