COMO RECONHECER O ENTE MATEMÁTICO, SE ELE TEM DIFERENTES FACES?

Miguel Silva
Escola Secundária Jorge Peixinho - Montijo - FCT/UNL- (UIED)
leugimangelo@sapo.pt

António Domingos
Departamento de Matemática da FCT/UNL- (UIED)
amdd@fct.unl.pt

Resumo

A compreensão das razões do (in)sucesso na disciplina de Matemática, tem despertado o interesse de muitos investigadores. A inegável complexidade que a disciplina envolve, fruto das diferentes representações de um mesmo ente matemático, concorre porventura para esse (in)sucesso. Conhecem-se análises curriculares, sociais, culturais e até antropológicas que procuram contribuir para uma melhor compreensão do fenómeno. Através do conhecimento de algumas teorias, pretende-se perceber que implicações podemos retirar que ajudem à compreensão das diferentes interacções ocorridas em sala de aula. Muitas dessas teorias, tentam descrever o processo de “como os alunos pensam” e de como procuram integrar as novas ideias na estrutura mental que já possuem. De uma forma integradora poderá considerar-se que este artigo tem um duplo objectivo. Na primeira parte faz-se uma abordagem que contempla diferentes teorias não no intuito da criação de uma meta-teoria que seja suporte de todos os aspectos relevantes de cada um dos autores, mas como meio que enriqueça a análise que podemos fazer relativamente às acções desenvolvidas pelos alunos em sala de aula. Esta conexão de teorias surge ainda da necessidade de reduzir a inflação de perspectivas, tendo no entanto sempre a preocupação de manter a coerência entre o discurso sem alterar os suportes de cada uma delas. Nesta análise será dado especial relevância à abordagem semiótica defendida por Radford acerca de teoria da objectificação. Na segunda parte do artigo pretende-se analisar os significados que os alunos dão a informação disponibilizada através de gráficos, tendo em conta os contributos das teorias entretanto abordadas. Os dados empíricos recolhidos seguem uma metodologia qualitativa de natureza interpretativa e mostram-nos como é possível caracterizar diferentes níveis de desenvolvimento conceptual que os alunos manifestam quando colocados perante tarefas que envolvem pensamento matemático complexo.

Palavras-chave: Funções, Conexões entre Teorias, Objectificação, Semiótica, Pensamento matemático complexo, Gráficos de funções.

Introdução

Mais importante que identificar a teoria que se revela mais apropriada ou que explica de forma mais objectiva o processo de aprendizagem, é perceber de que situação concreta ou fenómeno estamos a tratar clarificando as palavras e nomenclaturas para que consigamos entender a que objectos ou sujeitos nos referimos e de que forma chegámos àquelas conclusões (Mason, 2011). Este autor defende ainda, que a colecção de definições, propriedades e sentidos dadas pelas diferentes teorias, só faz sentido se a situação a estudar estiver completamente identificada. Mason considera assim que não faz sentido falar sobre um conjunto complexo de conjunturas que teorize sobre situações demasiado abrangentes que lhe confiram um extremo grau de incerteza, subjectividade e uma aplicabilidade incerta.

Prediger, Bikner-Ahsbahs, & Arzarello (2008) propõem um meio conciliador entre teorias, seguindo uma lógica de graus de aproximação, como sugerido na figura 1.

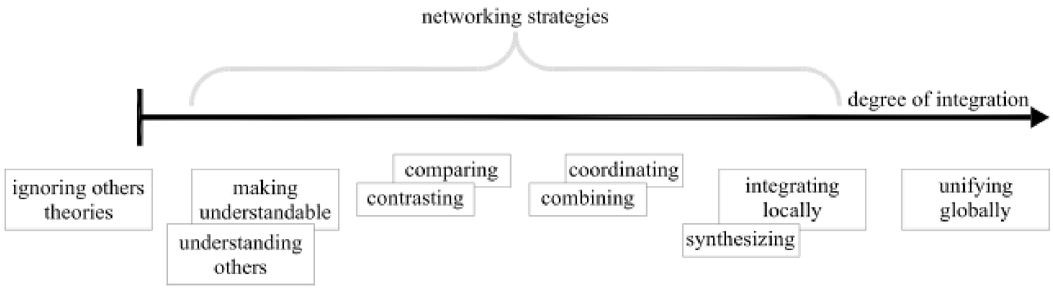


Figura 1. Graus de integração das estratégias de trabalho.

Neste artigo, vamos optar por uma abordagem que privilegia a coordenação entre as estratégias presentes nas teorias abordadas, procurando os seus pontos comuns, não negligenciando no entanto as suas fragilidades.

Perspectiva semiótica

Inspirado numa corrente social-cultural Vygotskiana, onde a influência Piagetiana se sente na importância dada à acção sobre os objectos, o trabalho de Radford foca-se em aspectos específicos de aprendizagem como tomada de consciência e de construção do indivíduo bem como na importância das dimensões sociais da actividade matemática. Radford (2008), desenvolve uma teoria do conhecimento a que dá o nome de Teoria da Objectificação (TO). A TO assenta numa ideia que releva a importância das dimensões antropológica e histórico-cultural na construção do conhecimento. É uma teoria que tenta afastar a ideia de que a construção do conhecimento é um processo puramente individual e que tem apenas em conta o próprio aprendente. Consequentemente, a TO assenta na ideia de que o processo de ensino e aprendizagem é um processo social, preenchido de influências históricas e culturais resultantes do percurso de vida dos indivíduos envolvidos. Trata-se por isso, de um processo reflexivo que cada indivíduo produz assente nas suas vivências culturais sejam elas passadas ou presentes. Por conseguinte, e deste ponto de vista, “pensar” não é apenas um processo mental ganhando extraordinária importância a influência sócio-cultural.

Segundo Radford (2008) as várias teorias de aprendizagem diferem sobretudo em três grandes aspectos.

a) Conteúdo a ser aprendido que pode ser visto segundo vários ângulos como nos é apresentado por Gimeno (1998) - Currículo apresentado aos professores, currículo modelado pelos professores, currículo apresentado à turma, currículo avaliado;
b) O aprendente;
c) Como se desenvolve o processo de aprendizagem.

A teoria de Radford (2008), de uma forma geral ocupa-se das três vertentes, enfatizando o ecossistema cultural no qual decorre a aprendizagem. Vários autores falam-nos da importância da componente social (Vygotsky, 1998) e dos ambientes de aprendizagem (Ausubel, 2003; Serrazina & Oliveira, 2010; Valadares & Moreira, 2009) mas Radford atribui-lhe uma centralidade que vai para além da aprendizagem dos conceitos, sendo sobretudo importante para a construção do pensamento do *eu* indivíduo. Para Radford, os ambientes culturais desempenham um papel primordial na maneira como chegamos ao conhecimento, para além da influência que vão tendo na definição da construção do próprio individuo.

Tal como Ausubel (2003), Radford admite que existe uma corrente na comunidade científica que considera que o aluno consegue através de um processo de descoberta alcançar uma forma de conhecimento matemático institucionalmente aceite pela comunidade escolar. Embora não defenda essa ideia, argumenta que esse conhecimento não pode ser desprezado pois será uma forma de os alunos começarem a atribuir significado a alguns objectos matemáticos com que se deparam no seu percurso. Desta forma Radford considera que as estratégias que os alunos utilizam na elaboração dos seus raciocínios não podem ser desprezadas, nomeadamente todo o tipo de artefactos que utilizam para dar corpo ao seu entendimento. Para além disso considera que os artefactos não são apenas facilitadores e indutores do raciocínio, sendo a parte corpórea do mesmo, tendo por isso um papel central na resolução das actividades (Arcavi, 2003) .

Os artefactos são vistos como sendo objectos materializadores do pensamento, são parte integrante do mesmo (Radford, 2008).

Tendo em conta o papel que a envolvência social e a herança cultural detêm no processo de ensino e aprendizagem defendido por Radford, é importante que o aluno tenha um papel activo na apropriação do conhecimento num constante movimento de reflexividade, que pode ser encarado como um processo de dissecação e reconstrução da informação tendo como ferramentas o seu percurso antropológico, a sua herança sócio-cultural e o seu conhecimento das proposições e regras matemáticas que oferecem a este movimento reflexivo e refractário a subjectividade inerente a cada aprendente.

Desta forma, Radford (2008), tal como ilustrado na figura 2, desenvolve a TO assente num sistema Semiótico que visa a interacção de três grandes eixos: primeiro - *sistema semiótico de significância cultural* (Radford 2003), onde estão inseridos os objectos matemáticos, suas concepções, e relações com o mundo real; segundo - o *território do pensamento baseado nos artefactos*, e em terceiro - *a actividade*, ou seja que tipo de acções, operações e actividades realizamos com os objectos.

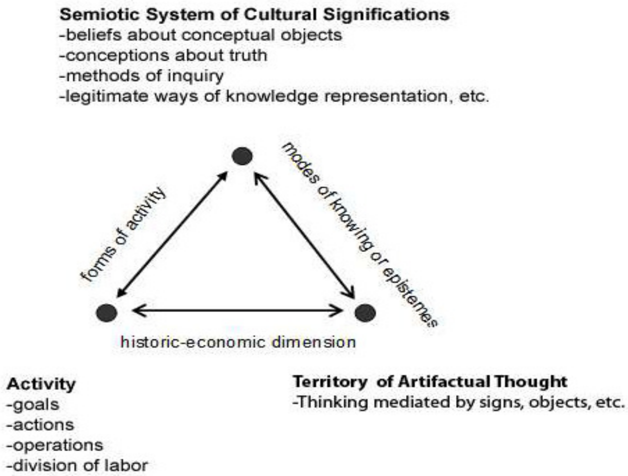


Figura 2[1]. Três Eixos do Sistema Semiótico.

Nesta teoria da Objectificação, os objectos matemáticos vão sendo gerados durante o processo de actividade matemática do indivíduo. Esta perspectiva contrasta com a

---

[1] The arrows show the interaction between a Semiotic System of Cultural Significations, Activity and the Territory of the Artifactual Thought. The interaction generates the forms of activity and the modes of knowing on the base of the specific historic-economic dimension. In a dialectic process, forms of activity, modes of knowing, and the historic-economic dimension alter the triangles vertices (Radford, 2008, p. 220)

perspectiva semiótica defendida Duval (2006) onde os objectos matemáticos já existem à partida e em que os signos vão tentando reproduzir de uma forma ou de outra o que o ente matemático, que para este autor é um ser inatingível, representa.

No entanto, a teoria da Objectificação não é apenas um processo de construção do conhecimento. Torna-se em algo mais rico, algo que vai para além de um movimento de atribuição de significado dos conceitos que vai encontrando no seu trajecto tendo em conta o seu percurso histórico e o ecossistema cultural que o envolve. Deste processo brota não apenas conhecimento matemático mas sobretudo uma alteração do próprio indivíduo a nível pessoal e na criação do seu *eu*.

Para que todo esse processo de construção do indivíduo ocorra, sobretudo no que concerne à atribuição de significados, o autor destaca duas fontes importantes: a dimensão do "conhecimento residente nos artefactos" e a dimensão da "interacção social".

A primeira fonte prende-se com a informação que a manipulação dos objectos nos desperta. A vertente social e o contexto em que esses objectos são utilizados bem como a interacção e a convivência com quem sabe descodificar os objectos é uma fonte de criação de significados para o aprendente. Seja um mestre num ofício ou mesmo um professor numa escola, a interacção entre o aprendente e o seu instrutor que é hábil em manipular e descodificar as várias valências do objecto, promove no aluno uma quantidade de novas perspectivas, criando e abrindo diante de si uma quantidade novos caminhos de aprendizagem. Desta forma, a linguagem simbólica característica da sala de aula que é utilizada como norma (Marques, 2008; Cobb, Wood, Yackel, & McNeal, 1992), poderá ser considerada como um exemplo claro de artefacto característico e normativo da aprendizagem numa aula de matemática que surge como mediador, gerador e regulador de aprendizagens. Nos artefactos podemos incluir signos e objectos de diferentes ordens: símbolos matemáticos, gráficos, gestos, palavras, textos, calculadoras, instrumentos de medida, entre outros. As perspectivas atrás referidas que surgem com a manipulação dos objectos são de tal forma importantes que os próprios objectos mudam a nossa forma de pensar e agir perante novas situações. Como exemplo pense-se nas inúmeras possibilidades de iteração e de criação de exemplos que instrumentos tecnológicos fizeram surgir não há muitos anos em sala de aula. Indo um pouco mais longe poderemos ainda acrescentar que o grau de destreza bem como as diferentes utilidades que se dão a cada um destes artefactos utilizados *per sí* ou as conexões entre os vários objectos poderão ser importantes para aferir como os alunos manuseiam os conceitos matemáticos e em que medida deixam de considerar o objecto matemático como sendo o objecto operatório e ao mesmo tempo são capazes de enveredar por um caminho de generalização em direcção à abstracção que os objectos permitem (Dreyfus, 1991; Domingos & Silva, 2010). Assim, a maneira como os alunos vão usando de uma forma cada vez mais adequada os meios de objectificação (artefactos) permite ao professor aferir qual a sua evolução quer a nível de aquisição dos objectos matemáticos de uma forma universalmente aceite, bem como da sua maturação como indivíduo matematicamente competente. Este processo de maturação vai para além da caracterização de um processo individual, ganhando uma dimensão externa transformando-se num processo social. Assim sendo, a TO procura promover, não só a autonomia individual, mas sobretudo uma autonomia sensível à sua cultura e comunidade, onde a relação com os outros surge como um compromisso social que cada indivíduo terá que honrar e que leva ao conhecimento comum.

A segunda fonte tida como fundamental e procedência de atribuição de significado segundo a TO, é a dimensão social. Aqui a interacção social poderá ser encarada como as interacções que se criam na sala de aula entre os alunos e o professor, entre os próprios alunos e entre os alunos e toda a envolvência social, física e normativa da aula. Desta forma, o olhar para a sala de aula terá de ser mais rico e decisivo, do que "apenas" o local onde se negoceiam significados. Segundo esta perspectiva, a sala de aula é um espaço simbólico (artefacto) onde existem regras e rituais que influenciam e impelem o indivíduo ao movimento refractivo que é estruturante da aprendizagem. Esses movimentos, estão carregados de influências culturais, quer na linguagem, quer nas normas que obedecem ao ambiente social envolvente e até mesmo do ambiente particular propiciado, quer pela disciplina, professor ou grupo de trabalho em si. Defende-se por isso que a influência cultural e histórica, bem como normativa, não permitam uma negociação total do meio e dos significados que vão ser trabalhados na aprendizagem. Consequentemente, existem por isso, pré-condicionantes que se mantêm dada a sua natureza cultural profundamente instituídas e que são elos suporte e condutores dessa aprendizagem.

De acordo com este ponto de vista as interacções sociais não são apenas catalisadores da aprendizagem, tomam um papel fundamental na consubstanciação da aprendizagem. Desta forma a aprendizagem é mais de que um processo de apropriação de conhecimento científico. Ganhando uma nova dimensão, passa a ser reconhecido como um processo de procura do conhecimento, bem como de procura da identidade do indivíduo. A esta procura da construção do indivíduo Radford (2008) chama de subjectificação, crendo que a partir da objectificação atribuída ao conceito matemático, o sujeito constrói-se a si mesmo e por conseguinte o processo de aprendizagem é não só e apenas um processo de crescimento de estruturas de conhecimento mas também de crescimento pessoal (Radford, 2008).

Este processo de aprendizagem não é visto na mesma perspectiva por professores e aprendentes. Enquanto que para os professores está bastante claro nas suas cabeças o que se pretende com determinado passo ou movimento de aprendizagem, para o aluno esses movimentos não são à partida previsíveis. O professor, como detentor do conhecimento, consegue ter uma perspectiva global do caminho a percorrer, enquanto que o aluno percorre uma tripla dificuldade: primeiro não conhece o conceito final que é previsto apreender; segundo não tem toda uma riqueza cultural que o professor tem quer a nível histórico, quer na manipulação dos artefactos; em terceiro todo o percurso que leva ao conceito final, pode não ser sempre intuitivo tendo em conta a suas experiências anteriores. Estas diferentes formas de encarar o processo de ensino e aprendizagem (ensino pelas lentes do professor e aprendizagem segundo os alunos), poderão ser motivo de não entendimentos sendo importante para os professores conseguirem fazerem um percurso de regressão, que permita perceber quais e quão limitadas são as experiências a que os alunos podem fazer apelo para sustentarem as novas aprendizagens. São "apenas" nessas experiências que os alunos se vão alicerçar para dar significado às novas aprendizagens e por isso algo aparentemente fácil aos olhos do professor não consegue fixar-se na estrutura cognitiva do aluno.

A importância da compreensão é preocupação de muitos autores. Também para o *National Council of Teachers of Mathematics* (NTCM) nos princípios e normas para a matemática escolar se dá especial ênfase à importância da compreensão na aprendizagem da matemática. Refere-se mesmo que "a compreensão é facilitadora da aprendizagem subsequente e do desenvolvimento da autonomia dos alunos e da sua capacidade de enfrentar novas situações e problemas" (NTCM, 2007, p. IX). A utilização da matemática em novas situações, ou a competência para a utilização da matemática como um saber em acção, ou transferível, está intimamente ligada a essa compreensão. Mas vários autores acreditam poder ir mais longe considerando que a capacidade de utilizar adequadamente a Matemática em contextos variados é associada à compreensão dos conceitos, mas também ao conhecimento factual e ao domínio dos procedimentos matemáticos. Desta forma a resolução de problemas é uma das normas apresentadas pelo NTCM como estratégia importante da compreensão dos conceitos matemáticos. No entanto, segundo Radford a resolução de problemas é um meio que, através dos movimentos de reflexão, conjecturas e proposições, obriga a que cheguemos a uma aprendizagem matemática. Essa reflexão envolve o problema que é proposto, a cultura social do indivíduo e toda a estrutura de artefactos aí incluídos. Desta forma, considera-se que aprender matemática não é apenas ter habilidade para resolver problemas que envolvem conceitos matemáticos, mas sobretudo é um processo mais profundo da construção do indivíduo que aprende a pensar matematicamente com toda a influência que isto terá na construção da personalidade.

(Des)conexões

Mas de que forma os entes matemáticos ficam conhecidos pelos seus representantes ou signos? Será que conseguimos reconhecer os entes matemáticos apesar das diferentes faces que estes podem apresentar? Até que ponto o ente matemático fica completamente representado pelo seu símbolo? Mais do que responder a estas questões precisamos reflectir sobre o papel desempenhado pelas diferentes representações que os entes matemáticos podem assumir. Como sabemos a sua representação não é única e por isso os alunos têm tanta dificuldade em fazer a tradução entre representações. Podemos por exemplo questionar-nos: O que significa o símbolo π ? Representa a amplitude de um ângulo ou a razão entre o perímetro e diâmetro de uma circunferência? Desta dificuldade surge a certeza de que os alunos têm necessidade de ver para além do que se vê, do que é manipulável e palpável. Precisam ir para além do mundo corpóreo “conceptual-embodied world” Tall (2004). Neste primeiro dos seus três mundos, David Tall refere que este é construído através da percepção do mundo que nos rodeia, e da reflexão que fazemos sobre esses objectos, quer sejam físicos ou mentais. Através da reflexão e de uma crescente riqueza de linguagem conseguimos construir noções matemáticas para além do mundo físico que conseguimos percepcionar. Acrescido aos objectos físicos, este mundo inclui percepções mentais do imaginário espacial que o indivíduo possui. Esta visão tem pontos de contacto com a TO de Radford, que para além de artefactos como os gestos, calculadoras, réguas, etc., enfatiza também os artefactos linguísticos como meios de objectificação ou de construção do conhecimento, considerando que o facto de a restrição do processo de construção de conhecimento se limitar à manipulação dos sistemas simbólicos como é defendido por Duval, se torna imensamente limitador. O argumento é simples e sustenta que a linguagem matemática não pode ser um sistema hermético e fechado de manipulação de símbolos, defendendo os artefactos linguísticos como meios de objectificação. Tal como numa língua materna, na linguagem matemática esses símbolos não fazem sentido e necessitam de um contexto social que os consubstancie. A propósito do desenvolvimento humano assente na discussão narrativa Jerome Bruner refere que:

> … Este método de negociação e renegociação de significados através da mediação da interpretação narrativa é, parece-me, uma das realizações máximas do desenvolvimento humano nos sentidos ontogénico, cultural e filogénico da expressão. Na perspectiva cultural, é imensamente suportado, claro, por recursos narrativos armazenados de uma comunidade e, igualmente, pela sua preciosa panóplia de técnicas interpretativas… (Bruner, 2002, p. 75)

Consequentemente o papel do professor parece tornar-se a dado ponto do processo de aprendizagem mais importante. Nesta altura, a intervenção do professor com os artefactos necessários, não deverá ser de todo ingénua. Levar o aluno a pensar para além dos seus sentidos, ver o que não é visível, transporta o aluno para uma outra dimensão, *a abstracção*. A preocupação com a passagem à abstracção também a encontramos em Radford, tal como o encontráramos na representação-abstracção (Dreyfus, 1991); no movimento entre abstracção empírica - abstracção pseudoempirica - abstracção reflexiva (Dubinsky, 1991) ou na passagem entre os mundos *conceptual-embodied world*; *proceptual symbolic-world*, e *formal-axiomatic world* (Tall, 2007). Radford, sustenta que o aprendente passa de uma percepção material do objecto para um estado de generalização, que lhe permite intuir resultados que não estão ao alcance da visão. O processo começa com uma objectificação, que através da acção e reflexão dá corpo às ideias matemáticas. Depois o aluno cria um estado de sensibilidade emergente para a actividade e Radford chega a defender ser necessária uma "*domesticação do olho*" para poder ter a sensibilidade que o permita transformá-lo num "órgão de percepção teórico-cultural", (Radford, 2010, p. 6). Porém este momento em que o aluno vai para além da percepção física do objecto, surge invariavelmente da interacção social com os pares e com o professor que o vai alertando para pormenores, propriedades e regularidades, tendo em conta a envolvência sócio cultural dos intervenientes. Nesta interacção recorre-se a uma série de artefactos (gestos, linguagem, gráficos, etc.) que desta forma, apesar de "serem bastante materiais", se tornam estruturantes do pensamento abstracto. Este despertar provocado no aluno permite uma generalização assente na capacidade de sintetizar e ser sensível a encontrar diferenças entre iguais e similitudes entre diferentes, largando as amarras do objecto primeiramente percepcionado. Na verdade, o aluno não age nem generaliza naturalmente de uma forma algébrica, mas sim através de acções de forma eminentemente empírica assente nas suas crenças e concepções que promove sobre o objecto.

Passando a outro nível de questões podemos pensar como se consegue reconhecer o ente representado pelos seus diferentes representantes? Como podemos alternar entre os diferentes representantes, sem perder a essência do ente representado? Olhando segundo a perspectiva de Duval (2006), esse salto entre representantes é o movimento mais difícil de concretizar. Considerados como sendo à *priori* inacessíveis, os objectos matemáticos surgem apenas perante nós através dos seus representantes sendo que as conexões entre as suas várias faces e entre estas e o que elas representam (objecto ou significado que este quer representar) obedecem a um conjunto de operações *de tratamento* e *conversão***.** Desta forma Duval, defende um sistema semiótico caracterizado por um conjunto de sinais elementares, conjunto de regras e uma estrutura de significados decorrentes da relação entre os signos dentro do sistema. Assim sendo, os objectos matemáticos considerados como entidades invariantes que ligam diferentes sistemas semióticos à medida que se vão fazendo operações de tratamento e conversão, entendendo a cognição matemática como o produto da coordenação dos diferentes sistemas semióticos.

Duval defende que todo o desenvolvimento da matemática tal como o da sua aprendizagem é acompanhado das interacções entre os sistemas semióticos. O signo ganha um duplo sentido: 1) estrutura semiótica e 2) representante do objecto. A criação de sentido e a aprendizagem requerem que lidemos com diferentes sinais de diferentes signos em diferentes sistemas semióticos sem nunca perder a noção do objecto matemático por eles representado e que estamos a estudar.

Percebe-se desta forma que a semiótica assume um papel representativo dos objectos matemáticos e torna-se essência da cognição que é enriquecida pela fluente coordenação dos vários sistemas semióticos. As representações semióticas são diacrónicas e são coordenadas através de um processo de *tratamento e conversão***.** A abordagem de Duval apresenta uma relação *sinal/objecto* que ganha sentido através da semiótica. A esta abordagem chamamos *estrutural/funcional*, passando a actividade matemática a ser caracterizada pela transformação dos sinais no complexo sistema semiótico. Essas transformações concorrem para a construção de significados e advêm das reflexões estabelecidas entre o signo e a entidade por si representada conectada nos diferentes sistemas semióticos. Os sinais representam objectos através das várias transformações semióticas. No sistema de Duval o signo é tratado de forma diacrónica transformando-se noutros signos dentro do mesmo sistema semiótico, ou mesmo noutro signo de outro sistema semiótico, mas representado o mesmo objecto. Se não tomarmos os sinais como representativos dos objectos, estes serão inatingíveis e não racionalizáveis como hoje os conhecemos.

Metodologia

Este estudo segue uma metodologia de investigação qualitativa e interpretativa (Bogdan & Biklen, 2006), integrando uma perspectiva de experiência de ensino (Shulman, 1986). Trata-se de uma ferramenta poderosa na metodologia de investigação utilizada na formulação de explicações do comportamento matemático dos alunos e que tem como objectivo "'apanhar' os processos no seu desenvolvimento e determinar como é que o ensino pode influenciar de maneira optimizada esses processos" (Kantowski, 1978, p. 45). Esta abordagem visa descrever e interpretar os processos de desenvolvimento dos fenómenos sobre que se debruçam induzidos por meio de intervenções planificadas.

A tarefa foi realizada em duas turmas de alunos do 7º ano, de uma Escola do Distrito de Setúbal do qual o primeiro autor é professor. Esta tarefa surge como uma das sugeridas nas brochuras (Ponte, Matos, & Branco, 2009), de apoio à implementação do novo programa do ensino básico de matemática (Ministério Educação, 2007) existentes na página da Direcção Geral de Inovação e Desenvolvimento Curricular (DGIDC), no capítulo de funções. Esta tarefa consiste na elaboração por parte dos alunos, tendo apenas a informação que surge nos gráficos, de uma história que possa ser uma descrição da interacção dos dois gráficos onde surgem como variáveis *Distância a casa* vs *Tempo* e *Fome* vs *Tempo*, respectivamente. Apesar de surgir nas brochuras com outros objectivos, a tarefa foi escolhida para ser aplicada no início do capítulo de funções para que o professor pudesse aferir qual o entendimento que os alunos têm de informação apresentada segundo uma representação gráfica, antes do tema ser tratado na aula pelo professor. Desta forma, toda a construção e o significado que os alunos produziram são baseados nas suas experiências anteriores, sem ter grande preocupação com rigor matemático ao nível das variáveis e da construção dos próprios gráficos. O desenvolvimento desta tarefa foi trabalhado individualmente. Esperava-se que no fim, alguns alunos apresentassem à turma a sua história, onde todos eram convidados a comentar, acrescentar e corrigir algo que considerassem pertinente.

Análise de dados

Nesta secção pretende-se ilustrar de que forma os alunos conseguem invocar as diferentes representações que lhe são dadas através dos gráficos e a forma como conseguem fazer traduções entre elas. Procura-se ainda compreender como é que a Teoria da Objectificação nos pode ajudar a descrever as acções dos alunos através do seu sistema semiótico. Apresentamos de seguida algumas das categorias que foi possível identificar.

Numa primeira categoria podemos considerar os alunos que se fixam nos gráficos e fazem uma interpretação pictórica da situação.

Ao analisar os gráficos da figura 3, os alunos tendem a referir que o passeio se realizou numa montanha que subiram e desceram, como se o traçado do gráfico representasse o próprio monte.

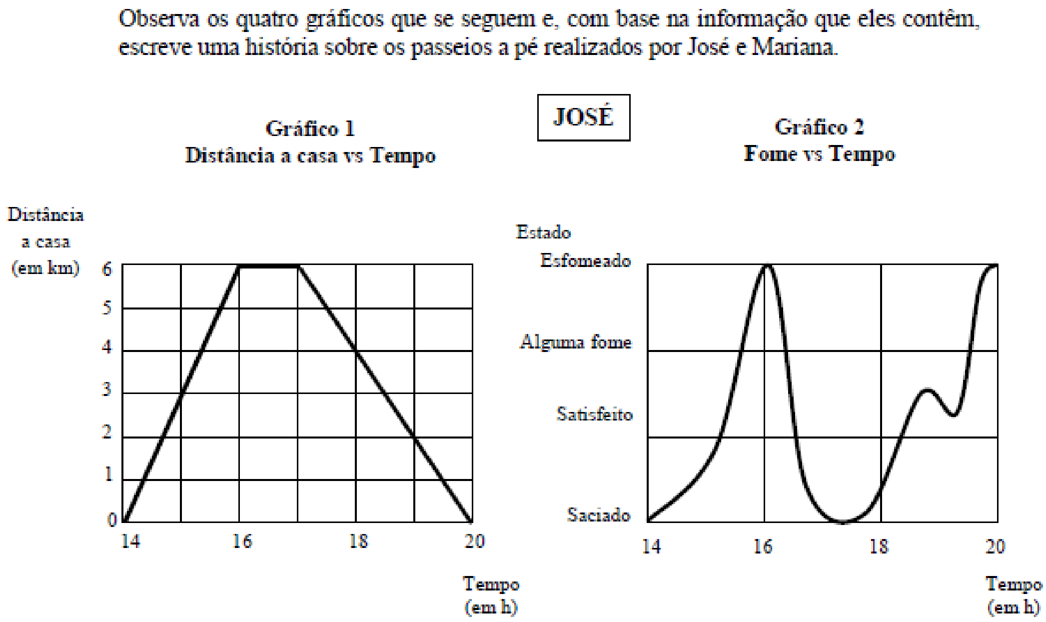


Figura 3. Tarefa proposta aos alunos.

É o caso do Humberto (figura 4) que apenas valoriza alguns dos pontos críticos, como o "cimo da montanha" ou o "jantar".

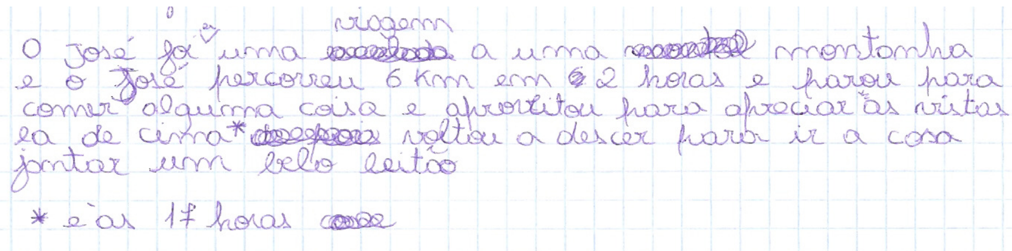
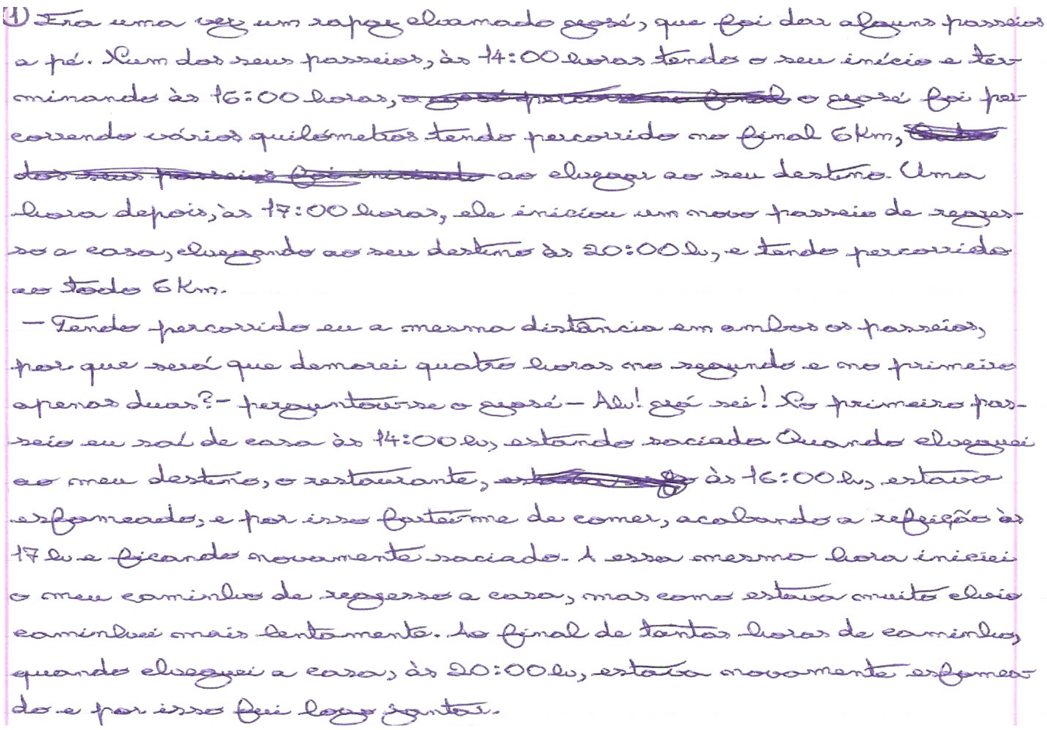


Figura 4. Descrição do passeio – Humberto.

Neste caso ele apenas concretiza os valores das variáveis em causa nesses pontos, não conseguindo integrar esses dados com os do segundo gráfico dado. Para o Humberto há uma notória dificuldade em relacionar os dois gráficos, fixando-se sobretudo nas características do primeiro. Ele consegue fazer uma leitura pontual em cada um dos gráficos mostrando ser capaz de atribuir significado a determinadas acções descritas em pontos específicos. Do ponto de vista da teoria da objectificação nota-se uma grande dificuldade em evidenciar os objectos matemáticos envolvidos, centrando-se sobretudo no seu sistema semiótico das significações culturais (figura 2) sem que os artefactos presentes sejam evidenciados. Esta abordagem, baseada no *background* cultural, é apresentada por vários outros alunos que se referem ao segundo gráfico evidenciando apenas as situações onde se verifica uma situação de "fome" ou de "estado de saciedade" sem conseguir estabelecer uma relação entre as acções simultâneas que decorrem da integração dos dois gráficos. A integração de ambas as representações gráficas revela-se assim uma tarefa complexa que dificulta a tradução para uma vertente de comunicação escrita.

Numa segunda categoria podemos incluir os alunos que conseguem fazer uma leitura mais pormenorizada de cada um dos gráficos mas ainda não conseguem integrar toda a informação disponibilizada por estes. É o caso da Sónia (figura 5) que faz uma descrição do primeiro gráfico justificando as várias etapas, mas que depois não consegue integrar toda a informação disponibilizada pelo segundo.



1) Era uma vez um rapaz chamado José, que foi dar alguns passeios a pé. Num dos seus passeios, às 14:00 horas tendo o seu início e terminando às 16:00 horas, o José foi percorrendo vários quilómetros tendo percorrido no final 6Km, ao chegar ao seu destino. Uma hora depois, às 17:00 horas, ele iniciou um novo passeio de regresso a casa, chegando ao seu destino às 20:00h, e tendo percorrido ao todo 6Km.

— Tendo percorrido eu a mesma distância em ambos os passeios, por que será que demorei quatro horas no segundo e no primeiro apenas duas? — perguntou-se o José — Ah! Já sei! No primeiro passeio eu saí de casa às 14:00h, estando saciado. Quando cheguei ao meu destino, o restaurante, às 16:00h, estava esfomeado, e por isso fartei-me de comer, acabando a refeição às 17h e ficando novamente saciado. A essa mesma hora iniciei o meu caminho de regresso a casa, mas como estava muito cheio caminhei mais lentamente. Ao final de tantas horas de caminho, quando cheguei a casa, às 20:00h, estava novamente esfomeado e por isso fui logo jantar.

Figura 5. Descrição do passeio – Sónia.

Neste caso a Sónia mostra ser capaz de, em cada gráfico isolado, relacionar ambas as variáveis dando-lhe um significado único. Esta abordagem parece revelar que há um pensamento baseado nos artefactos que a actividade conduz à consolidação do seu sistema semiótico das significações culturais. Nota-se, no entanto, que o primeiro gráfico é interpretado com mais pormenor, provavelmente pelo facto de ser constituído por segmentos de recta. No segundo gráfico as pequenas variações apresentadas não são destacadas o que parece revelar alguma dificuldade em integrar todos os artefactos presentes condicionando assim o seu pensamento. Estes alunos mostram que são detentores de um conhecimento que vai sendo objectificado pela actividade dirigida para o território do pensamento baseado nos artefactos enriquecendo assim o seu sistema semiótico de significações culturais. Conseguimos assim observar a objectificação do conhecimento baseada numa interacção entre os 3 vértices do triângulo de Radford. No que se refere à integração de ambas as representações gráficas a Sónia revela alguma dificuldade em descrevê-las em simultâneo, evidenciando a complexidade da tarefa proposta, no entanto a tradução que faz de ambos os gráficos para linguagem corrente demostra uma boa compreensão na relação que estabelece entre as variáveis envolvidas em cada um deles.

Conclusões

A procura dos objectos matemáticos e a forma como eles são formados na nossa mente têm sido alvo de uma busca por parte de muitos investigadores. São várias as teorias de aprendizagem que se têm debruçado sobre esta problemática, trazendo todas elas contributos para uma melhor compreensão das questões em estudo. Nesta comunicação procuramos evidenciar algumas das características que nos são apresentadas pela Semiótica, nomeadamente as presentes na Teoria da Objectificação de Radford, comparando-as com as que são evidenciadas pelas teorias cognitivas ligadas ao Pensamento Matemático Avançado. Estas abordagens, quando conjugadas, podem ser encaradas como complementares ao procuramos explicar a forma como os conceitos matemáticos são construídos e desenvolvidos pelos alunos. Dão-nos uma dupla perspectiva, a forma como os conceitos podem ser manipulados na mente do alunos e ao mesmo tempo o modo como esses alunos se tornam indivíduos socialmente mais capazes.

Com base na dimensão semiótica estudada procurámos compreender de que forma os alunos dão significado a uma situação de aprendizagem baseada na interpretação de gráficos, situação esta que pode ser considerada como envolvendo um pensamento matemático complexo. Com base na teoria da Objectificação perece ser possível explicar e compreender com mais profundidade as diferentes componentes do sistema semiótico que são activadas, sendo desta forma possível explicitar a forma como o conhecimento é construído. A abordagem semiótica, permite-nos ter uma visão mais alargada e abrangente se comparada com as teorias cognitivas visto que as dimensões culturais, sociais e históricas assumem um papel central na explicação da forma de como os alunos constroem o conhecimento. Os dados apresentados permitem perceber que a abordagem Semótica é uma ferramenta bastante válida na compreensão dos processos de construção do conhecimento por parte dos alunos.

Referências

Arcavi, A. (2003). The role of visual representations in the learning. In *Educational Studies in Mathematics 52*, 215-241. Netherlads: Kluwer.

Ausubel, D. P. (2003). *Aquisição e Retenção de Conhecimento: Uma Perspectiva Cognitiva.* Lisboa: Plátano Editora.

Bogdan, R., & Biklen, S. (2006). *Investigação Qualitativa em Educação: Uma Introdução à Teoria dos Métodos.* Porto, Portugal: Porto Editora.

Bruner, J. (2002). *Actos de Significado: para uma psicologia cultural.* Coimbra: Edições 70.

Cobb, P., Wood, T., Yackel, E., & McNeal, B. (1992). Characteristics of classroom mathematics traditions: An interactional analysis. *American Educational Research Journal 29*(3), 573-604.

Domingos, A., & Silva, M. (2010). Abordagens Teóricas da Construção do Conhecimento Matemático e suas Implicações Escolares. *Actas do XXI SIEM (Seminário de Investigação em Educação Matemática)* (pp. 641-658). Lisboa: APM.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. In T. David, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 25-41). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academics.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. Tall, *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 95-123). Dordrecht, Netherlands: Kluwer Academics.

Duval, R. (2006). Quelle sémiotique pour l'analyse de l'activité et des productions mathématiques. In L. Radford, & B. D'Amore, *Semiótica, Cultura y Pensamiento Matemático* (pp. 45-81).

Gimeno, S. (1998). *O currículo: uma reflexão sobre a prática.* Porto Alegre: Artmed.

Kantowski, M. G. (1978). The teaching experiment and Soviet studies of problem solving. In L. L. (Ed.), *Mathematical problem solving* (pp. 43-52). Columbus, Ohio: ERIC Center for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Marques, A. (2008). A utilização da calculadora gráfica. Um estudo no 12º de escolaridade. *Tese de Mestrado*. Lisboa: Universidade Aberta.

Mason, J. (2011). Discerning in and Between Theories in Mathematics Education. *European Conference in Mathematics Education (CERME)*, (Comunicação aprsentada no Working Group 16). Rzeszow: Univerzity of Rzeszow, Poland.

Ministério da Educação. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico.* Acedido Março 2010, de http://sitio.dgidc.min-edu.pt/matematica/Documents/Programa Matematica .pdf

NTCM. (2007). *Princípios e Normas para a Matemática Escolar.* Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Matos, A., & Branco, N. (2009). *Sequências e Funções.* Acedido em 10 de Fevereiro, 2011, de http://area.dgidc.min-edu.pt/materiais_NPMEB/02 3_Sequencia_ Sequencias_e_Funcoes_NPMEB_3c7.pdf

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., & Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM Mathematics Education*, *40*, 165-178.

Radford, L. (2008). The ethics of being and knowing:Toward a cultural theory of learning. In L. Radford, G. Schubring, & F. Seeger, *Semiotics in Mathematics Education: Epistemology, History and Culture* (pp. 215-234). Rotterdam: Sense.

Radford, L. (2010). The eye as a theoretician: seeing structures in generalizing activities. *For the Learning of Mathematics 30*.

Serrazina, L., & Oliveira, I. (2010). Trajectórias de Aprendizagem e Ensinar para a Compreensão. In G. d. Investigação, *O Professor e o Programa de Matemática do Ensino Básico* (pp. 43-59). APM.

Shulman, L. S. (1986). Paradigms and research programs in the study of teaching: A contemporany perspective. In M. Wittrock, *Handbook of research on teaching (3ª edição)* (pp. 3-36). New York: Macmillan.

Tall, D. (2007). Embodiment, Symbolism and Formalism in Undergraduate Mathematics Education. *Conferência plenária apresentada na 10th Conference of the Special Interest Group of the Mathematical Association of America on Research in Undergraduate Mathematics Education*, (pp. 22-27). San Diego, USA.

Tall, D. (2004). Thinking Through Three Worlds of Mathematics. *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 281–288). Bergen, Norway.

Valadares, J., & Moreira, M. (2009). *A Teoria da Aprendizagem Significativa: sua fundamentação e implementação.* Coimbra, Portugal: Almedina.

Vygotsky, L. S. (1998). *A Formação Social da Mente* (6ª ed.). São Paulo: Martins Fontes Editora.