SEQUÊNCIAS E REGULARIDADES NO 7.º ANO: UMA ABORDAGEM NO QUADRO DO NOVO PROGRAMA DE MATEMÁTICA

Paula Teixeira
ES com 2.º e 3.º CEB, D. João V – Damaia
pteixeira@mail.telepac.pt

Henrique Manuel Guimarães
Instituto de Educação, Universidade de Lisboa
hmguimaraes@ie.ul.pt

Resumo

Esta comunicação tem por base o trabalho no tópico *Sequências e regularidades*, correspondente aos primeiros momentos do ensino da Álgebra no 3.º ciclo de escolaridade, realizado numa das turmas piloto 7.º ano que no ano lectivo de 2008-09 iniciaram a aplicação experimental do Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico. O objectivo principal que nos propusemos é analisar o percurso dos alunos na realização das tarefas relativas ao tópico referido, procurando identificar os elementos de sucesso mais relevantes nesse percurso e compreender os principais obstáculos e dificuldades com que os alunos se depararam. Para isso foram seleccionadas as duas tarefas com que o estudo do tópico se iniciou, tendo a nossa análise incidido nos dados recolhidos na observação das aulas em que essas tarefas foram trabalhadas e nas produções escritas que os alunos realizaram. Na sua generalidade, os alunos desenvolveram a compreensão da ideia de sequência matemática e da ideia de regularidade (associada a uma sequência). A determinação de um termo, conhecida a sua ordem não levantou grandes dificuldades, o que não aconteceu com a solicitação 'recíproca', isto é, determinar a ordem de um certo termo dado. Certos aspectos do enunciado das tarefas levantaram dificuldades de compreensão do que era proposto e do que se pretendia que os alunos realizassem. Por outro lado, foram também notórias dificuldades na apropriação e uso adequado de aspectos específicos da linguagem, como 'termo', 'ordem' (do termo), 'sequência'. Todavia, da primeira para a segunda tarefa, foi patente o progresso dos alunos na compreensão das situações propostas e na resposta a essas situações, em particular no que se refere à descoberta da lei de formação da sequência e de uma expressão algébrica que a traduzisse.

Palavras-chave: Sequências e regularidades, Aprendizagem da álgebra, Novo Programa de Matemática do Ensino Básico.

Introdução

Um dos aspectos em que o Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB, Ponte et al., 2007) se distingue significativamente do anterior é no assumir o pensamento algébrico como um dos "eixos fundamentais" para o desenvolvimento do ensino-aprendizagem neste nível de escolaridade. Nos primeiros anos, o novo programa propõe um trabalho de iniciação ao pensamento algébrico através de, por exemplo, padrões geométricos, regularidades e sequências numéricas e relações entre os números, na perspectiva de um alargamento e aprofundamento deste estudo no 2.º ciclo, onde a Álgebra surge já como um dos temas matemáticos que estruturam o programa. Este "percurso prévio" no trabalho algébrico anterior ao 3.º ciclo – para onde se reserva a "institucionalização" da utilização da linguagem algébrica – é mesmo assumido, no programa, como "a alteração mais significativa em relação ao [programa] anterior" (Ponte et al., 2007, p. 7), esperando-se que esta alteração, com o encarar da Álgebra como uma forma de pensar em matemática que lhe está associado, favoreça a aprendizagem posterior dos alunos neste domínio.

Nesta comunicação iremos apresentar e analisar o trabalho realizado numa das turmas piloto do 7.º ano de escolaridade que 'experimentou' o novo programa no ano lectivo 2008-2009, logo após a sua homologação, envolvendo, justamente, os primeiros momentos da aprendizagem da Álgebra no 3.º ciclo. O objectivo principal que nos propomos, é analisar o percurso dos alunos na realização das tarefas para o estudo das *Sequências e regularidades*, analisando os incidentes críticos mais relevantes, quer para a identificação dos principais passos de sucesso nesse estudo, quer para compreensão dos obstáculos e dificuldades com que os alunos se depararam.

Contexto do trabalho e aspectos metodológicos

Em Setembro de 2008, inseridos no processo de experimentação do Novo Programa de Matemática do Ensino Básico (NPMEB) em turmas piloto escolhidas para o efeito, dez professores de Matemática de turmas do 3.º ciclo de diversas escolas distribuídas pelo continente, iniciaram a um trabalho conjunto de construção e adaptação de materiais para a sala de aula.

Esta comunicação incide justamente sobre o trabalho realizado numa das turmas piloto do 7.º ano no tópico *Sequências e regularidades*, cuja leccionação decorreu entre 23 de Outubro e 4 de Novembro de 2008. A turma em questão era também uma das turmas onde duas alunas do curso da Licenciatura em Ensino da Matemática da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa (FCUL) desenvolveram o seu trabalho de prática lectiva supervisionada no âmbito da realização do estágio pedagógico, com a orientação e acompanhamento dos autores deste trabalho, Paula Teixeira, responsável pela turma, de que também era Directora, e Henrique Manuel Guimarães[1], como orientador da Faculdade.[2]

Tratava-se de uma turma constituída por vinte e quatro alunos, dez dos quais eram repetentes, estando dois deles fora da escolaridade obrigatória. Três alunos estavam indicados para Português Língua Não Materna. Relativamente ao desempenho em Matemática no ano lectivo anterior, dois alunos apresentavam nível 4 e dezasseis alunos tinham tido nível inferior a 3, dois deles com nível 1.

Uma caracterização geral das dez turmas do processo de aplicação do novo programa no 3.º ciclo consta a seguir no Quadro 1. Estas turmas tinham uma composição muito heterogénea nomeadamente quanto ao número de alunos, quanto à amplitude das idades em cada turma e quanto ao número de repetentes. Também no final do ano foi muito diferente o número de alunos de cada turma que progrediu para o 8.º ano.

Quadro 1. Caracterização das turmas piloto (2008-2009).

Local	N.º de alunos	Idades	N.º de alunos repetentes	N.º de alunos que progrediram no final do 7.º ano
Porto T1	27	12-14	0	25
Porto T2	27	12-14	0	27
Aveiro	22	11-13	0	22
Tondela	24	11-13	1	24
Lisboa	22	11-16	4	15
Damaia	24	11-15	10	6
Reguengos	20	11-14	3	17
Montemor	20	11-13	0	18
Albufeira	22	11-12	0	21
V. Real de Sto António	23	10-16	10	13

Na turma da Damaia, onde teve lugar o trabalho que aqui apresentamos, os alunos de um modo geral tinham um ritmo de trabalho lento na sala de aula e, em muitos deles, era evidente um grande desinteresse pelos trabalhos. A participação dos alunos nas discussões colectivas na turma era desorganizada e manifestavam dificuldade em ouvir-se uns aos outros. Apenas um número muito reduzido evidenciava alguma autonomia na

[1] Também co-autor do NPMEB em aplicação na turma.
[2] Por parte do Departamento da Educação, enquanto que a professora Suzana Nápoles foi a orientadora por parte do Departamento de Matemática.

realização das tarefas em aula e muito poucos conseguiam verbalizar as ideias e argumentar matematicamente com alguma elaboração.

Para esta comunicação seleccionámos duas tarefas com que se iniciou o trabalho no tópico *Sequências e regularidades* que abriu o estudo da Álgebra – "Voo em V" e "Tarefa 2" [3] (Ponte, Matos & Branco, 2008). As aulas onde estas tarefas se trabalharam, foram leccionadas pela professora da turma e observadas pelas professoras em estágio e pelo orientador do Departamento de Educação da FCUL que, junto a um grupo de alunos, elaborou, em cada aula, notas de campo sobre o trabalho que os alunos desenvolviam (no grupo e depois na discussão geral, ou a propósito de qualquer intervenção da professora dirigida a toda a turma). A professora elaborou registos escritos pós-aula, sobre o desenvolvimentos dos trabalhos. Para além da observação com as respectivas notas de campo e registos pós-aula, foram ainda utilizadas para a nossa análise as produções dos alunos nas duas tarefas que a professora solicitava e recolhia em aula.

As foram aulas foram seguidas de uma sessão de trabalho, em geral no mesmo dia da sua realização onde se analisava e reflectia sobre o desenvolvimento de cada aula, com a participação dos professores tinha tomado parte da aula.

Pensamento algébrico e enquadramento curricular do estudo

A ideia da Álgebra apenas como o domínio dos símbolos matemáticos e o conjunto de regras e procedimentos para a sua manipulação (associada, na Matemática escolar, sobretudo ao estudo das expressões e das equações) tem vindo a ser contrariada nas orientações curriculares desde já há uns anos. A perspectiva da Álgebra como 'forma de pensar', mais do que como um conjunto de factos e técnicas, tem vindo a ser progressivamente valorizada e a assumir crescente penetração nas orientações e propostas programáticas.

Se os símbolos matemáticos, e algébricos em particular, e o modo como eles podem ser usados na actividade matemática são uma aquisição e património de grande importância, dentro e fora da Matemática, a Álgebra vai além da manipulação desses símbolos. Os alunos, como defende o National Council of Teachers of Mathematics

[3] Nestes materiais a tarefa 2 tem o título de "Azulejos" (na turma foi usada sem título), alterado para "Os desenhos da Sara" depois de reformulada (ver anexo 2).

(NCTM, 2007) “necessitam de compreender os conceitos algébricos, as estruturas e princípios que regem a manipulação simbólica e o modo como os próprios símbolos podem ser usados” (p. 39). Os *Princípios e Normas para a Matemática Escolar* (NCTM, 2007) incluem como recomendação para o ensino da Álgebra uma ênfase nas “relações entre quantidades”, nas “formas de representar” e na análise da variação, estabelecendo como expectativas para as aprendizagens dos alunos em Álgebra, o serem capazes de:

- compreender padrões, relações e funções;
- representar situações e estruturas matemáticas usando símbolos algébricos;
- utilizar modelos matemáticos para representar e compreender situações quantitativas; e
- analisar a variação em diversas situações.

Kieran (2007) refere que a Álgebra escolar pode ser caracterizada por três vertentes ou dimensões dizendo respeito a três tipos de actividades: actividades “generativas”, actividades “transformativas e “actividades globais de meta-nível”. As primeiras, “envolvem a criação das expressões e equações”, as segundas, “lidam tipicamente com procedimentos da manipulação simbólica” e, as actividades globais de meta-nível, diz-nos a autora “são algo de especial”: tratam-se de actividades em que a Álgebra é usada “como um instrumento” e que não lhe são “exclusivas”, incluindo actividades como “resolução de problemas, modelação, percepção de estruturas, estudo da variação, generalização, análise de relações, justificação, demonstração e previsão” (p.17). Estas actividades, como faz notar a autora, relacionam-se com actividades e processos matemáticos mais gerais e são actividades em que nos podemos envolver sem que, necessariamente, tenhamos que usar a simbologia algébrica.

Elaborando sobre ideia de pensamento algébrico, Kapput (1999)[4] – tendo em vista o ensino de “uma nova Álgebra com compreensão” – apresentou “cinco formas” de que este tipo de pensamento se pode revestir, ou, talvez melhor, cinco formas de encarar a Álgebra:

- como generalização e formalização de padrões e restrições;

[4] A expressão que Kapput utiliza mais frequentemente no seu texto é “algebraic reasoning”, não “algebraic thinking”, que também usa, embora apenas uma vez (p.3), aparentemente com o mesmo sentido.

- como manipulação de formalismos sintacticamente guiada;
- como o estudo de estruturas abstraídas dos cálculos e das relações;
- como o estudo de funções, relações e variação conjunta de variáveis; e
- como um conjunto de linguagens de modelação e controlo de fenómenos.

Kapput (1999) sublinha que as cinco 'faces' da Álgebra que apresenta estão fortemente "inter-relacionadas" constituindo um "todo complexo", considerando que as duas primeiras "subjazem a todas as outras", as duas seguintes são ramos temáticos da Álgebra e que a última espelha a Álgebra como uma rede de linguagens e permeia todas as outras" (p. 4). Podemos identificar nesta caracterização algumas componentes com que o pensamento algébrico é hoje mais correntemente caracterizado: generalização e formalização, simbolização e manipulação simbólica, estudo de estruturas, funções e relações, modelação e matematização em geral.

O Novo Programa de Matemática para o Ensino Básico, como referimos na introdução, assume o pensamento algébrico como um dos "quatro eixos fundamentais" que, nos níveis de escolaridade a que o programa se dirige, devem orientar o desenvolvimento do ensino e aprendizagem[5]. Nas orientações programáticas globais, prevê, no quadro das finalidades do ensino, o desenvolvimento da capacidade de compreensão de "conceitos e relações", de "abstracção e generalização", de resolução de problemas que envolvam "processos de modelação matemática", 'ingredientes', claramente relacionados com a Álgebra e o pensamento algébrico, que descrevem e especificam a primeira dessas finalidades. Ainda nas orientações mais amplas, dirigidas ao ensino básico na sua globalidade, inclui, entre os objectivos gerais de ensino, reconhecer e explorar regularidades, interpretar e utilizar representações simbólicas e a linguagem matemática, formular generalizações e conjecturas; estas são especificações também claramente relacionadas com o pensamento e trabalho em Álgebra, neste caso, a permear os objectivos gerais que o programa estabelece.

No tema da Álgebra para o 3.º ciclo, o programa considera que o professor deve orientar o seu ensino de forma a promover nos alunos o desenvolvimento da "linguagem e do pensamento algébricos, bem como a capacidade de interpretar, representar e resolver problemas usando procedimentos algébricos e de utilizar estes conhecimentos e

[5] A par do "trabalho com os números e as operações", do "pensamento geométrico" e "do trabalho com dados" (NPMEB, p.1)

capacidades na exploração e modelação de situações em contextos diversos” (Propósito principal de ensino, p. 55[6]). E, mais especificadamente, estabelece como metas gerais para a aprendizagem que, com o estudo deste tema, os alunos sejam capazes de:

- interpretar e representar situações em contextos diversos, usando linguagem e procedimentos algébricos;
- compreender o conceito de função e ser capazes de o usar em diversas situações, em particular de proporcionalidade directa e inversa;
- de interpretar fórmulas em contextos matemáticos e não matemáticos; e
- de resolver problemas, comunicar, raciocinar e modelar situações recorrendo a conceitos e procedimentos algébricos.

Com este enquadramento programático, a planificação geral para o tópico *Sequências e regularidades* que foi seguida é a que consta no Quadro 2.

Quadro 2. Planificação geral do tópico *Sequências e regularidades*.

<table>
<tr><th>Nº aulas</th><th>Tópico</th><th>Objectivos específicos</th><th>Notas</th><th>Tarefas</th><th>Obs.</th></tr>
<tr><td>1</td><td rowspan="5">• Termo geral de uma Sequência numérica

• Representação

• Expressões algébricas</td><td rowspan="5">• Compreender a noção de termo geral de uma sequência numérica e representá-lo usando símbolos matemáticos adequados.

• Determinar um termo geral de uma sequência numérica e termos de várias ordens a partir do termo geral.

• Simplificar expressões algébricas.</td><td rowspan="3"></td><td>1. Voo em “V”</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>2. Tarefa 2*</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>3. Padrão numérico</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td>• Propor a representação de sequências de fracções em que os numeradores e os denominadores tenham relações simples (por exemplo, $\frac{2n}{n+1}$ e $\frac{n+1}{n+3}$</td><td>4. Sequências numéricas**</td><td></td></tr>
<tr><td>1</td><td></td><td>5. Atravessando o rio**</td><td></td></tr>
</table>

* Esta tarefa tinha como título *Azulejos* nos materiais disponibilizados aos professores pela DGIDC[7].
** Esta tarefa foi prevista, mas não foi realizada

[6] De aqui em diante, as páginas referidas, salvo outra indicação, referem-se ao NPMEB.
[7] (Ponte, Matos & Branco, 2008)

Organização e funcionamento geral do trabalho em aula

Os alunos estavam organizados em grupos de quatro. Os grupos eram permanentes e foram formados pela professora após três semanas de aulas. As aulas tiveram sempre a mesma estrutura: um breve momento inicial no qual a professora apresentava a tarefa, um período longo, entre 45 a 60 minutos de trabalho autónomo dos alunos e um momento de discussão colectiva. Para o trabalho autónomo a professora informou os alunos que: (i) sempre que surgisse uma dúvida, esta devia ser esclarecida, primeiro, com os colegas de grupo e caso a dúvida persistisse, com uma das professoras presentes; (ii) cada grupo só teria possibilidade de colocar duas dúvidas; (iii) as resoluções do grupo deveriam ser registadas numa folha de acetato que poderia ser utilizada no período de discussão; para isso, a cada grupo foi entregue uma folha de acetato e uma caneta para que pudesse escrever as suas resoluções.

No início do trabalho, os alunos em cada grupo começavam por resolver as questões isoladamente sem interacção entre si. À medida que o tempo ia passando, os alunos começavam a interagir com os colegas, de um modo geral na base de um trabalho em pares. Só na altura de decidir o que escrever na folha de acetato é que o grupo funcionava mais em conjunto.

Foram utilizadas duas aulas de noventa minutos para a realização de cada uma das tarefas seleccionadas para esta comunicação.

Tarefa 1 – Voo em ‘V’

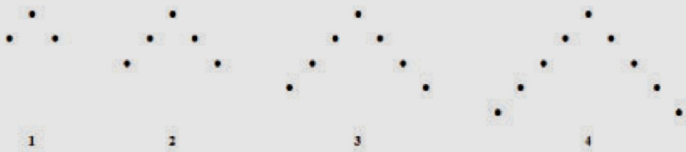
No início da aula foi distribuída, a cada um dos alunos, uma folha com a tarefa 1 – “Voo em “V”[8] (ver Figura 1). A professora informou que a tarefa era para ser realizada em 45 minutos, havendo depois um momento de discussão.

[8] (Ponte, Matos e Branco, 2008). Ver no anexo 1 a versão resultante da análise da tarefa depois da sua aplicação em aula.

Tarefa 1 – Voo em "V"

1. Algumas espécies de aves migratórias voam em bando, formando uma configuração em "V". Será que este tipo de organização lhes facilita o voo? Diversas equipas de cientistas têm investigado esta questão, procurando compreender as vantagens que podem surgir da aplicação deste conhecimento da natureza à aviação.

Na sequência que se segue, cada figura representa um bando, cada ponto simboliza uma das aves que lhe pertence e, de figura para figura, o número de aves vai sempre aumentando. Eis os primeiros quatro termos desta sequência:



Nas questões seguintes explica o teu raciocínio recorrendo a palavras, esquemas, cálculos ou simbolos.

1.1. Descreve de que modo se pode construir a figura associada ao 5.º termo? Quantos pontos terá?

1.2. Quantos pontos terá a figura associada ao 100.º termo desta sequência?

1.3. Existe alguma figura nesta sequência com 86 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.

1.4. Existe alguma figura nesta sequência com 135 pontos? Se existir, determina a ordem que lhe corresponde.

1.5. Descreve uma regra que permita determinar o número total de pontos de qualquer figura desta sequência.

1.6. Escreve uma expressão algébrica que possa traduzir a regra descrita na questão anterior.

Figura 1. Tarefa 1, enunciado distribuído em aula.

No começo dos trabalhos houve casos em que os alunos – eventualmente pela extensão do texto introdutório da tarefa e também por ele próprio conter uma pergunta – tiveram dificuldade em perceber onde começavam as perguntas a que eles tinham que responder. Num grupo, uma aluna, logo depois de ter ligo o texto inicial, a primeira coisa que fez foi unir os pontos das várias figuras que antecedem as perguntas:

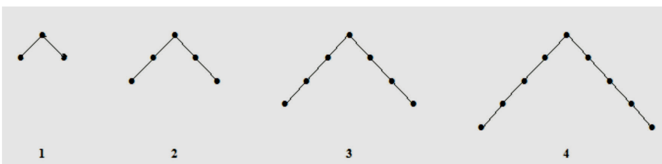


Figura 2. Como a aluna uniu os pontos.

Um colega do grupo, ao reparar no que esta aluna fez, chama-a a atenção – “Aqui não diz para ligar [os pontos]”. A aluna ainda replica – “mas aqui diz ‘Eis os primeiros quatro termos (...)’” – mas acaba por apagar os traços que desenhara quando outra colega insiste fazendo notar que no texto não se dizia para “ligar” os pontos. Houve também casos em que os alunos não entenderam o que se pretendia na questão 1.1, com a primeira parte – “Descreve de que modo se pode construir (...)” – por não entenderem a expressão “de que modo”.

Depois de alguma demora na concentração geral dos alunos, com algumas conversas ‘laterais’, pouco a pouco os alunos entraram nos trabalhos. Ao fim de 55 minutos, quando se ia iniciar a discussão com toda a turma, diversos alunos pediram mais de tempo, ao que a professora acedeu. Na verdade os alunos mantinham-se empenhados na realização da tarefa – e, como, a professora reconheceu na discussão da aula, era a primeira vez que os sentia tão envolvidos.

A sequência, os termos, a ordem dos termos. Na resolução da tarefa, praticamente todos os grupos responderam correctamente à primeira questão tendo indicado os 11 pontos da figura associada ao 5.º termo da sequência dada (um grupo não o fez explicitamente), tendo dado explicações de como construir a figura em causa, genericamente bem conseguidas (apenas dois grupos se limitaram a apresentar o desenho).

Num grupo (Ricardo, Maria, Lezita e Tiago), uma aluna por si só, apontando com um lápis, conta os pontos de figura para figura e escreve na sua folha “1.1 Acrescentamos um ponto a cada fila. Terá 11 pontos”. Um dos colegas do grupo, trabalhando também separadamente, diz que “é fácil”, procede da igual modo, contando os pontos com um dedo e escrevendo uma frase semelhante. Em outros grupos, as explicações dadas sobre esta questão foram as seguintes:

> “Para construir o quinto termo é necessário acrescentar 2 pontos à quarta figura” (Marcos, Lamiro, Carina e Cláudia)
>
> “O 5.º termo foi [construído] associa[n]do 2 pontos em relação a figura anterior” (grupo sem identificação)
>
> “A figura do 5.º termo pode ser construíd[a] acrescentando 2 pontos” (grupo sem identificação)

Estas respostas, como todas as outras para as várias questões da tarefa, foram escritas na folha de acetato que a professora distribuíra no início dos trabalhos.

A questão 1.2 foi também bem resolvida nos grupos: todos encontraram o número pretendido, e, embora o enunciado não o pedisse, também registaram indicações sobre como obtiveram a resposta dada (apenas um grupo não o fez). O episódio seguinte dá conta de como os alunos de um grupo (Ricardo, Maria, Lezita e Tiago) trabalharam esta questão.

Ao abordar a questão, um dos alunos, Maria, diz que se tem que "andar de dois em dois" e vai escrevendo a sequência 11, 13, 15... ultrapassando as sete dezenas. Ouve-se entretanto o Tiago a dizer "isto é bué fácil" acrescentando algo como "se é 100, é 50 de cada lado". Maria dirige-se ao Ricardo e pede-lhe que explique ele. O Ricardo segue o que o Tiago tinha dito – "vai ser 50 de cada lado" – mas acrescenta: "mais o ponto de cima" (dá no entanto a ideia que não está seguro). A Maria prossegue, constrói uma tabela até ao termo de ordem 30 mas hesita:

> *Maria*: Isto não deve ser assim, tem que haver outro processo.
>
> *Ricardo:* Isso não interessa, estás quase lá.
>
> *Maria:* Não estou nada quase lá. A figura não tem que ter 100 pontos, tem é que ser a figura 100 e eu ainda só vou na 30ª figura.

A Maria não está convencida do que está a fazer, apaga a sequência de números que tinha na folha e escreve:

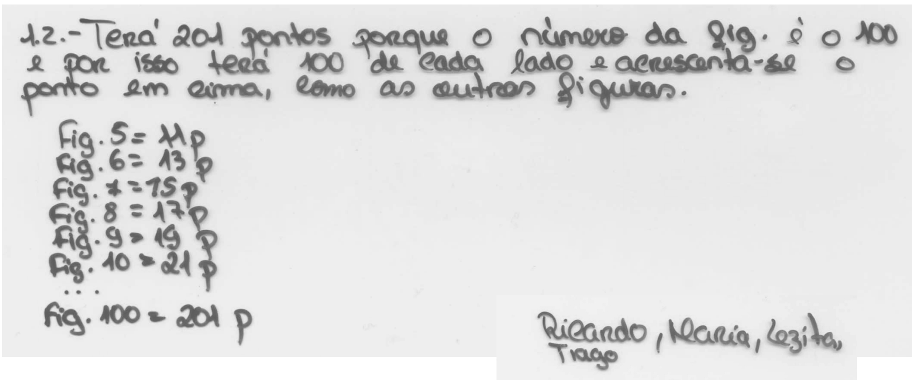
Fig. 5 — 11p
Fig. 6 — 13p
Fig. 7 — 15p
...

Quando chega a Fig. 10 — 10p conclui: "Agora temos que multiplicar por 10" (estaria a pensar no número de ordem da figura). O Ricardo replica dizendo que é por 5 que se tem que multiplicar (estaria a pensar no número de pontos 'de cada lado' da figura, excluindo o vértice do 'V'). Nesta altura, o professor que acompanha o grupo faz uma sugestão:

> *Professor:* Comparem o número de pontos de cada figura com o número que está 'por baixo' da figura.

Esta sugestão leva os alunos a perceber o que se passa de figura para figura, verbalizando algo como: “na primeira figura ao número um acrescentamos 2, na segunda acrescentamos 3, na terceira 4...”. Neste ponto é a Maria quem diz: “E na figura 100, acrescentamos 101. Dá 201”. Esta aluna ainda acrescenta: “Ah, na primeira há um de cada lado e um em cima, na segunda dois de cada lado e um em cima”, prosseguindo com mais alguns casos até dizer, “na centésima há 100 de cada lado e um em cima”. Neste momento o professor no grupo pergunta “e se fosse a figura 1000?” e o Tiago, ao ouvir, propõe “e um milhão”. Ambas as perguntas foram respondidas com rapidez e acertadamente.

Percebe-se assim que estes alunos identificaram os invariantes de figura para figura na sequência dada e, portanto, de algum modo, a ‘regularidade’ em causa. Veja-se na Figura 3 o que decidiram escrever na folha do acetato do grupo.



1.2.- Terá 201 pontos porque o número da fig. é o 100 e por isso terá 100 de cada lado e acrescenta-se o ponto em cima, como as outras figuras.

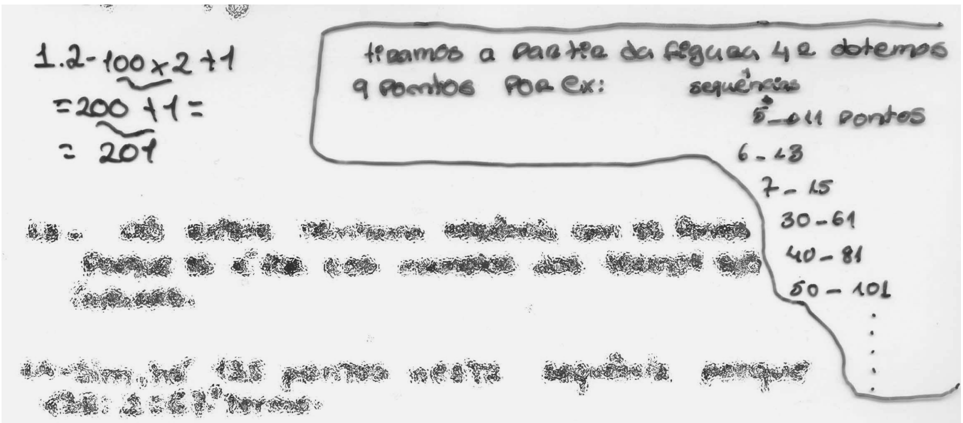
Fig. 5 = 11 p
Fig. 6 = 13 p
Fig. 7 = 15 p
Fig. 8 = 17 p
Fig. 9 = 19 p
Fig. 10 = 21 p
...
Fig. 100 = 201 p

Ricardo, Maria, Lezita, Tiago

Figura 3. Questão 1.2, registo do grupo do Ricardo, Maria, Lezita e Tiago.

Em outros grupos não existiram explicações tão elaboradas como esta mas, de um modo geral, o que apresentaram evidencia a compreensão da regularidade em causa.

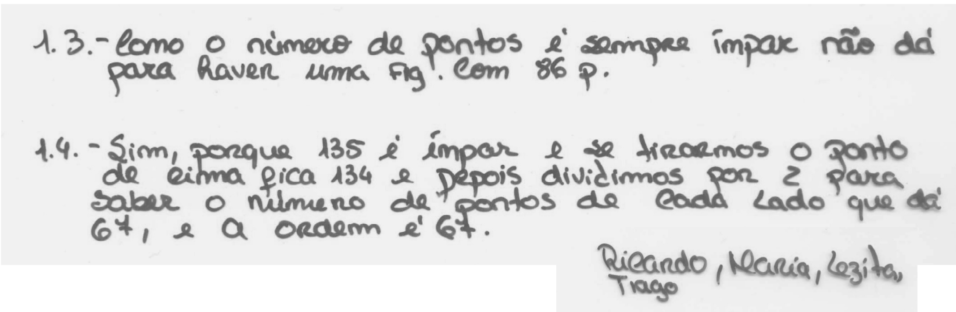
Nesta questão, para encontrarem a resposta pedida, os alunos ‘prolongavam’ a sequência usando apenas números, organizando-os, em geral, em forma de tabela que apresentavam como explicação ou complemento da explicação da resposta que davam à questão, como foi o caso do grupo cujo registo se apresenta na Figura 4.


1.2- 100×2+1
=200+1=
= 201

tiramos a parte da figura 4 e obtemos
9 pontos por ex: sequências
5 - 11 pontos
6 - 13
7 - 15
30 - 61
40 - 81
50 - 101

Figura 4. Questão 1.2, registo de um outro grupo (sem identificação na folha de acetato).

As questões 1.3 e 1.4 não levantaram problemas aos alunos que apresentaram respostas correctas em todos os grupos, em alguns casos (ver um exemplo na Figura 5) com justificações que evidenciam a compreensão do que caracterizava a sequência numérica em estudo.


1.3.- Como o número de pontos é sempre ímpar não dá para haver uma Fig. com 86 p.

1.4.- Sim, porque 135 é ímpar e se tirarmos o ponto de cima fica 134 e depois dividimos por 2 para saber o número de pontos de cada lado que dá 67, e a ordem é 67.

Ricardo, Maria, Lezita, Tiago

Figura 5. Questões 1.3 e 1.4, registo do grupo do Ricardo, Maria, Lezita e Tiago

Na verdade, a característica de 'imparidade' dos números da sequência foi reconhecida com facilidade pela generalidade dos alunos que a exprimiram bastante correctamente, nas justificações que davam e que escreveram nos registos dos grupos (apenas três respostas, embora correctas, não foram justificadas).

> (1.3)
>
> "Não. Porque cada figura é constituída por números ímpares e 86 é um número par." (Cíntia, Solange, Márcia e Marlion)
>
> "Não, porque 86 é um número par e nesta sequência só existe[m] nºs ímpares." (Marcos, Lamiro, Carina e Cláudia)

> “Não existe porque o resultado dos pontos é sempre números ímpares” (Bruno, Rúben, Cátia e Leo)
>
> (1.4)
>
> “Existe na figura 67, vai dar 135 pontos porque é sempre o dobro do número mais um” (Bruno, Rúben, Cátia e Leo)

É de notar, no entanto, que nestas e em outras questões se evidenciou que não é logo claro para os alunos o significado de ‘termo’, ‘ordem’ (do termo) e ‘sequência’, e que com recorrência os confundem ou usam inadequadamente. Por exemplo na questão 1.4., houve alunos que não perceberam de imediato o significado de “determina a ordem da figura [com determinado número de pontos]”. “O que é determina a ordem? É o que determina a figura?”, perguntou a Maria, aluna do grupo de que se transcreveu o registo anterior. Esclarecida pela professora vem a dizer: “Então se tirarmos o ponto de cima fica 134 e depois dividimos por 2 para saber o número de pontos de cada lado que dá 67 e a ordem é 67” que foi justamente o que veio a ser escrito no acetato do grupo.

Da confusão referida e do uso desajustado de ‘termo’, ‘ordem’ (do termo) e ‘sequência’, são ainda exemplos, na questão 1.4, a resposta “Sim, há 135 pontos nesta <u>sequência</u> porque 135:2 = 67º termo” ou, na questão 1.5, “Tiramos o <u>número da sequência</u> multiplicamos por 2 e somamos 1” ou ainda (questão 1.6) “para encontrarmos <u>as sequências</u> temos de pegar o <u>número da sequência</u> e multiplicamos por 2 e somamos pelo número 1” (sublinhados nossos).

A expressão algébrica. O objectivo principal da realização desta tarefa era que os alunos chegassem à generalização – termo geral da sequência – que as questões 1.5 e 1.6 solicitavam, a 1.6 numa versão formal – uma “expressão algébrica”.

Todos os grupos escreveram uma regra que permitia calcular o número de pontos de qualquer figura da sequência (questão 1.5), mas nem todos conseguiram escrever uma expressão algébrica correspondente (questão 1.6). Eis alguns exemplos das regras que os alunos escreveram, respondendo à questão 1.5:

> “Para sabermos sempre, temos que ver o número da fig. que é a ordem e depois multiplicamos por 2 e s[o]mamos o ponto que está por cima ficando o número de pontos ímpar” (Ricardo, Maria, Lezita e Tiago).

“A regra que nos permite determinar o número de pontos é fazer o número da Figura x 2 + 1” (o sublinhado é do grupo, Cíntia, Solange, Márcia e Marlion).

“A regra é fazer o dobro da ordem e a soma de mais um” (Marcos, Lamiro, Carina e Cláudia).

“Multiplica-se o número da figura por 2 e soma-se mais um” (grupo sem identificação).

No ano em curso ainda não se tinha usado na turma a terminologia “expressão algébrica” o que naturalmente levantou dificuldades na interpretação do enunciado e terá levado a que poucos alunos tenham respondido à questão. Um grupo que não conseguia perceber o que era pedido no enunciado com “escreve uma expressão algébrica”, tomou a iniciativa de ir ver ao dicionário o que significava a palavra *algébrica* e concluiu que o que se pretendia era “traduzir a regra através de uma expressão com símbolos e letras”. Este grupo (Ricardo Maria Lezita e Tiago), que respondeu com correcção e clareza a todas as questões da tarefa, apesar da consulta ao dicionário, não escreveu a expressão algébrica pedida.

Mesmo assim, eventualmente por existirem alunos repetentes, dois dos grupos responderam à questão 1.6, num caso escrevendo (N+N+1) – que oralmente foi explicitada como “duas vezes o N mais 1” – e, no outro caso, escrevendo Nx2+1 (apresentada no âmbito da questão 1.5). Dois grupos não chegaram a escrever a expressão algébrica, mas um deles, na discussão, explicou qual era a expressão utilizando a linguagem natural. Uma aluna que descobriu uma expressão algébrica para responder ao que era pedido, para explicar o modo como procedeu fez no quadro o desenho que a seguir se apresenta na Figura 6.

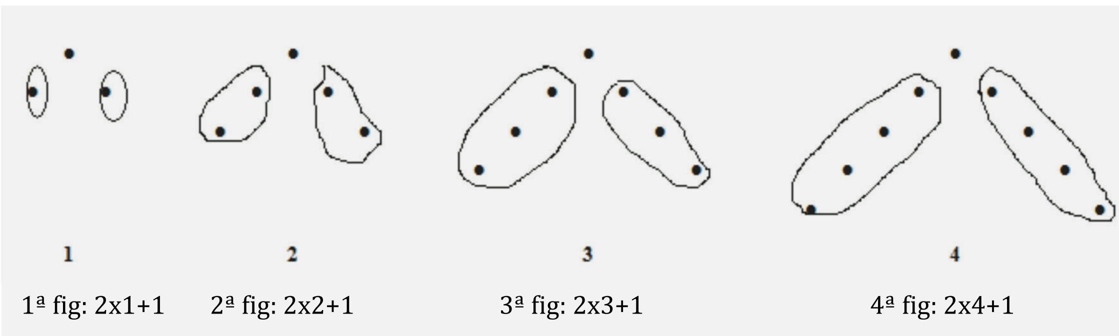


Figura 6. Questão 1.6, à procura da expressão algébrica.

Sobressai aqui o papel das figuras na descoberta da 'lei'. Aparentemente, a aluna terá reparado na simetria de cada figura e no que permanecia e mudava de figura para figura, aspectos que os 'círculos' que desenhou e as legendas que escreveu evidenciam. Repare-se todavia que, embora as sucessivas 'legendas' de cada uma das figuras sugiram que a aluna irá escrever a expressão geral 2N + 1, o que escreveu foi N+N+1, porventura respondendo ao 'apelo' visual das figuras.

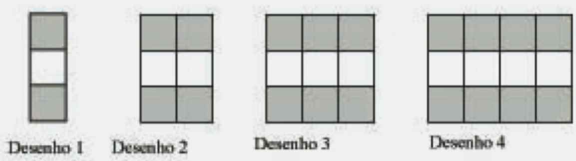
Tarefa 2

Tal como se passou com a tarefa anterior, os alunos receberam da professora a folha com a Tarefa 2, que os informou que a questão 1 (ver Figura 7) deveria ser realizada em 20 minutos, havendo depois um momento de discussão colectivo[9]. Muitos alunos chegaram atrasados e só passados 15 minutos do início da aula os grupos estavam a trabalhar. A discussão da primeira questão só se iniciou passados 35 minutos depois do início da aula.

Tarefa 2

Responde às questões seguintes e explica o teu raciocínio recorrendo a palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

1. A Sara fez uma sequência de desenhos utilizando pequenos quadrados brancos e cinzentos, dispostos como se observa na figura seguinte:



1.1. Quantos quadrados brancos tem a figura número 5? E quadrados cinzentos?

1.2. Quantos quadrados tem a figura número 10?

1.3. Escreve uma expressão algébrica que permita determinar o número de quadrados cinzentos de qualquer uma das figuras desta sequência.

1.4. Escreve uma expressão algébrica que permita determinar o número total de quadrados de qualquer uma das figuras desta sequência.

Figura 7. Tarefa 2, Questão 1.

---

[9] Assistiu também à aula a professora Sílvia Machado, da DGIDC, que também acompanhou os professores do 2.º e 3.º ciclos das turmas piloto.

Logo que iniciaram a leitura da questão 1, vários alunos fizeram a analogia entre esta tarefa e a tarefa anterior “Voo em V”, dizendo que se tratava da mesma coisa, “É como a dos pontinhos”, disse uma aluna, “Esta é do tipo do voo”, disse o Ricardo, lembrando-se inclusivamente do título da tarefa que já tinham realizado. Na verdade, aparentemente pelo simples facto de terem já passado por uma experiência com o mesmo tipo de solicitação, esta questão não apenas foi sentida pelos alunos como mais ‘fácil’ em relação à anterior, como entenderam mais depressa o que era pedido e souberam como proceder para responder, tendo-o feito com maior rapidez. Num grupo que resolveu a questão em cerca de 15 minutos, tendo sido por ele confrontado pelo professor que o acompanhava com a pergunta “Qual é que acham mais fácil, esta ou a do voo”, todos os alunos responderam imediatamente, “Esta”. Por iniciativa própria, a Maria, ainda acrescentou: “Mas também é porque já tínhamos feito a outra”.

Para determinarem a quantidade de quadrados da 5ª figura da sequência (questão 1.1), os alunos tendencialmente recorreram ao desenho, esboçando a figura para efectuarem as contagens, como aconteceu no grupo de que se apresenta o registo na Figura 8.

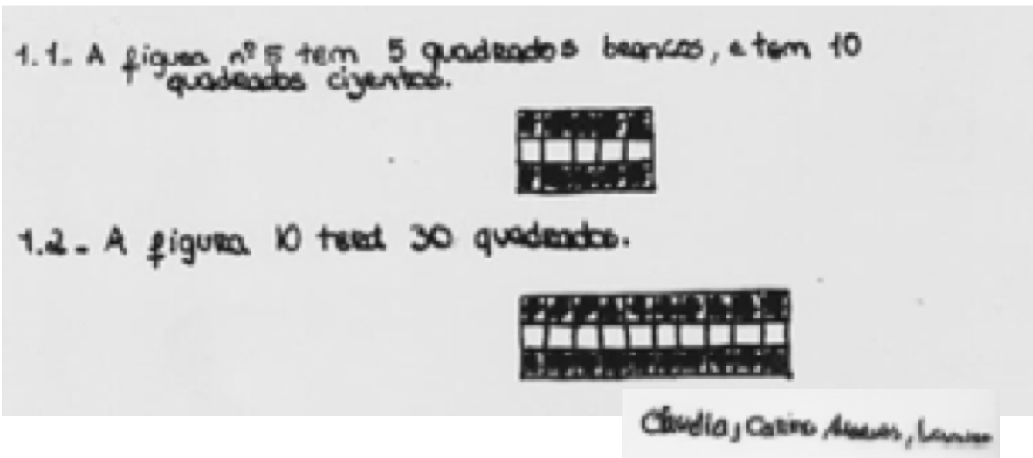
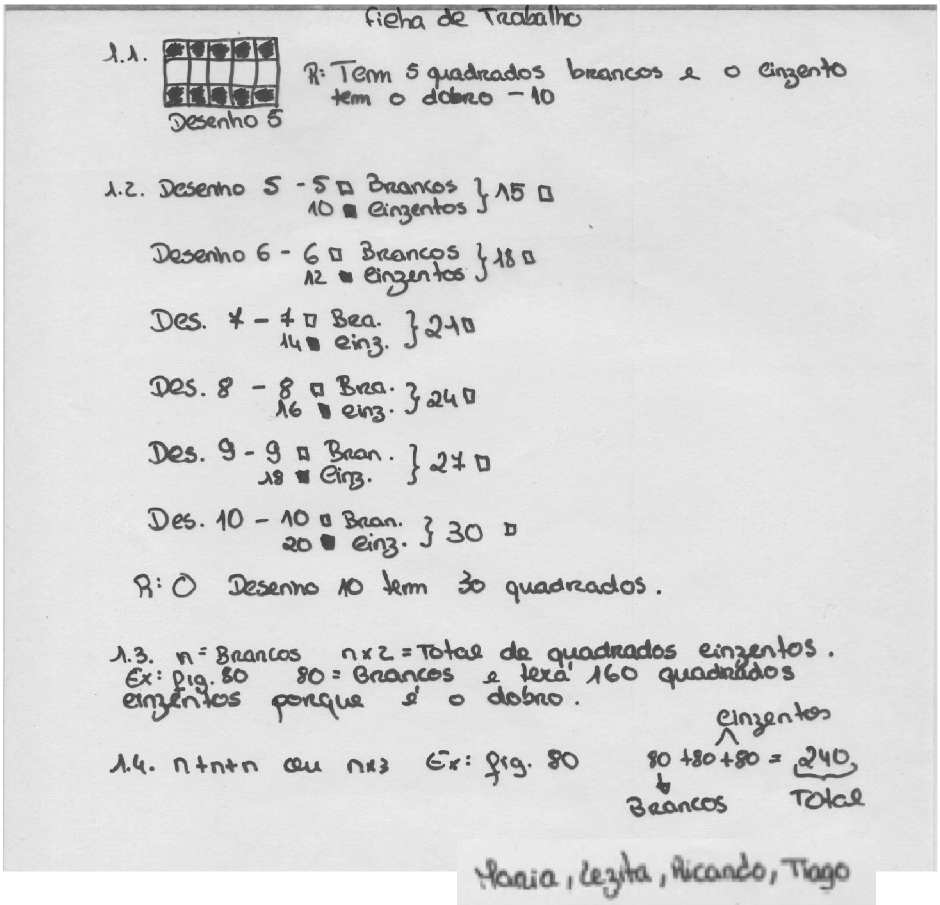


Figura 8. Questões 1.1 e 1.2, registo do grupo da Cláudia, Carina, Marcos e Lamiro).

Este grupo recorreu de novo ao desenho da figura para responder à questão 1.2 – relativa à 10ª figura da sequência – o que aconteceu em vários outros grupos, embora, nesta questão, já tenha havido alunos que usaram uma organização em ‘tabela’. Veja-se o exemplo que se apresenta a seguir na Figura 9, onde consta o registo completo de um outro grupo para a questão 1.

Repare-se que este grupo recorreu apenas ao desenho na primeira questão (1.1) e na resposta que dá refere que a figura tem 5 quadrados brancos e que “o cinzento tem o dobro – 10” (sublinhado nosso). “O cinzento”, aparentemente, refere-se ao conjunto dos quadrados ‘pintados’ e o recurso à expressão “dobro”, exprimindo a relação entre número de quadrados cinzentos e o número de quadrados brancos, sugere também aqui a influência da figura (embora se trate de números pequenos). Para além disso, fornece já elementos para a identificação de aspectos da regularidade em jogo (eventualmente, neste momento ainda implícitos nos alunos). Na questão 1.2, este grupo já não recorreu ao desenho, embora tenha percorrido todos os passos intermédios para responder à pergunta, organizando os resultados obtidos em jeito de tabela, fornecendo toda a informação parcelar.


Ficha de Trabalho

1.1. R: Tem 5 quadrados brancos e o cinzento tem o dobro – 10

Desenho 5

1.2. Desenho 5 – 5 □ Brancos, 10 ■ cinzentos } 15 □

Desenho 6 – 6 □ Brancos, 12 ■ cinzentos } 18 □

Des. 7 – 7 □ Bra., 14 ■ cinz. } 21 □

Des. 8 – 8 □ Bra., 16 ■ cinz. } 24 □

Des. 9 – 9 □ Bran., 18 ■ cinz. } 27 □

Des. 10 – 10 □ Bran., 20 ■ cinz. } 30 □

R: O Desenho 10 tem 30 quadrados.

1.3. n = Brancos n×2 = Total de quadrados cinzentos. Ex: fig. 80 80 = Brancos e terá 160 quadrados cinzentos porque é o dobro.

1.4. n+n+n ou n×3 Ex: fig. 80 80+80+80 = 240

cinzentos

Brancos Total

Maria, Lezita, Ricardo, Tiago

Figura 9. Questão 1, registo completo do grupo da Maria, Ricardo, Lezita e Tiago.

No registo da Figura 9 vêem-se as respostas às questões 1.3 e 1.4, com justificação cuidada e detalhada e com exemplos – embora não seja pedida no enunciado – que os outros grupos não fizeram (este grupo apresenta também alguma ‘manipulação’ algébrica quando na questão 1.4 escreve “n+n+n ou n×3”). Em todos os casos, no entanto, os grupos escreveram expressões algébricas adequadas ao que era solicitado, tendencialmente do tipo:

N x 1 — quadrados brancos

N x 2 — quadrados cinzentos

N x 3 — total de quadrados

Como referimos a propósito da Figura 5, realizada por uma aluna para explicar o seu procedimento para encontrar a expressão algébrica solicitada na questão 1.6 da tarefa 1, as expressões algébricas escritas pelos alunos estão associadas à forma como percepcionam o desenho dos termos da sequência. Também nas respostas às questões 1.3 e 1.4 da tarefa 2, com a mesma solicitação, as expressões escolhidas traduzem essa percepção: com “n+n+n” ou “nx3” os alunos mostram que ‘vêem’, em cada figura, as três linhas que a constituem, todas com o mesmo número de quadrados.

Em síntese e a concluir

O trabalho que os alunos desenvolveram com as tarefas propostas e o que, nesse trabalho, manifestaram oralmente e por escrito, indica que estes, na sua generalidade, desenvolveram a compreensão da ideia de sequência matemática que era pretendida bem como da ideia de regularidade (associada a uma sequência).

Dado um termo de uma sequência (pressuposta a regularidade que a define), os alunos compreenderam com facilidade que o termo que se lhe segue pode ser determinado à custa do termo dado, recorrendo a um procedimento que inferem analisando os termos sucessivos da sequência que são dados no enunciado. Também perceberam que este procedimento serve para calcular qualquer termo a partir do anterior (não foram abordadas, nesta fase inicial do trabalho, situações recíprocas, ou seja, que implicassem raciocinar em ‘sentido inverso’ – conhecido um termo de uma sequência, determinar o que o antecede – que, porventura, levantariam dificuldades maiores).

Nos momentos iniciais do trabalho com as sequências propostas (cada termo era dado por uma figura), os alunos começaram por recorrer a desenhos onde efectuam contagens, mas em alguns casos deixam de o fazer relativamente cedo e usam apenas números e os cálculos necessários, mantendo no entanto a necessidade de ‘prolongar’ a sequência até ao termo desejado. Num caso e noutro há aqui já, ainda que implicitamente, o reconhecimento da 'lei de formação' – ou da regularidade – que define sequência.

Se a determinação de um termo, conhecida a sua ordem – ainda numa fase em que a 'lei de formação' não está explicitada – não levantou dificuldades de maior, o mesmo não aconteceu com a solicitação 'recíproca': determinar a ordem de um certo termo dado. A isto não será alheio o raciocínio 'inverso' que a solicitação exigia – da ordem para o termo – nas as dificuldades com a terminologia utilizada e conceitos associados – termo e ordem (do termo). Acresce ainda a natureza (mais) abstracta de 'ordem de um termo', e o facto de se tratar da fase inicial da aprendizagem das *Sequências e regularidades*, eventualmente com pouco ou nenhum trabalho desta natureza em anos anteriores.

As figuras que nas tarefas 'concretizavam' os termos das sequências constituíram um apoio intuitivo importante, antes de mais para a determinação de termos desconhecidos, mas também como 'inspiração' para a descoberta e explicitação da lei de formação subjacente à sequência, quer na sua formulação na linguagem natural, quer na sua formulação algébrica.

Certos aspectos do enunciado das tarefas constituíram, para alguns alunos, um constrangimento à compreensão do que era proposto e do que se pretendia que realizassem. Referimo-nos, por exemplo, a aspectos de redacção e à extensão do texto introdutório, particularmente na primeira tarefa, ao uso de expressões pouco familiares aos alunos, à formulação nem sempre directa das questões para responder, a algumas inconsistências nas designações usadas (por exemplo, na segunda tarefa, "desenho" e "figura" para designar os termos da sequência). Nos anexos 1 e 2 estão reformulações das tarefas utilizadas, elaboradas com base na análise das reacções dos alunos e do trabalho que fizeram com elas.

De um modo geral os alunos manifestaram dificuldades de expressão e comunicação oral e escrita e incapacidade de manter a concentração no trabalho de forma continuada. Apesar disso, da primeira para a segunda tarefa, foi muito visível o progresso dos alunos, quer na apropriação das situações propostas, compreendendo mais facilmente o que era pedido e como proceder para responder, quer ainda na maior rapidez com que deram e registaram as respostas, muito especialmente na descoberta da lei de formação da sequência e de uma expressão algébrica que a traduzisse. Foi também notório que os alunos se foram progressivamente libertando da necessidade de desenhar, recorrendo preferencialmente a números e à sua organização em forma de tabela.

O acompanhamento dos grupos de alunos, pela professora, durante a realização do trabalho autónomo, e a discussão colectiva na turma das suas produções, foram momentos importantes, não apenas para o esclarecimento de dúvidas dos alunos, mas também para recolha de informação sobre as suas dificuldades e as estratégias que usaram tendo em vista o desenvolvimento do estudo do tópico.

Os alunos desta turma que progrediram estão agora no 9.º ano, sempre acompanhados pela mesma professora em Matemática, que se manteve no processo de experimentação do programa. Os alunos tiveram uma evolução positiva significativa na sua forma de estar em aula, quer nos momentos de trabalho em grupo, quer nos momentos de discussão colectiva, em aspectos de organização, na forma como interagem e intervêm, na sua autonomia e capacidade de iniciativa. As sequências e regularidades voltaram a ser trabalhadas no 8.º e no 9.º anos e, num e noutro ano, em todas as tarefas de avaliação realizadas, este é o tópico onde continuam a ter mais sucesso.

Referências

Kapput, J. J. (1999). Teaching and learning a new algebra with understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Orgs.), *Mathematics classrooms that promote understanding* (pp. 133 – 155). Mahwah, NJ: Erlbaum. Acedido em 24 de Março, 2011, de www.educ.fc.ul.pt/docentes/jponte/DA/DA.../Kaput_99AlgUnd.

Kieran, C. (2007). Developing algebraic reasoning: The role of sequenced tasks and teacher questions from the primary to the early secondary school levels. *Quadrante 16*(1), 5 – 26.

NCTM (2007). *Princípios e normas para a matemática escolar*. Lisboa: APM.

Ponte, J., Matos, A., & Branco, N. (2008). *Sequências e funções: materiais de apoio ao professor. Tarefas para o 3.º ciclo – 7.º ano*. Lisboa: DGIDC-ME.

Ponte, J., Serrazina, L., Guimarães, H., Breda, A., Simões, E. Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., & Oliveira, P. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: DGIDC-ME.

Anexo 1 – Tarefa 1

(Reformulada após a análise do trabalho realizado em aula)

Tarefa 1 – Voo em "V"

1. Algumas espécies de aves migratórias voam em bando numa organização em forma de "V", tal como mostram as fotografias da figura 1. Este facto tem interessado diversas equipas de cientistas que têm investigado se esta organização é usada para facilitar o voo, procurando compreender as vantagens que podem surgir da aplicação deste conhecimento da natureza à aviação.

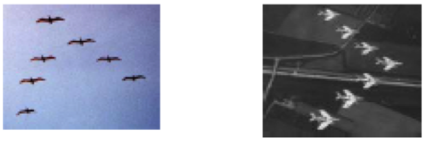


Figura 1

Na sequência da figura 2, cada esquema numerado representa um bando de aves a voar em "V", e cada ponto representa uma das aves do bando. De esquema para esquema, o número de aves vai aumentando sempre no mesmo valor, e os primeiros quatro termos da sequência são:

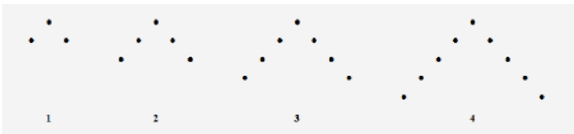


Figura 2

Responde agora às questões seguintes e explica o teu raciocínio recorrendo a palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

1.1. Quantos pontos tem o esquema associado ao 5.º termo da sequência? Descreve de que modo esse esquema se pode construir.

Ou apenas: Quantos pontos tem o esquema associado ao 5.º termo da sequência?

1.2. Quantos pontos tem o esquema associado ao 100.º termo?

1.3. Existe na sequência algum esquema com 86 pontos? Se existir, qual é a ordem do termo que lhe corresponde?

1.4. Existe na sequência algum esquema com 135 pontos? Se existir, qual é a ordem do termo que lhe corresponde?

Ou, agrupando os dois pontos anteriores: Existe na sequência algum esquema com 86 pontos? E com 135? Se existirem, qual é a ordem dos termos que lhes correspondem?

1.5. Descreve uma regra que permita determinar número de pontos de qualquer esquema desta sequência.

1.6. Escreve uma expressão algébrica que traduza a regra que descreveste na questão anterior.

(29.10.2008)

Anexo 2 – Tarefa 2

(Reformulada após a análise do trabalho realizado em aula)

Tarefa 2 – Os desenhos da Sara

A Sara fez no seu caderno uma sequência de desenhos utilizando pequenos quadrados brancos e cinzentos dispostos como podes ver na figura 1, onde estão os quatro primeiros desenhos dessa sequência:

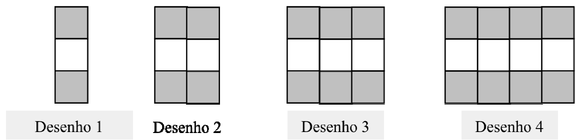


Figura 1

1. Observa cada um dos desenhos da figura 1 e responde às questões seguintes, apresentando o teu raciocínio recorrendo a palavras, esquemas, cálculos ou símbolos.

   1.1. Na sequência que a Sara imaginou, quantos quadrados brancos tem o desenho número 5, se for construído da mesma maneira dos anteriores? E quantos quadrados cinzentos?

   1.2. Ainda na sequência de desenhos da Sara, quantos quadrados tem ao todo o desenho número 10?

   1.3. Escreve uma expressão algébrica que permita calcular a quantidade de quadrados cinzentos de qualquer um dos desenhos da sequência da Sara.

   1.4. Escreve agora uma expressão algébrica que permita calcular a quantidade total de quadrados de qualquer um dos desenhos desta sequência.

(8.11.2009)

Nota: A tarefa 2 consta ainda de uma segunda questão, mas apresenta-se aqui apenas a reformulação da que foi a que foi usada no texto atrás apresentado.