SITUAÇÕES DE MODELAÇÃO NA FORMAÇÃO INICIAL DE PROFESSORES[1]

Neusa Branco
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Santarém
Unidade de Investigação do Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
neusa.branco@ese.ipsantarem.pt

João Pedro da Ponte
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
jpponte@ie.ul.pt

Resumo

A presente comunicação aborda o pensamento algébrico de futuros professores dos primeiros anos e de educadores em situações de modelação e o desenvolvimento do seu conhecimento sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra no contexto de uma experiência de formação na formação inicial, em particular do conhecimento da aprendizagem dos alunos. O estudo segue uma metodologia qualitativa, com design de estudo de caso. A comunicação foca o trabalho desenvolvido em situações de modelação por Alice, uma aluna que frequentou a disciplina de Matemática até ao 9.º ano e pretende ser Educadora de Infância. Os dados são recolhidos por dois questionários, entrevistas, observação e documentos produzidos pela aluna. Antes da experiência de formação, Alice revela dificuldades na interpretação e na resolução de situações de modelação. Durante a experiência e no seu final, resolve todas as situações e procura generalizá-las, recorrendo a linguagem natural. A análise e discussão de situações de sala de aula contribuem para o desenvolvimento do seu conhecimento do trabalho dos alunos e ao modo de promover a sua aprendizagem envolvendo a modelação.

Palavras-chave: Pensamento algébrico, Álgebra, Formação inicial, Modelação, Conhecimento profissional.

Introdução

A formação inicial de futuros professores do ensino básico e de educadores constitui um suporte fundamental para o modo como desenvolvem mais tarde a sua actividade profissional. Na sua formação inicial os futuros professores devem desenvolver um conhecimento profundo da Matemática que vão ensinar e do modo como se processa o seu ensino, em articulação com o desenvolvimento da sua identidade profissional. No domínio da Álgebra, devem ter oportunidade de conhecer os aspectos fundamentais

[1]Este trabalho é financiado por fundos nacionais através da FCT – Fundação para a Ciência e Tecnologia no âmbito do Projecto *Práticas Profissionais dos Professores de Matemática* (contrato PTDC/CPE-CED/098931/2008).

respeitantes ao ensino deste tema para os mobilizar na sua prática futura com vista ao desenvolvimento do pensamento algébrico dos seus alunos.

O ensino-aprendizagem da Álgebra visa o desenvolvimento do pensamento algébrico desde os primeiros anos de escolaridade (ME, 2007) com ênfase na generalização e na sua representação. A investigação realizada neste domínio, nos últimos anos, tem ajudado a clarificar o que está envolvido no desenvolvimento do pensamento algébrico e o trabalho a desenvolver na sala de aula (Kaput, 2008). Esta abordagem possibilita o surgimento de situações que contribuem para uma compreensão mais aprofundada da Matemática (Canavarro, 2007), promovendo a articulação entre os vários temas.

A formação inicial deve atender aos desafios que se colocam no ensino da Álgebra, sendo importante discutir o desenvolvimento do conhecimento do professor com respeito ao ensino-aprendizagem da Álgebra (Doerr, 2004). Esta comunicação analisa o desenvolvimento da identidade profissional e o conhecimento da Álgebra e do ensino da Álgebra, em situações de modelação, no contexto de uma experiência de formação frequentada por uma formanda que pretende ser educadora de infância, identificando a sua compreensão de situações de modelação, bem como a sua capacidade de analisar o trabalho realizado por alunos.

Pensamento algébrico e situações de modelação

A perspectiva assumida por investigadores como Carraher e Schliemann (2007) e expressa nas orientações curriculares para o ensino da Álgebra nos primeiros anos, coloca a ênfase no desenvolvimento do pensamento algébrico. O seu objectivo é proporcionar experiências pessoais que contribuam para uma aprendizagem com compreensão no estudo posterior formal da Álgebra. Kaput (2008) apresenta a Álgebra com base em dois aspectos centrais: (A) generalização simbólica de regularidades; (B) raciocínio sintacticamente guiado e acções em generalizações expressas no sistema de símbolos convencional. Estes aspectos são integrados em três vertentes: (i) o estudo de estruturas e sistemas abstractos a partir de cálculos e relações, decorrentes da Aritmética e de raciocínio quantitativo; (ii) o estudo de funções, relações e variação; e (iii) a aplicação de linguagens de modelação, tanto dentro como fora da Matemática. Cada um dos aspectos centrais surge de algum modo nas três vertentes. Este autor enfatiza ainda a importância do estabelecimento de conexões da Álgebra com toda a Matemática.

No âmbito da modelação, vertente analisada nesta comunicação, Kaput (2008) apresenta três tipos de situação algébrica, sistematizados na tabela 1:

Tabela 1. Tipos de situações que promovem a modelação

Situação	Interpretação algébrica	Variável
Problemas aritméticos que requerem o uso de aspectos sintácticos da Álgebra	Equação ou sistema de equações do 1.º grau	Incógnita
Sequências e regularidades em situações ou fenómenos	Função	Uma ou mais variáveis
Situações de modelação de resposta única ou problemas de palavras aritméticos puros	Expressão algébrica para exploração geral de relações	Parâmetro

Nos primeiros anos, antes da abordagem formal à linguagem algébrica, os alunos devem ter oportunidade de generalizar situações usando a linguagem natural ou estratégias informais que envolvem desenhos ou símbolos, por exemplo em situações de modelação. As estratégias podem, inicialmente, ter por base a realização de tentativas de verificação de soluções que podem, progressivamente, ser informadas pela identificação de relações lineares e ser representadas por meio do uso de uma notação criada pelos alunos (Sutherland, 2004). Estas situações promovem a compreensão da utilização de símbolos para representar quantidades desconhecidas e a realização de acções sobre as generalizações estabelecidas. Driscoll (1999) sugere, também, a realização de problemas de modelação de modo a explorar as relações entre os valores desconhecidos. Estes problemas podem constituir uma primeira abordagem aos conceitos algébricos nos primeiros anos de escolaridade que mais tarde são tratados de modo mais formal. O objectivo é que os alunos elaborem as suas próprias estratégias de resolução.

A formação inicial de professores dos primeiros anos no âmbito da Álgebra

A formação inicial constitui uma base fundamental para o desenvolvimento profissional do futuro professor (NCTM, 2000), englobando diversas vertentes que contribuem para o desenvolvimento articulado do conhecimento do futuro professor de Matemática, visando o conhecimento matemático e o conhecimento pedagógico. Ponte e Chapman (2008) focam três vertentes a considerar na formação inicial de professores: (i) o conhecimento da Matemática para ensinar; (ii) o conhecimento do ensino da

Matemática; e (iii) a identidade profissional. Segundo estes autores, a formação inicial tem ganho nos últimos anos uma melhor compreensão dos processos pelos quais se aprende a ensinar Matemática e se desenvolve a identidade profissional como professor. Atendendo à especificidade do ensino, a formação de professores deve "proporcionar aos futuros professores oportunidade que lhes permitam compreender, apreciar e abraçar a complexidade da sua prática como uma base para o estudo em curso" (p. 256). A formação inicial deve promover nos futuros professores a capacidade de integrar o conhecimento dos conteúdos e processos matemáticos, a especificidade dos alunos a ensinar, de acordo com a sua escolaridade, e as orientações curriculares. Os formandos devem depois usar este conhecimento integrado para perspectivar a sua prática futura, nomeadamente identificando e integrando diversos recursos e construindo tarefas adequadas ao desenvolvimento de objectivos específicos de aprendizagem.

No âmbito da Álgebra, Doerr (2004) salienta a importância da formação inicial simultaneamente, construir a partir das experiências dos formandos e quebrar o modelo que acompanha essa experiência. Os formandos têm uma longa experiência de observação do que faz o professor de Matemática na sala de aula. Na formação inicial, devem reflectir sobre as suas próprias experiências e observações de ensino. No que se refere ao pensamento algébrico, os formandos que frequentam agora a formação inicial têm experiências prévias muito diversificadas e quando forem leccionar, serão colocados perante desafios e exigências que, na sua maioria, não experimentaram enquanto alunos. Stump e Bishop (2001) sugerem que a formação inicial em Álgebra contemple a aprendizagem sobre generalização, resolução de problemas, modelação e funções. Os formandos devem, ainda, discutir o que envolve o ensino da Álgebra em cada nível de ensino e observar, analisar e reflectir sobre situações particulares de ensino-aprendizagem protagonizadas por professores nas suas salas de aula.

Experiência de formação

A experiência de formação (EF) que está na base da presente investigação decorre no âmbito da unidade curricular Álgebra e Funções, do 1.º semestre, do 3.º ano, do curso de Licenciatura em Educação Básica. A experiência de formação tem em conta um conjunto de orientações relativas à formação inicial de professores, bem como as orientações curriculares para a educação pré-escolar e o ensino básico (1.º e 2.º ciclos). Esta proposta tem duas vertentes que se interligam, o desenvolvimento do pensamento algébrico dos formandos e o seu conhecimento sobre como promover o desenvolvimento do pensamento algébrico dos futuros alunos. A experiência assume uma perspectiva exploratória dadas as tarefas que a constituem e a dinâmica da sala de aula, visando um forte envolvimento dos formandos na discussão dos conceitos algébricos e na análise de situações de ensino-aprendizagem. Além disso, atendem a indicações para a formação de professores e educadores, procurando integrar o conhecimento do conteúdo e o conhecimento didáctico de modo a proporcionar aos formandos experiências de aprendizagem que revelem aspectos didácticos que devem atender no ensino da Matemática aos seus alunos, ou seja, mostrando-lhes o modo como devem ensinar (Albuquerque et al., 2006; Ponte & Chapman, 2008). São realizadas sete tarefas que se distribuem por vários tópicos: Relações, Sequências repetitivas e regularidades, Sucessões, Funções e Modelação matemática. Esta comunicação apresenta algumas questões da Tarefa 2 (em anexo) que envolvem o estudo de relações entre quantidades desconhecidas que podem ser modeladas por equações. Algumas situações remetem para a análise de resoluções de alunos de tarefas de carácter algébrico, como questão A da tarefa 2, e episódios de aula dos primeiros anos de escolaridade.

Metodologia de investigação

A presente investigação segue uma metodologia qualitativa de cunho interpretativo, recorrendo a estudos de caso. Assume uma perspectiva interpretativa que visa reconstituir a experiência vivida pelos participantes, apresentando os significados que estes desenvolvem dos aspectos abordados durante essa experiência e foca questões de conteúdo, mais do que questões de procedimento (Erikson, 1985). A primeira autora assume os papéis de docente e de investigadora,

A realização de estudos de caso procura conhecer a realidade tal como ela é vista pelos participantes (Ponte, 2006) e, atendendo à diversidade de percursos académicos, analisar casos individuais (Stake, 1994). Esta comunicação foca o trabalho desenvolvido por uma formanda, Alice, que frequenta a experiência de formação, e frequentou a disciplina de Matemática apenas até ao 9.º ano, pretendendo ingressar no Curso de Mestrado em Educação Pré-escolar. Os dados são recolhidos entre Junho de 2009 e Março de 2010, tendo origem em entrevistas, observação e documentos produzidos pela formanda. Os documentos surgem em resposta às tarefas matemáticas propostas nos questionários inicial e final (respondidos antes e após a experiência de formação) e às sete tarefas propostas na experiência de formação. São realizadas três entrevistas, procurando as primeira e terceira esclarecer as respostas de Alice aos questionários, inicial e final, respectivamente; a segunda entrevista é realizada durante a experiência de formação e dela faz também parte uma tarefa matemática e um conjunto de questões que visam conhecer pormenorizadamente a perspectiva da formanda relativamente ao trabalho desenvolvido no âmbito da experiência de formação e os conhecimentos que manifesta nesse momento. As entrevistas são gravadas em áudio e vídeo e posteriormente transcritas. A observação é realizada pela em sala de aula durante o decorrer das aulas e registada em notas de campo. As aulas em que decorrem as sete tarefas são gravadas em vídeo e áudio, de modo a apoiar os registos.

A análise dos dados procura evidenciar aspectos relativos a três vertentes fundamentais da formação inicial, o desenvolvimento da identidade profissional, o conhecimento da Álgebra, com enfoque no pensamento algébrico manifestado por Alice em situações de modelação e o conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem. Assim, foram seleccionados e analisados dados relativos às respostas escritas e das entrevistas nas tarefas Qi-2b, Qi-8a e Qi-8b (questionário inicial) e Qf-2b, Qf-8.1 e Qf-8.2 (questionário final) e nas situações (A) e (C) da tarefa 2, reflectindo a interpretação de Alice das situações de modelação e das suas respostas escritas nos questionários. Foram, ainda objecto de análise dados das três entrevistas que revelam a identidade profissional de Alice e a sua perspectiva sobre o trabalho desenvolvido na experiência de formação.

Alice

Apresentação

Alice tem 23 anos de idade. O seu percurso antes da entrada no ensino superior revela dificuldades em Matemática desde o 1.º ciclo. Nos 2.º e 3.º ciclos teve apoio pedagógico nesta disciplina, o que contribuiu para o seu sucesso, terminando o 9.º ano com nível 3. No ensino secundário frequentou um curso profissional de Técnico de Auxiliar de Infância do qual não fazia parte a disciplina de Matemática. Mais tarde, trabalhou durante dois anos em creches e jardins-de-infância. As unidades curriculares Seminário de Iniciação à Prática Profissional constituem uma importante vertente do curso. No 2.º ano, frequentou creches e esteve na comissão de protecção de crianças, fazendo um balaço positivo das suas experiências. No 3.º ano, no 1.º semestre, frequenta escolas de 1.º ciclo e no 2.º semestre jardins-de-infância, tendo expectativas elevadas relativamente a esta última experiência.

Na unidade curricular Álgebra e Funções, Alice é bastante assídua e colabora prontamente no trabalho proposto. Durante a experiência de formação revela sentir algumas dificuldades por estar a tratar assuntos que estão muito distantes no seu percurso anterior ou que desconhecia até ao momento. Quanto ao modo de trabalho na aula, refere gostar particularmente dos momentos de trabalho em grupo por estes envolverem a partilha de ideias e conhecimentos matemáticos com outros formandos, ideia que reforça na terceira entrevista, destacando os momentos de discussão e sistematização de ideias.

Alice valoriza todas as situações de aprendizagem referindo que "tudo o que aprendi, para mim, aqui já foi um bónus, porque eu ia mesmo às escuras" (E2). Após a conclusão da experiência de formação, faz um balanço das aprendizagens que considera ter realizado no âmbito da Álgebra e valoriza o conhecimento do conteúdo em função do trabalho que pode desenvolver enquanto futura educadora: "Algumas coisas dá para transportar para o pré-escolar, mesmo que não tenhamos estado a falar especificamente mas já dá para ver algumas situações em que dá para aplicar, no pré-escolar, que é mais o meu objectivo" (E3).

Desenvolvimento da identidade profissional

Alice apresenta de um modo claro o seu intuito de ser educadora de infância. Ao longo da sua formação inicial, vive diferentes experiências que lidam com o seu conhecimento e também com o seu modo de ser, a perspectiva pessoal da educação e a sua identificação com a profissão. Os Seminários de Iniciação à Prática Profissional proporcionam experiências de observação em diferentes contextos que contribuem para o desenvolvimento da sua identidade profissional. Neste âmbito diz gostar de todas as fases de jardim-de-infância mas não tanto de 1.º e 2.º ciclos. No presente semestre frequenta o Seminário de 1.º ciclo e, no início do ano lectivo, revela algum receio por não se identificar tanto com este ciclo e por pretender trabalhar com crianças mais pequenas:

> Eu gosto das crianças na mesma, mas a maneira da estrutura e a maneira de lidar com as crianças e mesmo o currículo… É tudo diferente, é diferente. Não é bem isso que eu quero, gosto mais de estar a lidar com os pequeninos assim de maneira mais informal, não quer dizer que seja que não seja importante, mas pelo menos é mais informal. Eu gosto de coisas assim mais informais. (E1)

Quando Alice pensa na possibilidade de intervir no 1.º ciclo mostra-se muito receosa e diz preferir que tal não se proporcione, por este não ser o contexto em que pretende trabalhar e não se sentir segura para o fazer. Contudo, após a frequência do seminário, faz um balanço positivo. O último contexto é jardim-de-infância e a sua expectativa é grande, por ser o contexto onde se sente melhor e por pretender ser educadora de infância. Quanto ao ensino nesse nível de escolaridade, nomeadamente da Matemática, salienta o carácter mais informal que atribui ao trabalho com as crianças, não deixando de o considerar importante:

> O meu objectivo é… De uma forma muito, não é ligeira de ser pouco importante, mas pelo menos ter algumas actividades que dêem a conhecer à criança desde cedo o que é a Matemática e de maneira a que eles possam, como é que hei-de dizer, chegar a um primeiro ciclo já com algumas noções. Não como uma noção muito rígida, mas pelo menos não chegarem ao 1.º ciclo e nunca terem, por exemplo, contacto com as formas, ou qualquer coisa assim desse género. Mas também ainda não aprofundei muito isso, porque ainda não falámos muito. (E1)

Refere que deve proporcionar às crianças o contacto com situações que envolvem a Matemática para terem já algum conhecimento quando ingressam no 1.º ciclo. Contudo, não consegue indicar muitas dessas situações e considera que este aspecto não foi ainda muito aprofundado no curso.

Situações de modelação matemática

Antes da EF.

Pensei num número. Multipliquei esse número por 3 e depois adicionei 7. Por fim subtraí 10. Obtive o número 12. Em que número pensei?

Figura 1. Tarefa Qi-8a.

Em resposta ao questionário inicial, Alice não apresenta qualquer resolução para o problema que envolve um valor desconhecido e pode ser modelado por uma equação equivalente a $3x+7-10=12$ (Figura 1). Questionada novamente sobre este problema na primeira entrevista, relê o enunciado e após algum tempo de silêncio identifica que está a fazer por tentativas, testando o número 1, e a interpretar incorrectamente o enunciado, lê "somei" onde indica "subtraí":

> 1 vezes 3 é 3, para depois somar 7, dava 10. Depois estava a ver que somava 10 e já dava 20, nunca dava 12. Nem 1 dava e eu não estava a perceber, pois era o [valor] mais pequenino que eu conseguia. Afinal é "subtraí". (E1)

Alice considera que o valor em que pensa é 1 e realiza uma adição no lugar de uma subtracção. Começa por considerar não existir solução para este problema. Apenas faz tentativas com números maiores que zero, assumindo que a solução terá de ser um número positivo. Após rever a sua interpretação do problema tenta novamente encontrar a solução para o número desconhecido. Agora utiliza, em parte da resolução, a estratégia em que considera que parte do problema que pode ser representada pela expressão $3x+7$ deve assumir o valor 22 de modo a satisfazer a condição inicial. Estabelece, assim, uma equação equivalente à inicial, $3x+7=22$, para a qual procura solução por meio de tentativas:

> *A.* - O raciocínio já percebi, agora encontrar o número é que é difícil. Se eu encontrasse um número que desse 22, subtraía 10 e chegava ao 12. (…)
>
> *I.* - Que números é que está a tentar?
>
> *A.* - Estava a tentar o 5, mas ainda não cheguei lá. [Olha para o enunciado mais algum tempo e depois escreve] (E1)

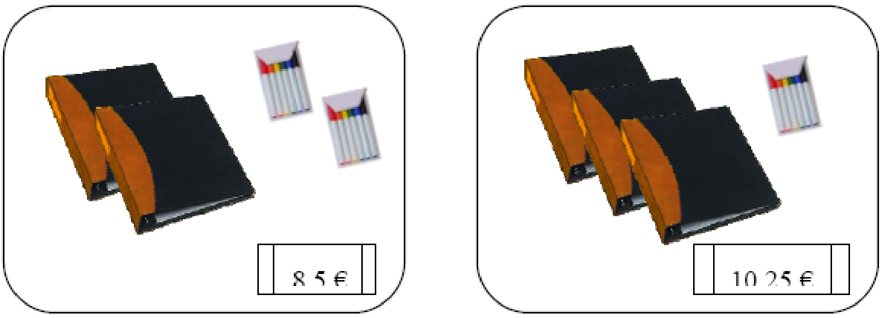
$$5 \times 3 = 15 + 7 = 22 - 10 = 12$$

Alice realiza as operações indicadas no enunciado considerando que o valor desconhecido é 5. Verifica que este valor é a solução que procura pois confirma que este satisfaz a condição indicada, com base no seu conhecimento dos números e do efeito das operações. Contudo revela alguma dificuldade em explicar o seu raciocínio:

> Porque eu tentei, tentei ver mais ou menos… O 5 por 3, toda a gente vê logo que é 15, e o 15 está próximo do 22. Ainda tinha que acrescentar sete, ainda era uns números a acrescentar e então ainda dava margem para acrescentar, mas não sei… Foi logo esse que me ocorreu, não sei porquê. (E1)

O modo como Alice apresenta as operações não é correcto e revela uma utilização operacional do sinal de igual, com uma leitura das expressões numéricas da esquerda para a direita, indicando depois do sinal de igual o resultado da operação que o antecede. Deste modo, não mostra uma compreensão da relação de equivalência que o símbolo "=" representa.

Dois amigos foram comprar material de escritório de que precisavam. Um dos amigos comprou duas pastas e dois conjuntos de marcadores, tendo gasto 8,5 euros. O outro comprou o mesmo material mas em quantidade diferente. Comprou três pastas e um conjunto de marcadores, tendo gasto 10,25 euros. A situação está apresentada na figura abaixo:



Determine o preço de uma pasta e de um conjunto de marcadores. Explique como fez.

Figura 2. Tarefa Qi-8b.

Na resposta a este problema (Figura 2), Alice indica os valores correctos do preço de cada pasta e do preço de cada conjunto de marcadores mas não explica como os determinou, dando apenas a seguinte resposta:

3€ cada pasta e 1,25 cada conjunto de marcadores

Na entrevista, Alice esclarece que determina os valores por tentativas, procurando satisfazer as duas condições dadas e iniciando a sua análise pela situação que envolve três pastas e um conjunto de marcadores (pelo valor de 10,25 euros), como mostra o excerto:

> Então fui fazendo experiências. Se é dez e se cada um [cada pasta] for a três… Mas isto não foi o meu primeiro raciocínio fiz muitos só que depois é que esqueci. Se for 3, 3 vezes 3 dá 9. Está perto de 10 e 25. Isto nunca pode ser mais do que qualquer um destes, Então 9 para 10 e 25 dá um euro e 25, então era o preço daquilo [de um conjunto de marcadores]. (E1)

Alice refere ter obtido este valor para o preço de uma pasta após ter testado os valores de 1€ e 2€, verificando que não satisfazem a condição. Na entrevista verifica ainda a validade dos valores referidos, 3€ e 1,25€, na outra condição, mostrando não estar muito segura de que eles respeitam à solução final do problema. Confirma que com estes valores obtém um custo total de 8,5€, comprando duas pastas e dois conjuntos de marcadores e valida a resposta dada no questionário. Reconhece que descobre os dois valores por tentativas apenas com base numa das condições.

Durante a EF. Na tarefa 2, Alice determina a solução do problema antes de analisar as respostas de alunos. Numera as figuras dadas de 1 a 4, de cima para baixo e da esquerda para a direita. A resolução tem por base a análise das figuras onde identifica relações entre as quantidades desconhecidas e os dados que conhece:

(1+2) 10,6 + 6,1 = 16,7 → peso de 1G+2M+1P

16,7 − 8,5 = 8,2 (1+2−3) → peso de 2M

8,2 : 2 = 4,1 → peso de 1M

8,5 + 4,1 = 12,6 → peso de 1G+1M+1P

Alice realiza algumas operações com base nos valores dados e identifica o significado do valor obtido, neste contexto, usando uma expressão algébrica. Verifica assim que $G + 2M + P = 16{,}7$ e que ao fazer $G + 2M + P - (G + P)$ obtém $2M = 8{,}2$. Após determinar o valor da incógnita M, calcula o peso do conjunto das três galinhas. Alice estabelece estas relações de modo a satisfazer as condições dadas e, apesar de usar uma estratégia com base a realização de operações aritméticas elementares, associa aos valores que obtém expressões algébricas em que as três letras representam as quantidades desconhecidas, o peso de cada uma das galinhas.

Após a EF.

Pense num número. Multiplique esse número por 2 e depois adicione 2. De seguida divida o resultado por 2. Por fim subtraia o número em que pensou. a) Que resultado obteve no final? b) O que acontece se pensar num outro número.

Figura 3. Tarefa Qf-8.1.

O questionário final apresenta um problema que ilustra propriedades das operações e que pode ser representada por uma expressão algébrica em que a letra assume o significado de parâmetro, equivalente à expressão $\frac{2a+2}{2} - a = 1$. Alice identifica a regularidade e faz algumas experiências com números concretos. Indica que o número pensado é 7 e realiza, na alínea a), as operações indicadas e, na alínea b), faz o mesmo processo com o número 3:

Numero pensado - 7

$(7 \times 2) + 2 \Leftrightarrow$
$14 + 2 = 16$

$\frac{16}{2} = 8$

$8 - 7 = 1 \rightarrow$ resultado final

Numero escolhido - 3

$(3 \times 2) + 2 \Leftrightarrow$
$6 + 2 = 8$

$\frac{8}{2} = 4$

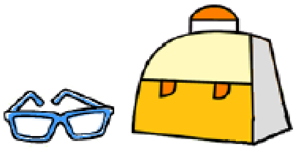
$4 - 3 = 1$

Alice procura, ainda, representar de um modo geral a regularidade que identifica, que escreve a seguir a estas operações. Consegue generalizar a situação e representa-a usando palavras e símbolos e mantém a referência às diferentes indicações dadas no enunciado:

1º passo - dobro + 2
2º passo - fica o valor inicial + 1
3º passo - fica sempre 1

Alice estabelece a generalização e representa-a mas não usa a linguagem simbólica própria da Álgebra. No momento da entrevista, retrata os vários resultados cuja validade não questiona por ter verificado com diferentes números e não destaca a relação existente entre os números e as operações realizadas.

A Maria e a Raquel foram às compras. A Maria comprou um par de óculos e duas malas iguais por 64 euros. A Raquel gastou 101 euros na compra de produtos iguais aos da Maria mas em quantidade diferente, comprou dois pares de óculos e três malas iguais.



Determine o preço de um par de óculos e de uma mala. Explique como fez.

Figura 4. Tarefa Qf-8.2.

Na tarefa Qf-8.2, Alice determina correctamente um dos valores desconhecidos e apresenta o modo como procedeu para determinar os dois valores solicitados. Realiza diversas operações de acordo com as relações que estabelece entre os dados do problema, indicando o significado dos valores que vai obtendo:

$101 - 64 = 37$ € → preço de 1 par de óculos e uma mala

$101 - 37 = 64$ → preço de 1 par de óculos e 2 malas

$64 - 37 = 27$ → preço de uma mala

$64 - 27 = 37$ → preço de 1 par de óculos

Alice verifica que a diferença entre as quantidades de produtos que Maria e Raquel compram é de apenas um produto de cada um dos dois tipos. As operações que realiza podem representar-se como se segue:

x representa o preço de um par de óculos e y representa o preço de uma mala

$$\begin{array}{rl} & 2x+3y=101 \\ - & x+2y=64 \\ \hline & x+y=37 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & 2x+3y=101 \\ - & x+y=37 \\ \hline & x+2y=64 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & x+2y=64 \\ - & x+y=37 \\ \hline & y=27 \end{array}$$

Contudo, no final, não determina correctamente o preço de um par de óculos. Na entrevista revê as operações e refere que na última operação não faz uma interpretação correcta do resultado:

> Depois fui pegar no preço outra vez de um par de óculos e de duas malas e tirei o preço de uma mala então fiquei a saber… Ah, isto está mal, não? Ah, professora eu já estou baralhada… Depois fui buscar o preço de um par de óculos e duas malas e tirei o preço de uma mala. Então fiquei a saber o valor de um par de óculos e uma mala. (E3)

Depois de verificar que não conclui de um modo correcto, Alice revê a informação que tem e identifica correctamente o modo como pode determinar o preço de um par de óculos: “Então ia… Ia a este [aponta para o primeiro valor obtido, 37] e tirava este [aponta para o preço de uma mala, que já conhece, 27]” (E3).

Alice estabelece relações entre as quantidades desconhecidas e o que é dado. Contudo não expressa essas relações usando a linguagem algébrica, apresentando apenas uma perspectiva aritmética, o que não acontece na experiência de formação onde articula operações e a expressões algébricas.

Conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem

O conhecimento dos alunos envolve uma compreensão, por parte do professor, de como os alunos desenvolvem o modo como aprendem, pensam e fazem Matemática. Esta compreensão permite que o professor apoie e potencie as capacidades dos alunos, e esclareça estratégias, conjecturas e dificuldades manifestadas pelos alunos.

Antes da EF.

> Um aluno formulou a conjectura seguinte:
> "Multiplico dois números naturais. Se multiplicar metade do primeiro pelo dobro do segundo o produto é igual ao obtido na primeira situação"
>
> Estará a conjectura formulada pelo aluno correcta? Será que a afirmação é válida para todos os números naturais? E para todos os números racionais?

Figura 5. Tarefa Qi-2b.

Na tarefa Qi-2b, Alice aponta, apenas, para a validade da conjectura apenas no conjunto dos números naturais pares:

Esta confectura formulada pelo aluno parece-me correcta para os números naturais pares, contudo parece-me que o mesmo não se passa com os números impares

Na primeira entrevista, Alice indica ter realizado a operação 2×4 e revela dificuldades na interpretação do enunciado quando é referido que "o produto é igual ao obtido na primeira situação". Em seguida, realiza algumas tentativas para se recordar do que fez mas revela uma interpretação ainda incompleta do problema. Procura obter o dobro de um número quando realiza o produto em várias situações (2×3, 2×7 e 3×7). Solicitada a reler o enunciado da conjectura, reconhece como deve proceder usando os números 3 e 7: "Metade do primeiro. Ah! Metade do primeiro pelo dobro do segundo… Ah, então três é um e meio, certo? Ai, agora as contas, vezes tem de ser o dobro do segundo, catorze..." (E1).

$3\times7 = 21$

$1,5\times14 =$

$$\begin{array}{r} 14 \\ \times\,1,5 \\ \hline 70 \\ 14 \\ \hline 21,0 \end{array}$$

Após realizar estas operações e obter resultados iguais, Alice não consegue concluir logo acerca da validade da conjectura. Relendo o enunciado da conjectura, confirma que obtém o mesmo valor quando pensa em números naturais. Pensando na possibilidade de um aluno fazer esta afirmação e outros não concordarem sugere que realizem experiências, tal como ela faz, e procura generalizar a situação: "Eu vou dizer isto de uma forma muito elementar. Porque o que se tira no dobro [3 é o dobro de 1,5] acrescenta-se no dobro [o dobro de 7 é 14], ora acaba por dar sempre a mesma coisa" (E1).

Alice testa a conjectura com diversos números e identifica a relação existente, na multiplicação. Expressa essa generalização apenas verbalmente. No âmbito da exploração das ideias e dos conhecimentos dos alunos, não revela muita segurança sobre o modo de abordar as situações em sala de aula. Reconhece, tal como foi para si nesta situação, a importância do teste de conjecturas usando diferentes números.

Durante a EF. A tarefa 2 promove a análise de respostas de alunos do 6.º ano que envolvem diferentes estratégias e representações e do modo como o professor promove a aprendizagem. Alice fica surpreendida com os diferentes modos com os alunos abordam a situação e determinam a solução do problema:

> Eu aqui nesta tive muitas dificuldades, eu achei engraçado como é que alunos, que acho eram de sexto ano, tinham arranjado mil e uma maneiras de resolver isto. E eu fiquei a pensar… Eles têm mesmo, têm mesmo capacidade e depois resolvem de várias maneiras e explicam de várias maneiras, também achei engraçado. (E2)

Alice reconhece que a análise das estratégias dos alunos contribuiu para a sua própria aprendizagem. O foco no raciocínio subjacente, mais que nos resultados, e a análise global das estratégias contribuem para que Alice se aproprie de estratégias que em algumas situações de modelação se revelam mais eficientes:

> Eu lembro-me que depois de ver esta ficha e a forma como um dos alunos tinha resolvido uma situação, numa ficha seguinte, já não sei qual foi, sei que resolvi um problema tendo em conta o raciocínio do aluno, e foi através do raciocínio desta ficha. (E2)

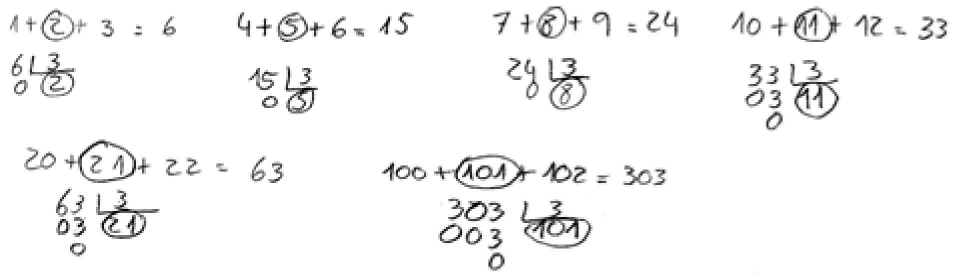
Alice salienta a importância deste trabalho no desenvolvimento da capacidade dos alunos estabelecerem relações entre diferentes quantidades de modo a conseguir determinar os valores desconhecidos. Nestas situações indica que o professor deve ter um conhecimento que lhe permita responder às dúvidas dos alunos e "poder responder de várias formas, e explicar de várias formas para ver a melhor forma que o aluno, o aluno entende" (E2).

Após a EF.

> Um aluno formulou a conjectura seguinte:
> "Adiciono três números naturais consecutivos. Se dividir o resultado por três obtenho sempre o segundo número."
>
> Estará a conjectura formulada pelo aluno correcta? Será que a afirmação é válida para todos os números naturais?

Figura 6. Tarefa Qf-2b.

Esta tarefa apresenta uma conjectura formulada por um aluno que Alice valida após a testar para diferentes números naturais:



De seguida, Alice indica que esta conjectura é válida para todos os números naturais. Na terceira entrevista peço-lhe que justifique esta relação: "Todos estes números [os resultados] são divisíveis por 3, ou múltiplos de 3. Então ao dividir por 3, o que é que vai acontecer!? Não tem muita lógica mas pronto" (E3). Alice verifica que o resultado obtido na adição de três números naturais consecutivos é um múltiplo de três, contudo, não justifica porque tal acontece nem porque ao dividir por três o resultado é igual ao segundo número natural.

No trabalho a realizar na sala de aula, Alice salienta a importância de o professor atender às várias estratégias que podem surgir e à sua discussão:

> Depois tem de ter em conta todas aquelas estratégias que temos vindo a falar da aula, deixar discutir os resultados e depois estar atento às várias, às várias respostas. Não dizer logo à partida que está mal sem, sem haver indicação se pode estar certo, porque havendo muitas respostas para uma pergunta, a criança pode ter tido um raciocínio que o próprio professor não teve, então tem que ter também em atenção. (E3)

Alice verifica que os alunos podem apresentar estratégias próprias que o professor, na sua prática lectiva, deve procurar compreender.

Conclusão

Alice define de um modo claro o seu desejo em frequentar o Mestrado em Educação Pré-escolar e, na experiência que vive em diferentes contextos, revela a sua perspectiva sobre o ensino neste nível, em particular na Matemática. Considera importante o trabalho neste tema a que atribui um carácter informal.

No âmbito do trabalho realizado nas situações de modelação, antes de frequentar a experiência de formação, Alice revela dificuldades na interpretação e resolução de situações e, quando responde, fá-lo por tentativas. A experiência de formação proporciona-lhe oportunidades de trabalhar com situações de modelação e de analisar diferentes resoluções e representações como a utilização de linguagem algébrica. Os formandos discutem e partilham diferentes modos de resolução, o que Alice valoriza, dadas as dificuldades que reconhece ter nesta área. Na experiência de formação e após a sua concretização resolve situações de modelação e estabelece generalizações, como sugerem Stump e Bishop (2001), contudo com um reduzido uso da linguagem algébrica. Utiliza estratégias de cunho aritmético que se baseiam no estabelecimento de relações (Sutherland, 2004) e no uso de notações próprias e esquemas.

Alice não concretiza a possibilidade de promover situações de modelação no ensino pré-escolar, mas valoriza as aprendizagens que realizou no âmbito da experiência de formação, quer no que se refere ao conhecimento matemático, quer em relação ao conhecimento dos alunos e dos seus processos de aprendizagem. Destaca, ainda a importância do conhecimento de diferentes estratégias e da capacidade que o professor deve ter para analisar as resoluções dos alunos e para conduzir as situações de ensino-aprendizagem de modo a fomentar a discussão e partilha de ideias.

A abordagem seguida na experiência de formação, contemplando e articulando o desenvolvimento do conhecimento matemático dos formandos, com ênfase no pensamento algébrico, e do conhecimento sobre o ensino-aprendizagem da Álgebra contribui para que Alice melhore a sua capacidade de analisar e resolver situações de modelação e perspective aspectos importantes relativos à sua futura prática enquanto educadora (Ponte & Chapman, 2008). Este conhecimento de situações de modelação abrange apenas uma vertente do pensamento algébrico pelo que o trabalho deve ser desenvolvido nas várias vertentes na formação inicial, contribuído para que os formandos desenvolvam um conhecimento aprofundado do trabalho a realizar para promover o pensamento algébrico dos seus futuros alunos.

Referências

Albuquerque, C., Veloso, E., Rocha, I., Santos, L., Serrazina, L., & Nápoles, S. (2006). *A Matemática na formação inicial de professores. Lisboa*: APM e SPCE.

Canavarro, A. P. (2007). O pensamento algébrico na aprendizagem da Matemática nos primeiros anos. *Quadrante, 16*(2), 81-118.

Carraher, D., & Schliemann, A. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. In F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 669-705). Charlotte, USA: NCTM e IAP.

Doerr, H. (2004). Teachers' knowledge and the teaching of algebra. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 265-290). Norwell: Klumer.

Driscoll, M. (1999). *Fostering algebraic thinking: A guide for teachers, grade 6-10.* Portsmouth, NH: Heinemann.

Erickson, F. (1985). *Qualitative methods in research on teaching*. Acedido em 26 Outubro, 2010, de http://www.eric.ed.gov/PDFS/ED263203.pdf

Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is algebraic reasoning? In J. Kaput, D. Carraher & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum.

ME (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC.

NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Ponte, J. P. (2006). Estudos de caso em educação matemática. Acedido em 2 de Dezembro, 2009, de http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/docs-pt/06 -Ponte%20(Estudo%20 caso.pdf

Ponte, J. P., & Chapman, O. (2008). Preservice mathematics teachers' knowledge and development. In L. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (2nd ed., pp. 225-263). New York, NY: Routledge.

Reeves, C.A. (2000). The chicken problem. *Mathematics Teaching in the Middle School, 5*(6), 398-402.

Stake, R. (1994). Case studies. In N. Denzin & Y. Lincoln (Eds.), *Handbook of qualitative research* (pp. 236-247). London: Sage.

Sutherland, R. (2004). A toolkit for analysing approaches to algebra. In K. Stacey, H. Chick & M. Kendal (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra: The 12th ICMI Study* (pp. 73-96). Norwell: Klumer.

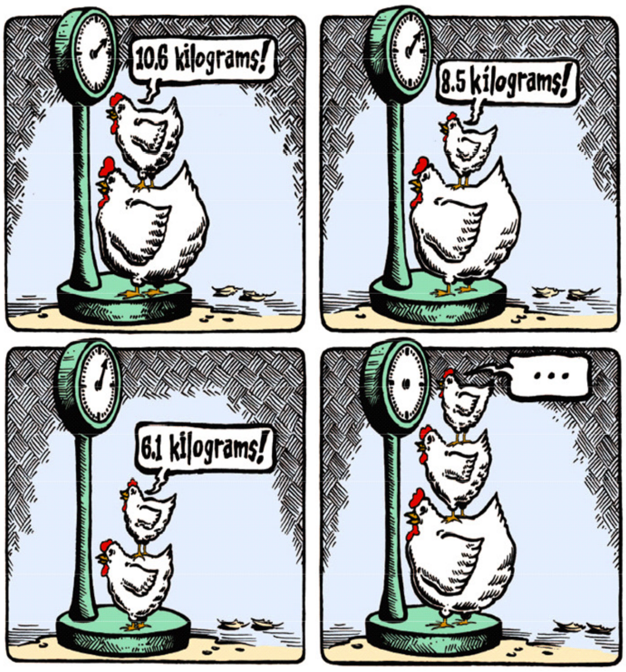
Stump, S., & Bishop, J. (2011). Framing the future: Inventing an algebra course for pre- service elementary and middle school teachers. In H. ChicK, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), *The future of the teaching and learning of algebra* (Proceedings of the 12th ICMI Study Conference, pp. 564-570). Melbourne: University of Melbourne.

Anexo: Tarefa 2 – Quantidades desconhecidas

Observe a trajectória de aprendizagem dos 44 alunos de uma turma do 6.º ano descrita pela professora (ver Reeves, 2000):

A professora da turma apresentou o problema das galinhas da figura 1 com o intuito de os alunos o resolverem usando abordagens intuitivas antes de iniciarem o estudo formal da Álgebra.

A resolução do problema foi feita em casa e a apresentação das respostas encontradas foi feita na aula. Apenas 22 alunos da turma (50%) tentaram resolver o problema. Destes, 12 encontraram a resposta correcta mas apenas 4 fizeram uma solução fácil de seguir, organizada.



Quanto pesam as três galinhas? Quanto pesa cada galinha?

Fig. 1 – Chicken Problem

(A) Analise estas duas respostas e explique que estratégias seguiram estes dois alunos.

Nome: MATT

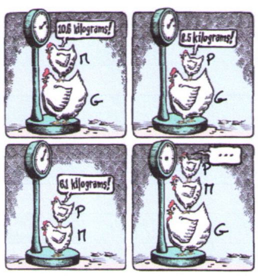
O peso da galinha grande é 6.5 kg.

O peso da galinha média é 4.1 kg.

O peso da galinha pequena é 2 kg.

ui está como eu descobri: Eu coloquei
números 1,2,3 e 4 em cada caixa. Depois
icionei a caixa 2 e a caixa 1. Obtive a soma
16.7. Depois subtrai a caixa 3 a 16.7.
tive o resultado de 8.2. Depois dividi
2 por 2. Obtive 4.1 para o peso da
linha média. Depois subtrai 4.1 à
ixa 1 que tem a galinha grande e a
dia. Obtive 6.5 para a galinha grande.
ois subtrai 4.1 à caixa 2 e obtive 2
ra a galinha pequena.

2 – Resolução de Matt



Nome: JOANNA

O peso da galinha grande é 6.5.

O peso da galinha média é 4.1.

O peso da galinha pequena é 2.0.

Aqui está como eu descobei:

$G + M = 10.6$ kg

$G + P = 8.5$ kg

$$\begin{array}{r} M \\ -P \\ \hline 2.1 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 10.6 \\ -8.5 \\ \hline 2.1. \end{array}$$

$M + P = 6.1$

$M - P = 2.1$

$2M = 8.2$

$M = 4.1 \quad G = 6.5$

$G + M = 10.6$

$G + 4.1 = 10.6$

$$\begin{array}{r} 10.6 \\ 4.1 \\ \hline 6.5 \end{array}$$

$G = 6.5$

$G + P = 8.5$

$$P = 2.0 \qquad \begin{array}{r} 8.5 \\ -6.5 \\ \hline 2.0 \end{array}$$

Fig. 3 – Resolução de Joanna