

# O ERRO COMO PONTE PARA A APRENDIZAGEM DAS EQUAÇÕES: O CASO DA MARIA

Luísa Vale

*Escola Secundária Dr. Joaquim Gomes Ferreira Alves – Valadares*  
mlsvale@sapo.pt

Rosa Antónia Ferreira

*Faculdade de Ciências da Universidade do Porto & CMUP*  
rferreir@fc.up.pt

Leonor Santos

*Instituto de Educação da Universidade de Lisboa & IUDEF*  
leonordsantos@sapo.pt

## Resumo

Este estudo procura analisar e compreender os erros cometidos por uma aluna do 7.º ano de escolaridade, Maria, no âmbito do Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico no contexto de ensino-aprendizagem do tópico *Equações*. Procura ainda investigar como o *feedback* escrito usado pelo professor pode contribuir para levar a Maria a aperceber-se dos erros que comete e a tentar ultrapassá-los. Foi usada uma abordagem qualitativa e o estudo de caso como *design* de investigação. A análise de dados evidencia que alguns erros referenciados na literatura revista estão presentes nas produções da Maria: (i) erros que têm a sua origem num obstáculo cognitivo; (ii) erros que têm a sua origem na ausência de significado; e (iii) erros que têm a sua origem em atitudes afectivas e emocionais face à Matemática. Verificou-se que o *feedback* escrito usado pela professora ajudou a Maria a reconhecer alguns erros por si cometidos mas nem sempre foi eficaz na regulação das suas aprendizagens.

**Palavras-chave:** Erros dos alunos, Avaliação reguladora, *Feedback* escrito, Equações.

## Introdução

Nas últimas décadas, a análise de erros como abordagem de pesquisa em Educação Matemática tem vindo a desenvolver-se, sob várias formas (por exemplo, Cury, 1995; Kieran, 1992; Matz, 1981). De facto, a compreensão dos erros cometidos pelos alunos em tópicos matemáticos específicos e as justificações que eles apresentam podem fornecer pistas para novas abordagens no ensino desses mesmos tópicos. É importante salientar que, neste contexto e neste estudo, o erro é conceptualizado como um fenómeno inerente à aprendizagem. No entanto, se o erro não surpreender o professor ou não lhe despertar a atenção, não dará lugar a mecanismos de regulação, como o

*feedback* escrito. A não compreensão da natureza dos erros dos alunos reduz as possibilidades de aprendizagem efectiva. Munido deste conhecimento, cabe ao professor intervir com intencionalidade formativa criando contextos propícios para os alunos aprenderem. Em particular, é através de uma prática avaliativa com funções reguladoras da aprendizagem que contemplem a recolha de informação, a sua interpretação e acção consequente que tais contextos podem ser promovidos (Santos, Pinto, Rio, Pinto, Varandas, Moreirinha, Dias, Dias & Bondoso, 2010).

Nesta comunicação, pretendemos analisar e compreender os erros cometidos por uma aluna do 7.º ano de escolaridade, no âmbito do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB) (Ponte et al., 2007), no contexto de ensino-aprendizagem do tópico *Equações*, e investigar como o *feedback* escrito pode ser usado pelo professor para levar a aluna aperceber-se dos erros que comete e a tentar ultrapassá-los. A investigação aqui relatada, parte de um trabalho mais abrangente (Vale, 2010), é guiada pelas seguintes questões: (1) Como se caracterizam os erros mais frequentemente cometidos pela Maria na aprendizagem do tópico *Equações*? Quais as suas tipologias e as suas origens? (2) Como é que Maria se foi apercebendo dos erros que cometeu? De que modo o *feedback* dado pelo professor favoreceu este processo? e (3) Como é que a Maria procurou ultrapassar esses erros? Que estratégias utilizou? Quais as principais dificuldades com que se confrontou?

### **Fundamentação teórica**

Segundo o NPMEB (Ponte et al., 2007), o ensino-aprendizagem foca-se em quatro áreas consideradas fundamentais: Números e Operações, Álgebra, Geometria e Organização e Tratamento de Dados, e em três capacidades transversais: Resolução de problemas, Raciocínio e Comunicação. Dentro do tema Álgebra, no 7.º ano de escolaridade, são trabalhados três tópicos: (1) *Sequências e Regularidades*; (2) *Funções* e (3) *Equações*. Nesta comunicação, abordamos apenas o tópico *Equações*.

A Álgebra é um dos temas considerados fundamentais ao longo dos três ciclos do ensino básico. No terceiro ciclo, o propósito principal de ensino da Álgebra é o desenvolvimento, nos alunos, da linguagem e do pensamento algébrico. Neste ciclo aprofunda-se o estudo de relações e das suas representações em linguagem simbólica, já trabalhadas no segundo ciclo (Ponte et al., 2007). Assim, “aprender Álgebra implica ser

capaz de pensar algebricamente numa diversidade de situações, envolvendo relações, regularidades, variação e modelação” (Ponte, Branco & Matos, 2009, p. 10). É este o nosso entendimento sobre a aprendizagem da Álgebra e é esta a perspectiva que permeia o trabalho de investigação aqui relatado.

As equações do 1.º grau com uma incógnita constituem um tópico relevante no NPMEB. Já nos dois primeiros ciclos de escolaridade se trabalha com equações, sobretudo no desenvolvimento do conceito de igualdade e na compreensão da relação das operações com as respectivas inversas. Porém, no 3.º ciclo do ensino básico, pretende-se ainda que os alunos aprendam a resolver equações interpretando e representando situações em diferentes contextos e sejam capazes de resolver problemas recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos (Ponte et al., 2009).

Não é possível conceber um programa sem dedicar um espaço à avaliação das aprendizagens. O NPMEB refere a importância da avaliação como veículo de informação, para o professor, sobre a evolução do desempenho dos seus alunos, nomeadamente, analisando os problemas e lacunas na aprendizagem dos alunos e procurando formas de os levar a ultrapassá-las. A este propósito, pode ler-se que: “A avaliação deve, por isso, fornecer informações relevantes e substantivas sobre o estado das aprendizagens dos alunos, no sentido de ajudar o professor a gerir o processo de ensino-aprendizagem” (Ponte et al., 2007, p. 12). É de salientar o carácter predominantemente regulador da avaliação veiculado por este documento.

Neste estudo, entendemos por regulação das aprendizagens “todo o acto intencional que, agindo sobre os mecanismos de aprendizagem, contribua directamente para a progressão e/ou redireccionamento dessa aprendizagem” (Santos, 2002, p. 77). De facto, “se queremos ‘gerir’ o erro, para lá do desempenho registado, é preciso tentar determinar as razões que lhe deram origem, e dizer o que ele revela dos conhecimentos adquiridos ou das falhas do aluno” (Hadji, 1994, p. 125). Nesta perspectiva, a análise da produção escrita dos alunos permite, entre outras, fazer um inventário dos erros encontrados e distinguir a sua natureza, já que exigem diferentes procedimentos pedagógicos para a sua superação. Esta opinião é partilhada por Leal (1992), quando afirma que “A ultrapassagem dos erros só pode ser feita por aqueles que os cometem, e não por aqueles que os assinalam, uma vez que as lógicas de funcionamento são diferentes” (p. 51).

## O erro na aprendizagem da Álgebra

O erro, por si só, não conduz a nada se não for seguido de uma reflexão sobre a sua ocorrência, tendo em vista o modo de o ultrapassar. Na verdade, é importante que o aluno reflita sobre o seu próprio progresso, identificando os erros cometidos e utilizando-os de modo a regular a sua aprendizagem (Martins, 1996). A reflexão sobre o processo e o produto permite ao aluno desenvolver a capacidade de auto-questionamento. Note-se que a mudança do estatuto do erro é condição necessária para a auto-regulação das ideias dos alunos. Em qualquer processo de aprendizagem, o erro deve passar de algo que se tem de esconder a algo natural e positivo para a aprendizagem. Esta concepção de erro como ponte para a aprendizagem, de erro como inerente ao processo de aprendizagem (Borasi, 1996; Cury, 2007; Hadji, 1994; Pinto & Santos, 2006) guiou todo o trabalho realizado nesta investigação.

Quando abordamos o erro em Educação Matemática, é fundamental sabermos de que modo os erros dos alunos podem ser classificados. Na literatura por nós revista, encontramos diferentes formas de analisar os erros e de os classificar. A título de exemplo, apresentamos uma sistematização de erros cometidos pelos alunos na aprendizagem da Álgebra (Quadro 1), segundo Hall (2002a, 2002b).

Quadro 1: Sistematização de erros (Hall, 2002a, 2002b).

Categorização	Exemplos
(1) erro por <i>eliminação (deletion)</i>	Simplificar $39x - 4$ como $35x$ ou $2xy - 2x$ como $y$
(2) erro por troca de membros ( <i>switching addends</i> )	$x + 37 = 150$ e a sua resolução passar pela transformação em $x = 37 + 150$
(3) erro por <i>redistribuição (redistribution)</i>	$x + 10 = 25$ , os alunos subtraem 10 ao primeiro membro e adicionam 10 ao segundo, obtendo a equação $x + 10 - 10 = 25 + 10$
(4) erro por <i>transposição (transposing error)</i>	$x + \frac{5}{2} = 3 \Leftrightarrow x + 5 = 6$
(5) erro na aplicação da <i>operação inversa</i>	$4x = 1$ $x = 1 - 4$
(6) erro de <i>divisão (division)</i>	$3x = 2$ $x = 1,5$
(7) erro de <i>exaustão (exhaustion error)</i>	$\frac{x^2 + 5x + 6}{x^2 - 2x - 8} = \frac{(x + 3)(x + 2)}{(x - 4)(x + 2)} = \frac{x + 3}{x - 4} = \frac{3}{-4}$
(8) erro de ausência de estrutura ( <i>absence of structure</i> )	$5x + x + 2 = 3x + 12 \Leftrightarrow 3 + 2 = 3x - 8$

Socas (1997) discute as dificuldades de aprendizagem em Matemática e as suas distintas origens. Estas dificuldades manifestam-se sob a forma de obstáculos cognitivos e, na prática, na forma de erros. O erro tem origens diferentes; pode ser visto como resultante da presença de um processo cognitivo inadequado e não apenas como consequência de uma falta de conhecimentos específicos ou de uma distração. Na opinião deste autor, os erros de aprendizagem em Matemática devem-se a certas dificuldades que podemos agrupar em três categorias: (A) erros com origem num obstáculo cognitivo; (B) erros com origem na ausência de significado; e (C) erros com origem em atitudes afectivas e emocionais face à Matemática. Dentro da categoria B, Socas distingue: (B1) erros de Álgebra com origem na Aritmética; (B2) erros de procedimento (incluindo o uso indevido de fórmulas ou procedimentos); e (B3) erros de Álgebra devidos às características da linguagem algébrica. A Figura 1 apresenta a tipologia de Socas (1997), onde são indicados os códigos A, B (B1, B2 e B3) e C. Descrevemos, em seguida, cada um dos códigos utilizados nesta tipologia.

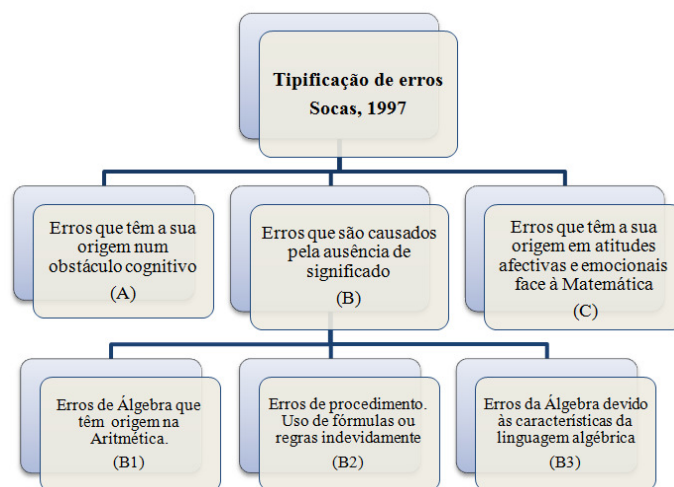


Figura 1: Esquema de tipificação de erros (Socas, 1997)

*Código A* – Consideramos nesta categoria os erros com origem num *obstáculo cognitivo*. Estes erros são referidos como conhecimento adquirido, e não como uma falta de conhecimento, que provou ser eficaz em determinado contexto (Ruano, Socas & Palarea, 2003). Quando o aluno utiliza esse conhecimento fora de tal contexto, provoca respostas inadequadas (exemplos: erros de *eliminação*, erros de *concatenação*<sup>1</sup>...)

<sup>1</sup> Erro de *concatenação*: erro devido à justaposição de dois ou mais símbolos, por exemplo  $(-1 + 2x = -12x)$ .

*Código B* – Nesta categoria, encontramos os erros que têm a sua origem numa ausência de sentido. A categoria está dividida nas três subcategorias seguintes:

*Código B1* – Erros da Álgebra que têm a sua origem na Aritmética. Para entender a generalização das relações e processos algébricos, é necessário que o aluno as tenha assimilado no contexto da Aritmética; quando isso não acontece, os erros cometidos classificam-se com o código B1 (exemplos: uso inadequado de parêntesis, particularização inadequada, erros por *transposição*, erros de *divisão* ...).

*Código B2* – Erros com origem na utilização, pelos alunos, de fórmulas ou regras de procedimento de modo indevido (exemplo: aplicação inadequada da propriedade distributiva, ...)

*Código B3* – Erros devido às características da linguagem algébrica (exemplos: erros com origem na incompreensão do significado do sinal de igual em Álgebra, erros na substituição formal de variáveis, ...).

*Código C* – Nesta categoria, consideramos os erros com origem em atitudes afectivas ou emocionais (exemplos: falta de concentração, excesso de confiança, esquecimento ...)

A maioria dos erros cometidos pelos alunos na aprendizagem de equações deve-se a causas diversas. Podemos referir, entre outras: (1) a transição conceptual da Aritmética para a Álgebra (Matz, 1981); (2) a realização de falsas generalizações sobre números (Ruano et al., 2003); e (3) o uso inapropriado de fórmulas ou regras de procedimentos (Palarea, 1998; Ruano et al., 2003). É de salientar que, na aprendizagem do tópico equações, os erros cometidos têm essencialmente a sua origem num obstáculo cognitivo e também, na ausência de significado (Socas, 1997). Outros erros frequentemente cometidos incluem os erros por *transposição*, isto é, erros relativos à realização das mesmas operações em ambos os membros da equação (Kieran, 1992), erros de *eliminação* (Hall, 2002a) e erros na aplicação da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (Socas 1997).

### **O erro e o *feedback* escrito**

Uma das práticas de avaliação reguladora das aprendizagens dos alunos é a escrita avaliativa ou *feedback* escrito (Santos, 2008). Esta prática é privilegiada neste trabalho, uma vez que contribui, potencialmente para a consciencialização por parte dos alunos

dos erros cometidos e também para a busca de formas de os ultrapassar; conseqüentemente, rentabiliza o erro para a aprendizagem (Santos et al., 2010). No entanto, estudos efectuados aludem ao facto da tarefa de dar *feedback* escrito exigir tempo e conhecimento (a vários níveis) por parte do professor (Santos et al., 2010; Leal, 1992; Menino & Santos, 2004).

Há investigações que evidenciam que os professores que utilizam o *feedback* escrito de forma sistemática provocam ganhos significativos nas aprendizagens dos alunos (Black & Wiliam, 1998) e na capacidade de identificação e auto-correcção dos seus erros (Fernandes, 2005; Santos, 2008). Também para Santos (2002), se na sala de aula houver uma cultura de avaliação que regule as aprendizagens dos alunos, então o conhecimento que o professor terá dos seus alunos será maior, facilitando e melhorando a qualidade do *feedback* escrito. Por sua vez, tal promoverá o desenvolvimento de uma avaliação cada vez mais reguladora.

Além disso, a investigação tem evidenciado que um *feedback*, que se pretende eficaz, para promover uma aprendizagem mais duradoura, deverá: (1) ser descritivo, em detrimento do avaliativo (Gipps, 1999), dirigido à tarefa em vez de ao *self* (Wiliam, 1999), interpelando e incentivando o aluno (Santos et al., 2010); (2) recorrer à forma interrogativa e a uma linguagem acessível, concreta e contextualizada (Bruno, 2006); (3) ser diversificado e adequado a cada aluno (Santos & Dias, 2006); (4) ser claro e informativo; (5) referir e reconhecer o esforço dos alunos; e (6) apontar pistas de acção futura e incentivar o aluno a reanalisar a resposta dada (Santos, 2002). O *feedback* é tendencialmente mais efectivo quando é feito para estimular a correcção dos erros, através de uma abordagem que foque a aprendizagem esperada com a tarefa (Black & Wiliam, 1998). Deve, no entanto, ter-se em atenção que “o *feedback* nunca deve ser dado antes de o aluno ter oportunidade para pensar e trabalhar na tarefa (...) e preferencialmente devem ser escolhidas tarefas ainda não classificadas, nas quais os alunos tenham ainda oportunidade de melhorar” (Santos et al., 2010, p. 65).

## **Metodologia**

Este estudo seguiu uma abordagem qualitativa, de cunho interpretativo (Bogdan & Biklen, 1994), pois pretendemos, entre outros aspectos, descrever erros cometidos pelos alunos, categorizá-los, analisar possíveis origens dos erros e compreender as

dificuldades evidenciadas pelos alunos. Além disso, pretendemos estudar dispositivos de regulação que o professor pode usar na sala de aula para ajudar os alunos a tomar consciência dos seus erros e a usá-los como ponte para a aprendizagem. O *design* de estudo de caso (Merriam, 1988) permitiu compreender de forma mais aprofundada casos particulares para melhor se poder compreender o fenómeno mais abrangente.

O estudo foi realizado numa turma de 7.º ano leccionada pela investigadora e primeira autora deste comunicação, no ano lectivo de 2009/10, numa escola secundária do distrito do Porto. A turma escolhida tinha 27 alunos, quase todos com 12 anos no início do ano lectivo. Destes alunos, foram escolhidos três para a constituição de casos – Rita, Maria e David (pseudónimos). Esta escolha baseou-se nos seguintes critérios: (1) diferentes níveis de desempenho, recorrendo ao aproveitamento escolar nos anos lectivos de 2007/08 e 2008/09; (2) ser a primeira vez que frequentavam o 7.º ano; (3) capacidade de comunicação; (4) predisposição para participar no estudo; e (5) possibilidade de reunir com a investigadora fora das aulas. Nesta comunicação, por restrições de espaço, apenas apresentamos os resultados relativos à Maria.

No Quadro 2 identificamos os diferentes instrumentos de recolha de dados utilizados, relacionando-os com as questões de investigação. A intensidade do sombreado revela o grau de importância que cada instrumento teve para dar resposta a cada questão de investigação; por exemplo, para responder à primeira questão de investigação foram mais importantes a recolha documental (das produções escritas da Maria) e a observação das aulas.

Quadro 2: Relação entre as questões de investigação e os instrumentos de recolha de dados

<b>Questão</b>	<b>Entrevistas</b>	<b>Observação de aulas</b>	<b>Notas de campo</b>	<b>Recolha documental</b>
Questão 1				
Questão 2				
Questão 3				

Todas as cinco entrevistas realizadas à Maria no âmbito deste estudo foram semi-estruturadas, duraram cerca de 30 minutos e foram realizadas no Laboratório de Matemática da escola. As entrevistas foram gravadas em áudio e posteriormente transcritas na íntegra. Tiveram, contudo, objectivos diferentes. A primeira entrevista foi



focada na perspectiva da aluna face à Matemática, ao erro e à avaliação; as restantes tiveram dois propósitos: clarificar aspectos das produções escritas da aluna nas tarefas propostas nas aulas que suscitavam dúvidas, e procurar evidências sobre as causas dos erros detectados.

Sendo a professora da turma a investigadora, a observação feita foi de carácter participante e as notas de campo não puderam ser tão exaustivas como seriam no caso de a investigadora não desempenhar, simultaneamente, o papel de professora. Para este estudo, foram observadas e gravadas em áudio três aulas relativas ao tópico *Equações*. Na recolha documental, as produções escritas da Maria foram instrumentais durante a realização de todas as entrevistas. Contudo, foram também recolhidas as suas produções durante as aulas observadas, permitindo uma maior triangulação de dados.

A análise dos erros cometidos por Maria nas produções recolhidas seguiu as categorias de Socas (1997) apresentadas na Figura 1. O *feedback* fornecido pela professora foi analisado tendo em conta a sua natureza (Gipps, 1999), enfoque (William, 1999) e efeito que produziu na segunda versão produzida por Maria.

### **Contexto Pedagógico**

Os professores de 7.º ano da escola elaboraram uma cadeia constituída por 7 tarefas, a última das quais a ser resolvida num momento formal de avaliação, individualmente e em duas fases. As restantes tarefas foram pensadas para serem resolvidas a pares ou em pequenos grupos de três alunos, procurando desenvolver a sua autonomia, a capacidade de trabalhar colaborativamente, de discutir ideias e de respeitar as ideias dos outros. Procurou-se construir uma cultura, na sala de aula, em que o erro assumisse um papel inerente à aprendizagem. Assim, os alunos foram-se apercebendo da importância da participação activa na sua aprendizagem. Foram ainda enfatizadas situações propícias à reflexão crítica sobre os processos apresentados pelos alunos, incentivando, de forma continuada, a explicitação de todas as suas ideias, mesmo as menos correctas. No decorrer da realização das tarefas, a professora foi incentivando os alunos que revelavam mais dificuldades a procurar ultrapassá-las, fomentando a reflexão, quer sobre processos, quer sobre produtos. Em geral, foi realizada, em vários momentos de aula ou apenas na última parte, uma discussão com toda a turma, por forma a que os

alunos, juntamente com o professor, elaborassem uma síntese que deveriam registar nos seus cadernos.

## **Apresentação e discussão de resultados**

### **A aluna Maria**

Maria não gosta de errar e, para ela, o melhor processo de corrigir os erros é “(...) apagar tudo e fazer tudo de novo para ver se percebi” (Entrevista, 22 de Outubro, 2009). A persistência pareceu ser uma característica da aluna, que admite ser teimosa: “Eu sou muito teimosa (...) se não dá, tento outra maneira, e se continua mal volto ao primeiro processo” (Entrevista, 22 de Outubro, 2009). De seguida, analisamos as dificuldades e os erros cometidos pela Maria na aprendizagem de processos de resolução de equações. Procuramos incluir na nossa análise uma reflexão sobre como o *feedback* escrito, um dos mecanismos de avaliação reguladora utilizados pela professora, que facilitou à Maria a tomada de consciência desses erros e contribuiu para que ela os remediasse.

### **Algumas dificuldades/erros apresentados por Maria na resolução de equações**

Apresentamos a resolução da Maria de uma das tarefas propostas em sala de aula. Esta tarefa, que envolvia a resolução de várias equações, foi trabalhada em duas fases, isto é, as resoluções dos alunos eram comentadas por escrito pela professora e, numa aula posterior, eles poderiam voltar a trabalhar nas suas produções, procurando melhorá-las com base no *feedback* fornecido.

Na Figura 2, apresentamos a resolução da equação  $-7a + 4 + 10a = 4 - 2a$  realizada pela Maria. A aluna usa um método informal recorrendo a um modelo de balanças. Começa por adicionar a ambos os membros da equação a mesma quantidade ( $-4$ ), realizando correctamente a operação respectiva no primeiro membro mas cometendo, aparentemente, um erro de concentração (codificado na categoria C no modelo de Socas, 1997) ao esquecer-se do sinal menos no termo  $-2a$ .

$$\begin{array}{l}
 1.1 \\
 -7a + 4 + 10a = 4 - 2a \\
 \hline
 -7a + 4 + 10a - 4 = 4 - 2a - 4 \\
 \hline
 -7a + 10a = 0 \\
 \hline
 -7a + 10a - 10a = 0 - 10a \\
 \hline
 -7a + 8 = 0 \\
 x = 1
 \end{array}$$

Figura 2: Primeira fase da resolução da questão 1.1. da tarefa sobre equações.

No passo seguinte, a incógnita do termo  $10a$  desaparece, evidenciando um erro de concentração (código C). Por fim, nesta resolução, Maria comete um erro de *eliminação*, codificado com a letra A (Socas, 1997), ao adicionar termos não semelhantes. Este erro é também referido na caracterização de Hall (2002a). De notar ainda que, apesar de a incógnita em questão ser  $a$ , a aluna dá como resposta  $x=1$ , o que poderá apontar para mais um erro com origem no foro afectivo (código C). No entanto, a aluna pode ter efectuado outro erro de *eliminação* substituindo simultaneamente a incógnita  $a$  por  $x$ .

O *feedback* fornecido a esta produção foi “Por que desaparece a variável do termo  $10a$ ? Se atribuíres valores à variável, a última igualdade é sempre verdadeira?” Este *feedback*, dirigido à tarefa, por pensarmos ser mais eficaz, pretendia dar pistas à aluna para melhorar a sua produção na segunda fase. Efectivamente, analisando a produção de Maria na segunda fase (Figura 3), parece existir evidência de que a aluna entendeu o *feedback* dado, reconheceu o erro de *eliminação* e conseguiu ultrapassá-lo.

$$\begin{array}{l}
 1.1 \\
 -7a + 4 + 10a = 4 - 2a \\
 -7a + 10a = 4 - 2a - 4 \\
 -7a + 10a + 2a = 4 - 4 \\
 \hline
 5a = 0 \\
 a = \frac{0}{8} = 0,625
 \end{array}$$

Figura 3: Segunda fase da resolução da questão 1.1 da tarefa sobre equações

A entrevista à Maria, realizada após a aula em que ela trabalhou na tarefa das equações pela segunda vez (em que se procurou perceber melhor como a aluna havia compreendido os erros que havia cometido e como os teria ultrapassado), parece confirmar a afirmação anterior:

*Professora:* Observa a tua resolução na primeira fase.

*Maria:* Esqueci-me de pôr a variável, passei de um lado para o outro e a variável desapareceu não a passei para baixo (pausa) ... eu nos testes esqueço-me!

*Professora:* Mas as resoluções não podem depender de ser ou não teste!

*Maria:* Sim, Baralhei-me toda! Lembrei-me de uma ficha em que fazíamos  $x=1$ , igual a 2 e por aí fora e achei que era igual.

*Professora:* Não encontras mais nada?

*Maria:* Juntei tudo, eu não posso mexer neste se não for igual a este [aponta para termos com incógnita e termos sem incógnita].

(Entrevista, 6 de Maio, 2010)

Da entrevista da aluna, podemos também inferir que há factores de origem afectiva que podem ter uma influência significativa na forma como ela realiza as tarefas, em qualquer fase. A distração e a ansiedade podem ser motivos para alguns erros cometidos pela Maria (código C, segundo Socas, 1997).

Analisando novamente a produção da Maria na segunda fase da resolução da equação –  $7a + 4 + 10 a = 4 - 2a$  (Figura 3), verificamos que, apesar de ter ultrapassado as dificuldades reveladas na primeira fase, a Maria apresenta novos erros que podem enquadrar-se, segundo a tipificação de Socas (1997), na subcategoria B1. De facto, na terceira linha da produção da aluna, surge um erro por *transposição* e um erro de *divisão*, igualmente referidos por Hall (2002a). Relativamente a estes erros, quando com eles confrontada durante uma entrevista, Maria afirma:

(...) Eu aqui fiz quatro menos e entre parêntesis menos quatro e não podia, o menos só aparece uma vez. Também dividi mal, está ao contrário. O número que fica por baixo tem que ser o que fica à beira da letra. (Entrevista, 6 de Maio, 2010)

A aluna dá, assim, sinal de ter identificado o erro cometido e de o ter corrigido. Contudo, resta a dúvida sobre se terá efectivamente compreendido as razões dos processos necessários à correcção dos erros identificados.

A dificuldade em utilizar adequadamente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição é muito frequentemente referenciada na literatura e, de acordo com o modelo de Socas (1997), pode ser considerada na subcategoria B2. Na primeira fase da resolução da equação  $3(x - 2) = 5x$  (Figura 4), Maria opta por um processo informal, mais uma vez recorrendo a um modelo com balanças. No segundo passo da sua resolução, Maria subtrai o número 3 nos dois membros da equação, cometendo um erro enquadrado na subcategoria B2, pois verifica-se a aplicação de uma regra válida num contexto, mas desajustada nesta situação. A Maria não usa a propriedade distributiva, adiciona termos não semelhantes ( $5x - 3 = 2$ ), cometendo um erro de *eliminação*, classificado na categoria A, e obtém uma solução incorrecta da equação. Como se pode ver na Figura 4, mais uma vez, o *feedback* fornecido está centrado na tarefa; no entanto, a utilização de um discurso avaliativo, sob a forma de uma opinião autorizada, parece não ter produzido o efeito regulador desejado.

1.2.  $3(x-2) = 5x$

$3(x-2) \quad | \quad 5x$

$3(x-2) \quad | \quad 5x$

$1(x-2) \quad | \quad 2$

Tem de usar a propriedade de distributiva

Não podes operar termos  $x=2$  com incógnita e termos sem incógnita

Figura 4: Primeira fase da resolução da questão 1.2. da tarefa sobre equações

Na segunda fase (Figura 5), Maria tenta aplicar a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, mas de forma errada. A aluna continua a evidenciar erros de *eliminação* ao, aparentemente, simplificar  $6 - 3x$  como sendo 3, demonstrando simultaneamente dificuldades em isolar a incógnita, cometendo um de *divisão* (Hall, 2002 a). Durante a resolução da equação  $4 + 3(x+5) = 5x$  (Figura 6), Maria comete os mesmos erros – erros de *eliminação* (código A) e erros de *divisão* (código B1), evidenciando também dificuldades no uso da propriedade distributiva (código B2) e manifestando ainda erros de concentração (código C).

1.2

$$3(x-2) = 5x$$

$$6 - 3x = 5x$$

$$\frac{5}{3} = 1,666\dots$$

Figura 5: Segunda fase da resolução da questão 1.2. da tarefa sobre equações

1.3.

$$4 + 3(x+5) = 5x$$

$$3(x+5) = 5x - 4$$

$$(x+5) - 2 = \dots$$

$$5 - 2 = 3 \quad x = 3$$

Figura 6: Primeira fase da resolução da questão 1.3. da tarefa sobre equações

O *feedback* que foi fornecido à aluna, na primeira fase da resolução da equação  $4 + 3(x+5) = 5x$ , foi o mesmo que foi dado à sua primeira resolução da equação  $3(x-2) = 5x$  (Figura 4). Surpreendentemente, na segunda fase, Maria resolve correctamente a questão, identificando e ultrapassando os erros cometidos (Figura 7).

1.3

$$4 + 3(x+5) = 5x$$

$$4 + 3x + 15 = 5x$$

$$4 + 15 = 5x - 3x$$

$$19 = 2x$$

$$\frac{19}{2} = 9,5$$

Figura 7: Segunda fase da resolução da questão 1.3 da tarefa sobre equações

O que motivou esta reacção diferente perante o mesmo *feedback* constituiu objecto de reflexão. Poderemos colocar as seguintes questões: (1) por que razão o *feedback* fornecido não produziu efeito na resolução da segunda questão e parece existir evidência de que foi eficaz na terceira questão? (2) que outros factores poderão estar

associados a esta reacção? e (3) que mecanismos usou Maria para ultrapassar as suas dificuldades? Para tentar encontrar respostas plausíveis a estas três perguntas, questionámos a aluna.

*Professora:* Entendeste o feedback dado na questão 1.2?

*Maria:* Entendi, mas tentei fazer de outra maneira e não correu bem...

*Professora:* Mas resolveste bem na segunda fase a questão 1.3 e os erros que deste na primeira fase eram os mesmos da questão 1.2. Como explicas isso?

*Maria:* Às vezes dá-me, umas vezes faço bem e outras vezes faço mal.

*Professora:* Explica melhor.

*Maria:* Nem sempre estou concentrada, aqui apliquei bem a propriedade distributiva, sabia como tinha de fazer.

*Professora:* Mas na 1.2 não fizeste isso. Porquê?

*Maria:* Eu na questão 1.3 lembrei-me da tarefa que tínhamos feito na aula entre as duas fases e tinha lá uma questão igual e assim foi fácil.

*Professora:* Não reparaste que a 1.2 era semelhante?

*Maria:* Só vi que tinha que multiplicar, mas não me lembrava como fazer, não reparei que era parecida com a que fizemos...

(Entrevista, 6 de Maio, 2010)

Maria não consegue explicar que processos usou para superar as suas dificuldades. Resolve a questão 1.3. por comparação com outra experiência de aprendizagem equivalente, mas aparenta não ter interiorizado o procedimento.

Como a entrevista relativa à resolução destas tarefas não foi suficientemente conclusiva, optámos por uma outra entrevista posterior já sem recorrer a uma tarefa em particular. Para nos certificarmos de como a aluna se foi apercebendo dos erros que cometeu na resolução das tarefas, questionámo-la e Maria afirma que “O que a professora escreve ao lado, às vezes ajuda-me a melhorar, mas, outras vezes, não percebo e então mudo de forma. Quando não consigo, apago tudo e tento de outra maneira e, se ainda não der, volto ao início” (Entrevista, 12 de Maio, 2010).

Podemos depreender que a informação dada pelo *feedback* nem sempre foi suficiente e não promoveu o êxito na resolução das questões. No entanto, Maria vê no *feedback* um contributo positivo para a resolução das tarefas e compara a sua eficácia com o que acontece quando o professor se limita a colocar um *risco* numa resolução errada.

(...) Sem os comentários se calhar não conseguia mudar o que fiz, se a professora riscar, passar um traço por cima, ficamos na mesma... Se não tivesse que resolver outra vez, como por exemplo num teste, acabou e passou à frente... Um risco só não ajuda a saber porque é que está mal. (Entrevista, 12 de Maio, 2010)

No Quadro 3, sintetizamos as principais dificuldades/erros manifestados pela Maria na resolução das três equações analisadas neste trabalho.

Quadro 3: Principais dificuldades/erros manifestados por Maria na resolução de três equações

Equação	Código A	Código B1	Código B2	Código B3	Código C
$-7a + 4 + 10a = 4 - 2a.$	Erro de <i>eliminação</i> (1ª fase)	Erro por <i>transposição</i> (2ª fase) Erro de <i>divisão</i> (2ª fase)		Não foram detectados erros desta tipologia	Erro de <i>concentração</i> (1ª fase)
$3(x - 2) = 5x$	Erro de <i>eliminação</i> (1ª e 2ª fases)	Erro por <i>transposição</i> (2ª fase)	Uso incorrecto da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (1ª e 2ª fases)		Erro de <i>concentração</i> (2ª fase)
$4 + 3(x + 5) = 5x$	Erro de <i>eliminação</i> (1ª fase)		Uso incorrecto da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição (1ª fase)		Erro de <i>concentração</i> (1ª fase)

## Conclusões

Na aprendizagem do tópico *Equações*, e no que diz respeito aos processos de resolução de equações, Maria recorreu frequentemente a processos formais e informais de resolução, ressaltando, destes últimos, uma preferência pelo uso de modelos baseados em balanças. A aluna evidencia uma predominância de erros com origem num *obstáculo cognitivo* ou causados pela *ausência de significado* (categorias A e B, respectivamente, na tipologia de Socas, 1997). Maria cometeu frequentemente erros de



*eliminação*, de *divisão* e por *transposição* (Hall, 2002a). De forma recorrente, a Maria evidencia dificuldades na utilização adequada da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição e comete também alguns erros resultantes de factores afectivos (categoria C), sobretudo distração ou ansiedade. Com base nos dados recolhidos, parece surgir evidência que Maria manifesta dificuldades na interiorização do conceito de equação, bem como na compreensão do próprio processo de resolução.

As tarefas em duas fases constituíram uma estratégia de ensino com bastante enfoque no tópico *Equações* e mostraram proporcionar oportunidades para o desenvolvimento de dispositivos de regulação eficazes, em particular, o *feedback* escrito. No entanto, no caso de Maria, apesar de ela ver no *feedback* escrito um contributo positivo para a resolução das tarefas, ele nem sempre produziu o efeito desejado. Normalmente, o *feedback* escrito que foi fornecido às primeiras produções da Maria foi, nuns casos, descritivo e noutros avaliativo, mas sempre dirigido à tarefa, incluindo, em particular, o conteúdo matemático necessário à sua resolução. A Maria pareceu reconhecer os erros cometidos, identificando alguns deles como consequência de distrações, mas nem sempre mostrou compreender o que lhe era pedido ou o procedimento que tinha de adoptar para prosseguir a sua resolução ou para corrigir os erros cometidos. Assim, em algumas tarefas, a Maria conseguiu ultrapassar os seus erros da primeira para a segunda fase, noutras isso já não aconteceu. Perceber por que o mesmo *feedback* dirigido a produções idênticas, na interpretação da professora, nem sempre apresenta o mesmo grau de eficácia é uma questão que merece atenção no futuro.

## Referências

- Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles Policy and Practice*, 5(1), 7 – 73.
- Bogdan, R., & Biklen, S. (1994). *Investigação Qualitativa em Educação*. Colecção Ciências da Educação. Porto: Porto Editora.
- Borasi, R. (1996). *Reconceiving mathematics instruction: A focus on errors*. Norwood, NJ: Ablex Publishing Corporation.
- Bruno, I. (2006). *Avaliação das aprendizagens: O processo de regulação através do feedback – um estudo em Físico-Química no 3º ciclo do ensino básico*. Tese de mestrado, Universidade de Lisboa.
- Cury, H. N. (1995). Retrospectiva histórica e perspectivas actuais da análise de erros em educação matemática. *Zetetiké*, 3(4), 39 – 50.

- Cury, H. (2007). *Análise de erros: o que podemos aprender com as respostas dos alunos*. Belo Horizonte, Brasil: Autêntica.
- Fernandes, D. (2005). *Avaliação das aprendizagens: Desafios às teorias, práticas e políticas*. Lisboa: Texto Editores.
- Gipps, C. (1999). Socio-cultural aspects of assessment. *Review of Research in Education*, 24, 355 – 392.
- Hadji, C. (1994). *A avaliação, regras do jogo. Das intenções aos instrumentos*. Porto, Portugal: Porto Editora.
- Hall, R. (2002a). An analysis of errors made in the solution of simple linear equations. Acedido em 20 de Maio, 2009, de [http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome15/hall\\_errors.pdf](http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome15/hall_errors.pdf).
- Hall, R. (2002b). An analysis of thought processes during simplification of an algebraic expression. Acedido em 20 de Maio, 2009, de [http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome15/r\\_hall\\_expressions.pdf](http://www.people.ex.ac.uk/PErnest/pome15/r_hall_expressions.pdf).
- Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In Grows, D. A. (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 390 – 419). New York, NY: MacMillan.
- Leal, L. C. (1992). *Avaliação da aprendizagem num contexto de inovação curricular*. (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa). Lisboa: APM.
- Martins, M. P. (1996). *A avaliação das aprendizagens em Matemática: concepções dos professores* (Tese de mestrado. Universidade Católica Portuguesa). Lisboa: APM.
- Matz, M. (1981). Building Metaphoric Theory of Mathematical Thought. *Journal of Mathematical Behavior*, 3(1), 93 – 166.
- Menino, H. & Santos, L. (2004). Instrumentos de avaliação das aprendizagens em matemática. O uso do relatório escrito, do teste em duas fases e do portefólio no 2º ciclo do ensino básico. *Actas do XV SIEM (Seminário de Investigação em Educação Matemática)* (pp. 271 – 291). Lisboa: APM.
- Merriam, S. B. (1988). *Case study research in education*. S. Francisco: Jossey-Bass Publishers.
- Palarea, M. M. (1998). *La adquisición del Lenguaje Algebraico y la detección de errores comunes cometidos en Álgebra por alumnos de 12 a 14 años*. Tesis Doctoral. Universidad de La Laguna.
- Pinto, J., & Santos, L. (2006). *Modelos de avaliação das aprendizagens*. Lisboa: Universidade Aberta.
- Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no Ensino Básico*. Lisboa: ME-DGIDC.
- Ponte, J. P.; Serrazina, L.; Guimarães, H.; Breda, A.; Guimarães, F.; Sousa, H.; Menezes, L.; Martins, M. E., & Oliveira, P. (2007). Programa de Matemática do Ensino Básico. Acedido em 20 de Maio, 2009, de [http://sitio.dgicd.min\\_educ.pt/matematica/Documents/Programa\\_Matematica.pdf](http://sitio.dgicd.min_educ.pt/matematica/Documents/Programa_Matematica.pdf).
- Ruano, R., Socas, M. M., & Palarea, M. M. (2003). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. In E. Castro, P. Flores, T. Ortega, L. Rico & A. Vallecillos (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Séptimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)* (pp. 311-322). Granada, Espanha: Editorial Universidad de Granada.
- Santos, L. (2002). Auto-avaliação regulada: porquê, o quê e como? In *Avaliação das aprendizagens: Das concepções às práticas* (pp. 77 – 84). Lisboa: Ministério da Educação, Departamento de Educação Básica.

- Santos, L. (2003). A investigação em Portugal na área da avaliação pedagógica em Matemática. *Actas do XIV SIEM* (Seminário de Investigação em Educação Matemática) (pp. 9 – 27). Lisboa: APM.
- Santos, L., & Dias, S. (2006). Como entendem os alunos o que lhes dizem os professores? A complexidade do feedback. *Actas do ProfMat2006*. Lisboa: APM. (CD-ROM).
- Santos, L. (2008). Dilemas e desafios da avaliação reguladora. In L. Menezes, L. Santos, H. Gomes & C. Rodrigues (Orgs.), *Avaliação em matemática. Problemas e desafios* (pp. 11-35). Viseu: SEM/SPCE.
- Santos, L.; Pinto, J.; Rio, F.; Pinto, F.; Varandas, J.; Moreirinha, O.; Dias, P.; Dias, S., & Bondoso, T. (2010). *Avaliar para aprender. Relatos de experiências de sala de aula do pré-escolar ao ensino secundário*. Porto: Porto Editora e Instituto de Educação, Universidade de Lisboa.
- Socas, M. M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Horsori.
- Vale, L. (2010). *O erro como ponte para a aprendizagem em Matemática: um estudo com alunos do 7.º ano do ensino básico*. Dissertação de Mestrado, Universidade de Lisboa.
- William, D. (1999). Formative assessment in mathematics. *Equals: Mathematics and Special Educational Needs*, 5(3), 8-11.