RACIOCÍNIO MATEMÁTICO EM CONTEXTO ALGÉBRICO UMA ANÁLISE COM ALUNOS DE 9.º ANO[1]

Joana Mata Pereira
Escola Básica 2,3 Francisco de Arruda, Lisboa
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
joanamatapereira@gmail.com

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo

Esta comunicação analisa os processos de raciocínio de dois alunos do 9.º ano na resolução de problemas algébricos. Fazemos uma análise qualitativa e interpretativa da resolução de duas tarefas envolvendo múltiplos por estes alunos, procurando compreender os tipos e os processos de raciocínio matemático. Os resultados comprovam que os alunos, apesar de terem alguma facilidade em formular conjecturas, não sentem necessidade de as testar e justificar. Além disso, para os alunos, o uso da Álgebra na resolução de problemas é por vezes pouco natural e evidenciam dificuldades nas traduções entre as linguagens natural e a algébrica. Por outro lado, não mostram flexibilidade para usar diferentes tipos de raciocínio.

Palavras-chave: Raciocínio, Representações, Álgebra, Pensamento algébrico.

Introdução

No ensino da Matemática, o grande objectivo é o desenvolvimento da capacidade dos alunos pensarem matematicamente. Trata-se, no entanto, de um objectivo ambicioso. A simples aprendizagem de conceitos, algoritmos e procedimentos rotineiros é insuficiente para levar os alunos a perceber a Matemática como uma disciplina lógica e coerente (ME, 2007). Para que exista compreensão efectiva dos procedimentos pelo aluno, é necessário o desenvolvimento do raciocínio. Esta compreensão dos procedimentos passa não só pela sua aplicação, mas também por compreender porque funcionam, como podem ser utilizados e como os seus resultados podem ser interpretados (NCTM, 2009). Ou seja, como refere o NCTM (2007), “ser capaz de raciocinar é essencial para a com-

[1] Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projecto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

preensão da Matemática" (p. 61). Por isso, é fundamental conhecer os processos de raciocínio dos alunos.

Esta comunicação analisa os processos de raciocínio de alunos do 9.º ano na resolução de problemas algébricos, com o objectivo de compreender o raciocínio matemático dos alunos, bem como diagnosticar eventuais lacunas no desenvolvimento do raciocínio ao longo do ensino básico. Pela sua importância especial, centramos a nossa atenção na indução e dedução enquanto tipos de raciocínio e na representação, justificação e demonstração, enquanto processos do raciocínio matemático.

Raciocínio matemático

O raciocínio matemático é reconhecido como fundamental por numerosos autores, que sublinham uma variedade de aspectos. Por exemplo, Oliveira (2008) usa a expressão *raciocínio matemático* para referir "um conjunto de processos mentais complexos através dos quais se obtêm novas proposições (conhecimento novo) a partir de proposições conhecidas ou assumidas (conhecimento prévio)" (p. 3). Numa perspectiva lógica, Aliseda (2003) identifica raciocínio matemático com inferência dedutiva, caracterizada pela certeza e pela monotonicidade, ou seja, pela existência de uma relação necessária entre premissas e conclusão e pela irrefutabilidade das conclusões. Para Russel (1999), na aprendizagem da Matemática, o raciocínio é "o que usamos para pensar sobre as propriedades de um determinado objecto matemático e desenvolver generalizações que se apliquem a toda a classe de objectos" (p. 1) e é "a ferramenta para compreender a abstracção" (p. 1). Deste modo, enquanto alguns autores salientam sobretudo os aspectos lógicos outros valorizam mais o processo intuitivo, como se formula novas ideias e se chega a conclusões.

Representação

Aceder directamente ao raciocínio matemático dos alunos é, naturalmente, impossível. Para conhecer minimamente este raciocínio é necessário que os alunos o comuniquem, o que só é possível através de diferentes representações. Deste modo, como refere o NCTM (2007), somente "ao observar as suas representações (dos alunos), os professores poderão conseguir compreender os modos de interpretação e de raciocínio dos alunos" (p. 76). Contudo, para além do papel que assumem na comunicação de raciocínios, as representações assumem também um papel decisivo na aprendizagem. Como salienta o NCTM (2007), "quando os alunos conseguem aceder às representações matemáticas e às ideias que elas expressam, ficam com um conjunto de ferramentas que aumentam significativamente a sua capacidade de pensar matematicamente" (p. 75). Em Portugal, um dos objectivos gerais do programa de Matemática do ensino básico foca também a necessidade dos alunos compreenderem e saberem usar diferentes tipos de representações (ME, 2007, p. 5). Este programa destaca igualmente que "as representações matemáticas desempenham um papel importante em toda a aprendizagem desta disciplina (Matemática), e o trabalho com os conceitos matemáticos mais importantes deve envolver, sempre que possível, mais do que uma forma de representação" (p. 9).

Outros autores defendem também a necessidade do estudo das representações. Por exemplo, Vergnaud (1998) apresenta duas razões distintas: (i) "todos experimentamos representações como um conjuntos de imagens internas, gestos e palavras" (ii) "as palavras e símbolos que usamos para comunicar não se referem directamente à realidade, mas a representações de objectos, propriedades, relações, processos, acções e construções sobre as quais não existe um acordo automático entre duas pessoas" (p. 167). Pelo seu lado, Duval (2004) defende ainda que "não é possível estudar os fenómenos relativos ao conhecimento sem recorrer à noção de representação (…) pois não há conhecimento que um sujeito possa mobilizar sem uma actividade de representação" (p. 25). Similarmente Goldin (2008) apresenta os construtos de representação, sistemas de representação e o desenvolvimento de estruturas de representação como componentes essenciais para a aprendizagem da Matemática. Por outro lado, Greeno e Hall (1997) sublinham a relevância das representações na sua relação com o raciocínio ao referirem que "aprender a construir e interpretar representações envolve aprender a participar nas práticas complexas de comunicar e raciocinar, nas quais as representações são utilizadas" (p. 361).

Deste modo, as representações constituem um elemento central no ensino-aprendizagem da Matemática e, consequentemente, no desenvolvimento e compreensão dos processos de raciocínio matemático dos alunos. No entanto, o conceito de representação é um conceito complexo que pode ser encarado de diversas formas. Assim, segundo Goldin (2008) uma representação é uma configuração que poderá, de alguma forma, "actuar no lugar de, ser interpretado como, corresponder a, denotar, descrever, encarnar, codificar, invocar, categorizar, ligar com, mediar, produzir, referir a, assemelhar, servir como metáfora para, significar, substituir por, sugerir ou simbolizar o que está a ser representado" (p. 181). Pelo seu lado, Duval (2006) salienta ainda que os objectos matemáticos nunca devem ser confundidos com a sua representação e refere que este é um dos problemas cruciais da compreensão matemática, na medida em que, não é possível aceder a um objecto matemático sem as representações, o que torna ambígua a distinção entre o objecto representado e a representação usada. Duval (2004) caracteriza também registos semióticos de representação como constituindo "a margem de liberdade de um sujeito para objectivar ele mesmo uma ideia ainda confusa, um sentimento latente, para explorar as informações ou, simplesmente, para as comunicar a um interlocutor" (p. 30).

Duval (2004) encara as representações semióticas como representações externas, e as representações mentais como internas. Também Goldin (2008) distingue representações externas e internas, sendo estas últimas as relacionadas com os sistemas de representações psicológicas dos indivíduos que não podem, em circunstancias habituais, ser observadas por terceiros. Organiza as representações internas em cinco tipos de sistemas inter-relacionados: (i) verbal e semântico; (ii) imagético; (iii) notação formal; (iv) planeamento, monitorização e controlo de execução; (v) afectivo. Cada um destes sistemas permite ao indivíduo produzir um vasto leque de representações externas complexas e específicas que podem ser interpretadas por terceiros: (i) linguagem oral e escrita; (ii) gestos icónicos, desenhos, representações pictóricas, produções musicais ou rítmicas; (iii) fórmulas matemáticas e equações; (iv) expressões de objectivos, intenções, planeamento, estruturas de decisão; (v) contacto visual, expressões faciais, linguagem corporal, contacto físico, lágrimas, gargalhadas e exclamações que transmitem emoções.

Duval (2004, 2006) apresenta duas transformações de representações semióticas que considera radicalmente distintas: tratamentos e conversões. Tratamentos são transformações de representação que ocorrem dentro de um mesmo registo e que revelam o papel intrínseco dos registos semióticos de representação na actividade matemática. São exemplos de tratamentos resolver equações ou sistemas de equações, utilizar um cálculo mantendo-se estritamente na mesma notação ou ainda completar uma figura utilizando critérios de conectividade ou simetria. Por outro lado, conversões são transformações de representação que consistem em transformar a representação de um objecto, de uma situação ou de uma informação de um dado registo semiótico numa outra representação do mesmo objecto, situação ou informação de um outro registo semiótico. As conversões consistem assim em mudanças de registo semiótico de representação. São exemplos de conversões a passagem de uma equação algébrica para a sua representação gráfica ou a passagem de uma constatação sobre uma relação em linguagem natural para a sua notação utilizando letras. A passagem de um registo para outro nem sempre é simples, mas é muitas vezes necessária para uma melhor compreensão do objecto em questão. O NCTM (2007) refere esta ideia ao indicar que "representações distintas focam, geralmente, aspectos diferentes de relações e conceitos complexos" pelo que, para se tornarem conhecedores de conceitos matemáticos, "os alunos necessitam de uma diversidade de representações que suportem a sua compreensão" (p. 77). Complementarmente, do ponto de vista cognitivo, as aprendizagens fundamentais relativas ao raciocínio requerem, segundo Duval (2004), a diversificação dos registos semióticos de representação, a diferenciação entre representante e representado e ainda a coordenação entre os diferentes registos.

Raciocínio indutivo e dedutivo, justificação e demonstração

O raciocínio matemático surge como capacidade transversal no *Programa de Matemática do ensino básico* (ME, 2007). Oliveira (2002), ao estudar o raciocínio do ponto de vista epistemológico, identifica quatro grandes tipos de raciocínio: (i) indução; (ii) dedução; (iii) abdução; e (iv) transformação. Dada a incidência na indução e na dedução apresentada no programa, o conhecimento de semelhanças e diferenças entre os raciocínios indutivo e dedutivo constitui um ponto de partida para a compreensão do que caracteriza o raciocínio matemático e dos seus processos.

Segundo Pólya (1954), os processos de indução iniciam-se muitas vezes através da observação, sendo a partir desta que se desenvolvem conjecturas que devem necessariamente ser testadas. Este autor refere ainda outros processos relevantes no raciocínio indutivo e que ocorrem frequentemente durante a resolução de problemas matemáticos, nomeadamente a generalização, a especialização e a analogia. Oliveira (2002) sublinha igualmente a estreita relação entre analogia e indução salientando que "quem induz fá-lo por analogia, i.e., a pessoa infere a semelhança das conclusões a partir da diferença dos factos" (p. 174). Por outro lado, é através do raciocínio indutivo que se desenvolvem conjecturas que podem ser posteriormente verificadas. Neste sentido, o raciocínio indutivo é heurístico, desenvolvendo-se do particular para o geral, sem uma conclusão necessária e com um papel de criação de conhecimento (Oliveira, 2002).

Por outro lado, o raciocínio dedutivo é característico da Matemática, onde ocupa um lugar fundamental. É um raciocínio formal, relacionado com as demonstrações e a lógica. Tal como Ponte, Branco e Matos (2008) referem, "raciocinar envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento" (p. 89). Como indica Oliveira (2008), desde que a cadeia de deduções esteja isenta de erros "o raciocínio dedutivo produz conclusões que são necessariamente válidas" (p. 7). O raciocínio dedutivo constitui, assim, "o elemento estruturante, por excelência, do conhecimento matemático" (Oliveira, 2002, p. 178), sendo um raciocínio lógico, desenvolvido do geral para o particular, com uma conclusão necessária e com um papel de validação de conhecimento.

No 3.º ciclo do ensino básico espera-se que a justificação englobe uma argumentação apoiada em procedimentos, propriedades e conceitos matemáticos, fundamentando matematicamente as afirmações em todas as actividades realizadas (ME, 2007). É também espectável que os alunos sejam capazes de distinguir uma argumentação informal de uma argumentação formal. Ainda que sem alcançar o rigor associado à demonstração matemática, as justificações devem apresentar algumas das suas características, sendo mais formais do que em ciclos anteriores. A explicação e justificação de conclusões permitem aos alunos esclarecer o seu raciocínio, desenvolvendo normas para um raciocínio matemático de grande qualidade (Collins et al., citado em NCTM, 2007).

O incentivo à justificação desde os primeiros anos promove a progressão entre as justificações simples e informais e as justificações formais, muitas vezes próximas ou mesmo equivalentes a demonstrações. A formalização de justificações pode, assim, conduzir à realização implícita de demonstrações. Contudo, não é expectável que os processos de demonstração sejam desenvolvidos desde os primeiros anos de escolaridade logo de um modo rigorosamente formal. No 3.º ciclo do ensino básico, tal como na justificação se espera uma maior formalidade, também na capacidade de demonstração é espectável um progresso significativo. Neste ciclo os alunos devem ser capazes de: (i) formular, testar e demonstrar conjecturas; (ii) distinguir entre uma demonstração e um teste de uma conjectura e fazer demonstrações simples; (iii) identificar e usar raciocínio indutivo e dedutivo; (iv) compreender o papel das definições em Matemática; (v) distinguir uma argumentação informal de uma demonstração; e (vi) seleccionar e usar vários tipos de raciocínio e métodos de demonstração (ME, 2007, p. 64). Para que os alunos se tornem competentes na utilização adequada do raciocínio indutivo e dedutivo, é necessário que haja espaço para a discussão de conjecturas e afirmações matemáticas com o professor e os colegas (NCTM, 2007). Algumas características dos processos de demonstração como a formulação de uma conjectura plausível, a verificação desta conjectura e a apresentação do raciocínio utilizado, são espectáveis nestes níveis de ensino, ainda que sem o formalismo associado à demonstração matemática (NCTM, 2007). Tal como a justificação, pretende-se que a demonstração seja desenvolvida progressivamente ao longo do percurso escolar, devendo os alunos ser capazes de identificar e usar os processos inerentes à demonstração como a conjectura e o teste, bem como ser capazes de distinguir e utilizar raciocínios indutivos e dedutivos.

Metodologia

Este estudo é de natureza qualitativa, inserindo-se no paradigma interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994) e recorrendo a dois estudos de caso (Stake, 2009). Os dois casos, Maria e Duarte (nomes fictícios), são alunos do 9.º ano do ensino básico inseridos numa turma que trabalha o programa de Matemática anterior (ME, 1992), cuja professora, com cerca de cinco anos de experiência, não teve ainda qualquer envolvimento profissional com o actual programa (ME, 2007). Os alunos foram seleccionados apenas de acordo com o seu desempenho escolar em Matemática, sendo os dois alunos com melhor desempenho da turma. Note-se, porém, que se trata de uma turma com desempenho pouco satisfatório.

Para a recolha de dados foram utilizadas duas entrevistas individuais videogravadas, uma com cada um dos alunos seleccionados. As entrevistas, realizadas pela primeira autora, tiveram a duração de cerca de 20 minutos e foram realizadas na escola, fora da sala de aula. Em cada entrevista foram propostas duas tarefas, que foram resolvidas por cada aluno. Quando estes mostraram dificuldades, a entrevistadora questionou-os com o intuito de os orientar nas suas resoluções, tendo o cuidado de não impor estratégias de resolução. Colocou também algumas questões de aprofundamento quando os alunos davam por terminada a resolução e esta se mostrava insuficiente. Além dos vídeos provenientes das entrevistas, também foram recolhidas as resoluções escritas das tarefas realizadas pelos alunos.

Atendendo ao objectivo do estudo, a análise dos dados recolhidos é realizada de acordo com as seguintes categorias: (i) representações; (ii) tipos de raciocínio; e (iii) justificação e demonstração. Em *representações* pretende-se essencialmente analisar os tipos de transformações usadas, procurando analisar tratamentos e conversões. Em *tipos de raciocínio* pretende-se analisar a incidência em raciocínios indutivos ou dedutivos durante a realização de cada tarefa por parte de cada aluno. Em *justificação e demonstração*, os processos como a formulação de conjecturas, e o seu teste e verificação, bem como a argumentação utilizada são analisados face aos dados recolhidos.

As duas tarefas usadas na recolha de dados têm a mesma estrutura que as usadas por Arzarello (2002) para analisar o pensamento algébrico de alunos, consistindo em problemas que podem ser resolvidos através de procedimentos algébricos. Na análise do raciocínio matemático, a resolução de problemas surge como um meio privilegiado pois os processos de raciocínio utilizados incluem a formulação de uma estratégia geral para resolução do problema, a realização de um passo, transformação ou cálculo e a sua justificação (Ponte & Sousa, 2010). A necessidade do uso da demonstração enquanto estratégia para a resolução de problemas pode também levar ao uso de outros processos de raciocínio como a formulação de uma estratégia geral de demonstração e a formulação de passos justificados que levam a uma conclusão (idem). O quadro conceptual para a análise do raciocínio encontra-se no esquema abaixo (Figura 1). O raciocínio indutivo tem lugar sobretudo na formulação de conjecturas gerais a partir de casos específicos e o dedutivo nos processos de justificação. Note-se que o raciocínio apoia-se nas representações e articula-se com os processos de significação (*sense making*) que consistem em desenvolver a compreensão de uma situação, contexto ou conceito conectando-o com conhecimento existente (NCTM, 2009).

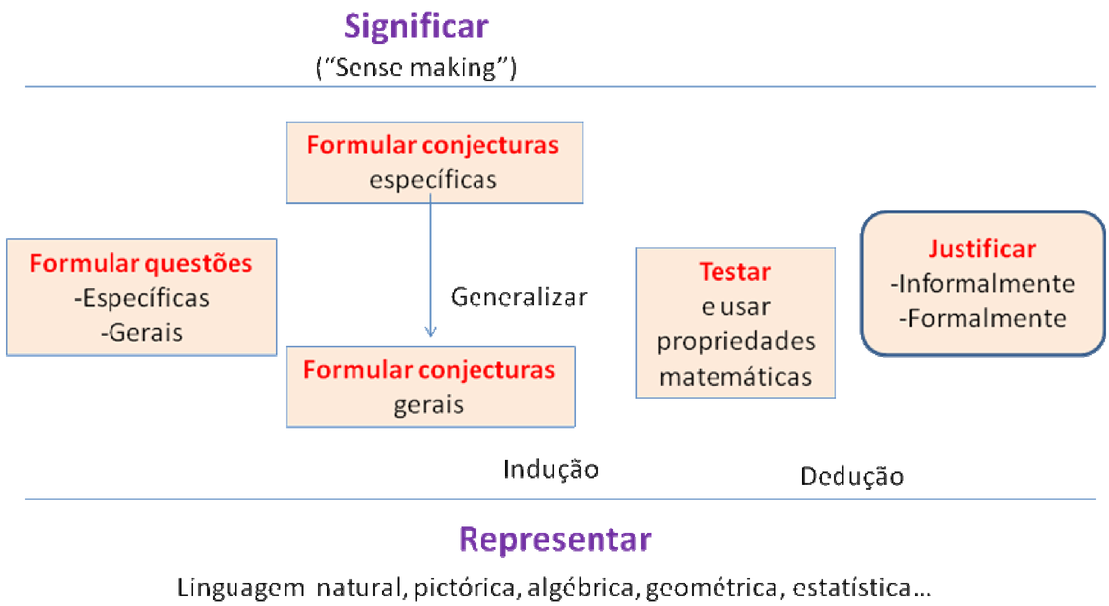

Figura 1. Quadro conceptual para a análise do raciocínio.

Tarefa 1 – Múltiplos de cinco

Tarefa 1: *Que valores pode ter* ***k*** *para que* ***k + 5*** *seja um múltiplo de 5?*

Com esta tarefa espera-se que os alunos conjecturem sobre os valores que *k* pode tomar e que testem e verifiquem a sua conjectura. Para a sua resolução é necessário ter presente a noção de múltiplo de um número e também um modo de o representar.

Resolução de Maria

A aluna apresenta de imediato uma resposta ao problema, sem explicitar o seu raciocínio, levando menos de 10 segundos entre a leitura da tarefa e a sua resposta:

K pode acabar em 0 ou em 5 para ser multíplo de 5

A partir desta resposta, e quando solicitada a explicar o seu raciocínio, apresenta o seguinte:

ex: 0 + 5 = 5, logo é multíplo de 5

Como a aluna usa apenas um exemplo para explicar o seu raciocínio, surge a necessidade de a levar a explorar um pouco mais a tarefa:

Entrevistadora: Isto é para um número, conseguimos fazer para mais números? (apontando para o exemplo dado)

Maria: Sim.

E.: Sim? Então diz-me lá.

M.: (hesita) não sei… Com números muito grandes… Sei lá…

E.: E não podemos representar esses números por qualquer coisa? O que é que eu sei que o *k* é?

M.: *k* é… Ah, sim! (escreve “5*x* + 5”)

$$5x+5$$

E.: O que é que me garante que isso é um múltiplo de cinco?

M.: Porque se… Este de certeza que vai dar um múltiplo de cinco (aponta para 5x) e se somar mais cinco vai dar cinco de certeza (corrige), vai dar múltiplo de cinco.

Resolução de Duarte

Perante o mesmo problema, o aluno apresenta em primeiro lugar um caso particular.

$$K+5=5+5=10$$

A sua interpretação do problema leva-o a terminar por aqui, contudo, quando estimulado, apresenta um valor geral para *k*:

Entrevistadora: E cinco é o único valor que *k* pode tomar?

Duarte: Não.

E.: Não.

D.: Pode ser qualquer número, múltiplo de cinco.

E.: Ah, então que valores é que *k* pode tomar para *k* mais cinco ser um múltiplo de cinco?

D.: Cinco *n* (e escreve)

$$K=5n$$

E.: Ok. E consegues garantir-me que, se o *k* for cinco *n*, isso (apontando para *k+5* no enunciado da tarefa) é um múltiplo de cinco?

D.: Cinco vezes um, cinco, mais cinco, dá… com dois, dá… Sim, sempre mais cinco fica sempre.

E.: Se eu tiver um múltiplo de cinco e lhe somar…

D.: Cinco vai sempre dar um múltiplo de cinco.

Apesar de encontrar uma resposta geral para o problema proposto, quando confrontado com a necessidade de justificação do resultado encontrado, Duarte volta a recorrer a casos particulares para justificar a sua conclusão.

Representações usadas

Na sua resolução desta primeira tarefa tanto Maria como Duarte usam transformações de representações, Maria apenas conversões, Duarte tanto tratamentos como conversões. Os tratamentos que Duarte utiliza são simples cálculos. As conversões que Maria e Duarte utilizam são mais notórias e dão-se entre a linguagem natural e as expressões algébricas. Nesta tarefa, ambos traduzem *múltiplo de cinco* para $5n$ ou $5x$, em particular Maria, que na sua resposta inicial usa a expressão "acabar em 0 ou em 5" e na sua justificação $5x$.

Raciocínio indutivo e dedutivo, justificação e demonstração

Nesta primeira tarefa, o tipo de raciocínio utilizado por Maria é pouco claro, dado que apresenta a sua resposta ao problema antes de explicar o seu raciocínio. Contudo, atendendo ao tempo que Maria demora a responder ao problema e à apresentação imediata de uma generalização para o valor de k, é plausível supor o recurso ao raciocínio dedutivo. Por outro lado, na justificação dada posteriormente, Maria usa um exemplo para iniciar a sua explicação, tenta justificar a sua resolução de modo indutivo. Apenas a hesitação em usar mais casos particulares para justificar a sua resposta e a facilidade com que representa o valor geral de k sugere que Maria utiliza efectivamente o raciocínio dedutivo desde o início da sua resolução.

Duarte é bastante explícito relativamente ao tipo de raciocínio usado. Partindo de um caso particular para a generalização dos valores de k, o seu processo de resolução é indutivo. Mesmo após concluir a sua resolução, Duarte volta a explicitar o seu raciocinio utilizando vários casos particulares e generalizando apenas no final, clarificando a utilização do raciocínio indutivo para a resolução desta tarefa.

Maria conjectura de imediato que k é múltiplo de cinco, não sentindo necessidade de testar ou justificar a sua conjectura. As questões colocadas pela entrevistadora, levam-na a justificar a sua conjectura argumentando que a soma entre um múltiplo de cinco e cinco é ainda um múltiplo de cinco. Encontra-se aqui implícita a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição ou a ideia de múltiplos consecutivos, mas Maria argumenta a sua conclusão apoiada apenas no conceito de múltiplo.

Para Duarte a resolução do problema pode resumir-se a um exemplo, não conjecturando inicialmente. Contudo, quando questionado, chega facilmente à mesma conjectura que Maria. Ao tentar justificar a sua conjectura, Duarte testa-a para dois casos particulares e argumenta a veracidade da conjectura apenas com recurso a esses casos particulares.

Tarefa 2 – Naturais consecutivos

Tarefa 2: *Considera um número natural. Determina a sua soma com os dois números naturais consecutivos seguintes. O que observas? Consegues provar o que afirmas?*

Na sua realização é expectável que os alunos conjecturem sobre as características da soma de quaisquer três números naturais consecutivos e que testem e verifiquem a sua conjectura. Para a resolver é necessário saber representar naturais consecutivos e simplificar expressões algébricas. É também, e mais uma vez, necessário que os alunos tenham presente a noção de múltiplo de um número e o modo de o representar. Esta tarefa surge na sequência da anterior exactamente por ambas se basearem no facto de $kn + k$ ser um múltiplo de k, para k e n naturais.

Resolução de Maria

A aluna começa por escrever o seguinte:

$$2 + 3 + 4 = 9$$

Contudo, não conseguindo observar nada com este exemplo, tenta de imediato passar para uma expressão algébrica que represente a situação pretendida. No entanto, demora algum tempo a escrever uma expressão algébrica para a soma de números consecutivos, o que só consegue com dificuldade e após alguma ajuda:

$$\cancel{x+2x+3x}$$
$$x+(x+1)+(x+2)=3x+3$$

Após escrever e simplificar a expressão algébrica, chega rapidamente a uma conclusão:

> *Entrevistadora:* Então e agora o que é que observas?
>
> *Maria:* Que vai ser um número… Pois… Então… Se tiver um número e multiplicar por três vai dar um múltiplo de três, mais três vai dar outro múltiplo de três.
>
> *E.:* Então se eu somar três números consecutivos o que é que vai acontecer?
>
> *M.:* Vai ser um múltiplo de três.

Resolução de Duarte

O aluno utiliza uma outra estratégia de resolução da mesma tarefa, apresentando logo de início três casos particulares:

$$2+3+4=9$$
$$1+2+3=6$$
$$4+5+6=15$$

> *Duarte:* Dá sempre múltiplos de três!
>
> *Entrevistadora:* E podes-me provar isso?
>
> *D.:* (escreve *51 + 52 + 53 = 156*)
>
> *E.:* E agora vamos descobrir se este é um múltiplo de três? É um múltiplo de três, eu posso-te dizer que esse é. E se eu te disser que esse é, tu acreditas que todos são?
>
> *D.:* Provavelmente.
>
> *E.:* Provavelmente. E consegues provar que todos são?
>
> *D.:* Não.

É notório que, apesar do início da resolução remeter para uma estratégia que permitiria dar resposta ao problema, Duarte não consegue concluir essa estratégia.

Após ser proposto a Duarte que tente utilizar linguagem algébrica para realizar a sua prova, este chega com mais facilidade do que Maria a uma expressão representante da situação e à sua simplificação:

$$a+a+1+a+2 = \underline{3a+3}$$

Contudo, para assumir a conclusão como verdadeira, Duarte volta a sentir necessidade de particularizar, tentando validar a sua conclusão usando um caso particular:

> *E.:* E agora, podes-me dizer que é um múltiplo de três?
>
> *D.:* Sim.
>
> *E.:* Porquê?
>
> *D.:* Porque… Se for dois (apontando para *a*) dois vezes três dá seis mais três dá nove, está certo.

Representações usadas

Nesta segunda tarefa Maria tem uma dificuldade clara na conversão da linguagem natural para a algébrica. Esta dificuldade, que não tinha sido observada na realização da primeira tarefa, leva a supor que Maria tem ainda uma compreensão pouco consistente da linguagem algébrica. Contudo, efectua os tratamentos associados às representações externas de fórmulas matemáticas com facilidade, sendo disso exemplo as simplificações das expressões algébricas.

Na resolução desta tarefa, Duarte usa maioritariamente tratamentos dentro do mesmo sistema de representação. Mas, quando confrontado com a necessidade de utilizar linguagem algébrica, não mostra qualquer dificuldade na conversão da linguagem natural para a algébrica. Por outro lado, na conversão da linguagem algébrica para a natural, mostra mais dificuldade do que Maria. Esta situação pode dever-se ao conceito de múltiplo estar mais presente ou ter sido melhor compreendido pela sua colega.

Raciocínio indutivo e dedutivo, justificação e demonstração

Nesta tarefa, Maria parece utilizar um processo de raciocínio próximo da dedução. Apesar de ter iniciado a sua estratégia de resolução com um caso particular, rapidamente o abandona. Adopta uma nova estratégia utilizando um caso geral, o que leva a uma conclusão válida. Duarte inicia esta tarefa tal como a anterior, usando casos particulares. Apesar de não conseguir concluir a sua estratégia, esta tem um carácter eminentemente indutivo.

Ainda que por processos diferentes, ambos os alunos conjecturam que a soma de três números consecutivos é um múltiplo de três. Maria, após abandonar a primeira estratégia, descobre com alguma facilidade uma conjectura que justifica por meio da expressão algébrica simplificada que encontra. Quanto a Duarte, que por si se cinge à conjectura, após a generalização realizada por sugestão, sente a necessidade de testar essa generalização para justificar que efectivamente representa um múltiplo de três. Este teste não é um teste da conjectura inicial de Duarte, mas um teste de uma generalização que o aluno tem dificuldade em validar sem particularizar.

Conclusão

Maria e Duarte têm muito bom desempenho no contexto da turma, mas ambos sentiram dificuldades assinaláveis na resolução das tarefas propostas e, em particular, na sua justificação. Nem um nem outro sentem à partida necessidade de justificar as suas conjecturas, tal como, de resto, se verificou em trabalhos anteriores (Ponte, 2007). Não parecem dominar ainda a linguagem algébrica de modo natural para resolverem os problemas propostos. Assim, Duarte, ao sentir necessidade de concretizar as expressões algébricas obtidas, mostra notória dificuldade em compreender o papel da linguagem algébrica na justificação. Esta dificuldade reflecte-se também no uso do raciocínio indutivo em ambas as tarefas. Se não consegue recorrer à Álgebra para as suas justificações, dificilmente conseguirá raciocinar dedutivamente. Por outro lado, e ainda que não recorra à linguagem algébrica para as suas justificações, realiza de forma imediata tratamentos dentro da linguagem algébrica, como a simplificação de expressões algébricas, o que é de alguma forma surpreendente. Isto vai de encontro à ideia de que as aprendizagens fundamentais relativas ao raciocínio requerem a diversificação dos registos semióticos de representação e a coordenação entre esses registos (Duval, 2004). Dentro de um mesmo registo de representação, o aluno facilmente efectua as transformações necessárias, mas não consegue realizar a conversão da linguagem algébrica para a natural, o que limita os seus processos de raciocínio e o seu desempenho nestas tarefas.

Maria, ainda que mostre algumas dificuldades na conversão da linguagem natural para a algébrica na tarefa 2, aparenta ter desenvolvido estruturas de representação mais consistentes do que o colega. Sendo estas estruturas de representação essenciais para a aprendizagem da Matemática (Goldin, 2008), é natural que revele um melhor desempenho na resolução destas tarefas. Contudo, este bom desempenho é mais notório na tarefa 2, em que a aluna justifica por si a sua conjectura – enquanto na tarefa anterior apenas justifica quando lhe é solicitado. Aparenta, assim, não estar familiarizada com este tipo de tarefas pois, compreendendo o pretendido na tarefa 1, na tarefa 2 já justifica a sua conjectura sem lho ser solicitado. Estas justificações da aluna são consequência da utilização do raciocínio dedutivo, sendo dadas em linguagem natural, com recurso à linguagem algébrica. Assim, ainda que sem muita formalização, Maria utiliza o raciocínio dedutivo e justifica as suas conjecturas, demonstrando as suas conclusões. Atendendo a que raciocinar matematicamente envolve sobretudo encadear asserções de forma lógica e justificar esse encadeamento (Ponte, Branco, & Matos, 2008), o seu desempenho tarefa 2 revela já processos de raciocínio interessantes.

O programa de Matemática anterior (ME, 1992) não dá grande destaque ao raciocínio matemático, o que se pode traduzir num desenvolvimento pouco consistente da capacidade dos alunos raciocinarem matematicamente. Foi este programa que enquadrou o ensino experimentado por Maria e Duarte e, na verdade, o seu desempenho na resolução das tarefas propostas está dentro das expectativas iniciais para este estudo, tendo mesmo algumas das resoluções de Maria excedido estas expectativas. Atendendo ao ensino que experimentaram, não seria de esperar que os alunos tivessem desenvolvido a sua capacidade de raciocinar matematicamente de acordo com os parâmetros do actual programa de Matemática do ensino básico (ME, 2007). Será interessante verificar no futuro se a generalização do novo programa irá promover o desenvolvimento do raciocínio matemático dos alunos do 9.º ano, habilitando-os a usar tanto o raciocínio indutivo como o dedutivo e levando os processos de raciocínio como a justificação e a demonstração a estarem cada vez mais enraizados. Será também importante verificar se os alunos serão capazes de recorrer a várias representações, para que as conversões entre estas se tornem mais simples, de modo a desenvolver uma maior compreensão dos objectos e conceitos matemáticos.

Para que isso possa acontecer, não basta que exista um novo programa de Matemática, valorizando o raciocínio. Será necessário que os professores conheçam os processos de raciocínio dos seus alunos e reflictam sobre eles. Se esta análise revelar lacunas no desenvolvimento do raciocínio dos alunos, mesmo de aqueles que mostram bom desempenho, será necessário colmatar essas lacunas para que estes sejam mais críticos e desenvolvam uma Matemática com compreensão. Tudo isto requer, certamente, um trabalho muito significativo no âmbito do desenvolvimento curricular e das práticas profissionais na sala de aula.

Referências

Aliseda, A. (2003). Mathematical reasoning vs. abductive reasoning: A structural approach. *Synthese , 134*, 25-44.

Arzarello, F., Bazzini, L., & Chiapinni, G. (2002). A model for analysing processes of thinking. In R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell & R. Lins, *Perspectives on school algebra* (pp. 61-81). Dordrecht: Kluwer.

Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação qualitativa em educação: Uma introdução à teoria e aos métodos.* Porto: Porto Editora.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehensionin a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61*, 103-131.

Duval, R. (2004). *Semiosis y pensamiento humano.* Cali, Colombia: Merlín.

Goldin, G. (2008). Perspectives on representation in mathematicallearning and problem solving. In L. D. English, *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 176-201). Routledge, NY: Taylor & Francis.

Greeno, J., & Hall, R. (1997). Practicing representation. *Phi Delta Kappan, 78*, 361-367.

ME (1992). *Programa de Matemática: Plano de organização do ensino-aprendizagem - ensino básico 3º ciclo.* Lisboa: DES-ME.

ME (2007). *Programa de Matemática do ensino básico.* Obtido em 16 Jan 2008, de DGIDC-ME: http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/ProgramaMa- tematica.pdf

NCTM (2009). *Focus in high school mathematics: Reasoning and sense making.* Reston, VA: NCTM.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a Matemática escolar.* Lisboa: APM.

Oliveira, P. (2002). *A investigação do professor, do matemático e do aluno: Uma discussão epistemológica*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa.

Oliveira, P. (2008). O raciocínio matemático à luz de uma epistemologia. *Educação e Matemática , 100*, 3-9.

Pólya, G. (1954). *Mathematics and plausible reasoning: Induction and analogy in mathematics.* New Jersey: Princeton University Press.

Ponte, J. P. (2007). Investigations and explorations in the mathematics classroom. *ZDM, 39*(5-6), 419-430.

Ponte, J. P., & Sousa, H. (2010). Uma oportunidade de mudança na Matemática no ensino básico. In APM, *O professor e o programa de Matemática do ensino básico* (pp. 11-41). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2008). O simbolismo e o desenvolvimento do pensamento algébrico. *Educação e Matemática , 100*, 89-96.

Russel, S. (1999). Mathematical reasoning in the elementary grades. In L. V. Stiff & F. R. Curcio (Eds), *Developing mathematical reasoning in grades K-12* (pp. 1-12). Reston, VA: NCTM.

Stake, R. (2009). *A arte da investigação com estudos de caso.* Lisboa: Fundação Calouste Gulbenkian.

Vernaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 167-181.