PROVAS DE AFERIÇÃO E EXAMES: A QUALIDADE DAS QUESTÕES DE ÁLGEBRA

Mário José Miranda Ceia
Escola Superior de Educação, Instituto Politécnico de Portalegre
mario.ceia@esep.pt

Adelaide Filipe
Escola Secundária Francisco Simões
adelaiderala@gmail.com

Cláudia Santos
POPH - Programa Operacional Potencial Humano
claudia-bernardino@hotmail.com

Resumo

Esta comunicação apresenta um modelo de análise das questões das provas de aferição e dos exames. O modelo inspira-se na taxonomia SOLO, em particular na forma como estes autores estabelecem os ciclos de aprendizagem. Foram definidos três parâmetros para suportar a análise das questões: As capacidades exigidas para produzir a resposta (quantidade de conhecimentos); as operações envolvidas na resolução (tipo de raciocínio); e as respostas solicitadas. Esta grelha de análise é aplicável a qualquer nível de escolaridade, devendo ser tido em consideração que os conceitos referidos são os próprios desse nível de escolaridade e que as operações envolvidas são as próprias do desenvolvimento cognitivo correspondente. Embora tenham sido analisadas algumas questões, que conduziram a reformulações do modelo, prevê-se que um trabalho de análise a um número maior de questões possa provocar a introdução de novos ajustamentos.

Palavras-chave: Qualidade das questões das provas de aferição, Qualidade das questões dos exames, Avaliação em matemática.

Introdução

Nas últimas décadas os processos de avaliação do conhecimento matemático têm sido alvo de um interesse generalizado, em boa parte porque os estudantes apresentam nesta disciplina resultados que, no mínimo, se poderiam considerar muito aquém de um aproveitamento normal.

A avaliação em Matemática, nos nossos dias, é encarada de uma forma muito diferente e que vai muito para além da utilização dos testes e exames, mas são estes que continuam a mostrar-se os principais e os primeiros elementos utilizados por professores, pela administração educativa e aceites pela sociedade em geral, para avaliar o desempenho dos estudantes (Santos & Menezes, 2008; Kulm, 1990).

O alargamento da escolaridade obrigatória e a possibilidade de muito mais jovens poderem aceder ao ensino provocaram, a partir do início da década de 70 do século passado, um acréscimo muito significativo de alunos (Barreto e Preto, 1996, pp. 90-92)[1]. Este aumento de alunos e a necessidade do sistema avaliar as aprendizagens veio trazer uma crescente importância aos exames, pois só assim é possível avaliar grande número de alunos.

No caso português a administração educativa tem dado especial atenção à realização de provas de aferição nos 1.º e 2.º Ciclos do Ensino Básico, desde o ano lectivo de 2000/01, exames no 3.º Ciclo do Ensino Básico, desde 2004/05, e no Ensino Secundário (http://www.gave.min-edu.pt/, consultado em 10/05/05), como forma de regular o sistema educativo.

A publicitação dos resultados das provas de aferição e dos exames nacionais tem provocado um coro de recriminações e lamentações, surgindo reparos sobre a forma como o conhecimento, em particular o conhecimento matemático, é avaliado, sobre como os exames são concebidos e construídos.

Na realidade todos estes comentários, surgidos dos mais diversos sectores sociais, associações profissionais, instituições de ensino, etc., apresentam a mesma debilidade, são opiniões sem suporte em critérios fiáveis ou estabelecidos de forma credível. Apesar da legitimidade de emitirem opiniões, estas observações dificilmente podem ser tidas em conta como contributos relevantes para a melhoria quer da avaliação do conhecimento matemático, quer da educação matemática.

Torna-se, portanto, desejável que sejam elaborados estudos sobre os exames, que permitam criar um conjunto de indicadores, baseados em evidência empírica, os quais constituirão uma sólida grelha de critérios para avaliar este tipo de provas.

---

[1] De acordo com estes autores o número de alunos matriculados nos diversos níveis de ensino sofreu um forte incremento, exceptuando-se o 1.º Ciclo do Ensino Básico. O quadro que se segue, elaborado a partir dos dados transcritos por estes autores, mostra a evolução destes números.

	Alunos Matriculados			
	1.ºCiclo	**2.º Ciclo**	**3.º Ciclo**	**Secundário**
1970-1971	992 446	153 710	217 976	25 726
1975-1976	922 204	277 111	233 421	82 870
1980-1981	886 046	322 382	259 289	134 746

Objectivos

Com o presente estudo pretende-se, em primeiro lugar:

a) Construir um modelo de análise das questões dos exames que permita diferenciar a sua complexidade.

Posteriormente:

b) Apreciar a qualidade das provas de aferição e dos exames à luz do modelo.

O modelo a construir terá em conta a quantidade de conhecimentos envolvidos na abordagem de cada questão, a complexidade do raciocínio envolvido e o tipo de solução requerida.

Com base na análise das questões procura-se verificar se em cada prova de aferição ou exame estas são diversificadas relativamente às categorias que forem estabelecidas, bem como em relação aos vários tópicos estabelecidos nos respectivos currículos.

A Taxonomia SOLO

Na perspectiva de Ausubel (1968, in Biggs & Collis, 1982), aprender significativamente quer dizer dar significado ao conhecimento existente, envolvendo o sujeito que aprende em dois tipos de tarefas: conhecer factos, capacidades, conceitos ou estratégias de resolução de problemas; e usar aqueles factos, capacidades, conceitos ou estratégias de resolução de problemas (Biggs & Collis, 1982).

Para Biggs e Collis, avaliar uma aprendizagem deste tipo exige conhecer, por um lado, a quantidade de factos que foram aprendidos por um sujeito e, por outro, que qualidade tem a aprendizagem desses factos. É a qualidade da aprendizagem, baseada em critérios bem definidos e pré-estabelecidos, que nos vai preocupar (1982).

Mas a maior diferença relativamente a outros modelos que analisam o conhecimento dos indivíduos assenta no facto de Biggs e Collis defenderem que é sustentável avaliar o desempenho de um certo indivíduo, num determinado momento, sem fazer qualquer tipo de inferência sobre a sua estrutura cognitiva. Para tal, consideram que a análise não deve pretender inferir sobre as capacidades dos indivíduos e sim debruçar-se sobre a qualidade das respostas que estes produzem durante o desempenho de uma determinada tarefa (1982).

Tal pressuposto implica que, de um ponto de vista prático, a resposta que um indivíduo produz, durante a realização de certa tarefa, apresenta uma certa qualidade, sendo possível atribuir-lhe uma categoria, analisando apenas o seu desempenho (Estrutura dos produtos de aprendizagem observados[2] – SOLO), em vez de pretender avaliar a estrutura cognitiva desse indivíduo (Estrutura Cognitiva Hipotética[3] – HCS) (Biggs & Collis, 1982).

Como consequência imediata será plausível admitir que, em circunstâncias distintas, o desempenho possa ser diferente, dependendo de factores diversos, sem que tal signifique que as capacidades individuais se modificaram. Convém, contudo, referir que Biggs e Collis não negam a relevância da maturação dos indivíduos na qualidade das respostas e estabelecem um paralelismo entre os estádios de desenvolvimento - sensório motor, pré-operacional, concreto operacional e formal operacional, com a qualidade da aprendizagem (níveis SOLO) – pré-estrutural, uni-estrutural, multi-estrutural, relacional e abstracto.

A taxonomia SOLO estabelece cinco níveis, sendo definido cada nível à custa de três parâmetros, os quais permitem descriminar os diferentes tipos de respostas ou produções que lhe correspondem: as capacidades, as operações envolvidas e a consistência e capacidade de concluir.

As capacidades referem-se à quantidade de memória de trabalho, ou de tempo em que a atenção está mobilizada, requerida por cada um dos diversos níveis da taxonomia SOLO. O número de factos que é possível recordar e o tempo de mobilização da atenção é maior no nível abstracto, ou seja, neste nível é necessário recordar vários factos simultaneamente, bem como prolongar os períodos de atenção de modo a estabelecer diversas relações entre aqueles factos. No nível pré-estrutural poderá nem ocorrer um período de atenção suficiente para recordar pelo menos um aspecto relevante, pelo que as respostas não farão sentido.

As operações envolvidas dizem respeito à forma como as respostas produzidas são adequadas às questões formuladas. No nível pré-estrutural não se verifica qualquer relação lógica entre as questões e as respostas, podendo ser encontradas situações em que o sujeito se nega envolver nas tarefas propostas, reformulando a questão sem

---

[2] Tradução dos autores – Structure of the Observed Learning Outcome.
[3] Idem – Hypothetical Cognitive Structure.

modificar qualquer aspecto (tautologia), tentando adivinhar a resposta ou formulando uma resposta que poderá envolver aspectos perceptivos ou emocionais.

Uma resposta uni-estrutural invocará apenas um aspecto relevante, enquanto numa resposta multi-estrutural serão apresentados vários aspectos relevantes, mas sem qualquer ligação lógica entre eles. No nível relacional a resposta mostrará que o indivíduo é capaz de estabelecer algumas ligações lógicas entre os aspectos referidos, mas não consegue ter uma visão global do conceito envolvido.

Uma resposta abstracta vai para além da indução a partir dos dados fornecidos, introduzindo a dedução lógica. Será formulado um princípio geral abstracto, sendo possível deduzir desse princípio várias consequências.

A consistência e a capacidade de concluir referem-se a dois fenómenos quase contraditórios: a necessidade de chegar a uma conclusão; e a necessidade de tornar consistentes as conclusões, isto é, sem contradições quer entre a conclusão e os dados fornecidos, quer entre possíveis conclusões distintas. Quanto mais rápida for a obtenção da conclusão menos informação será utilizada e, portanto, maior será o perigo de criar contradições entre os dados e a conclusão. Por outro lado, uma maior necessidade de obter resultados consistentes conduzirá à utilização de mais informação e, sempre que possível, a conclusões com um maior grau de generalidade.

Desta forma uma resposta pré-estrutural será caracterizada pela obtenção de uma conclusão muito rapidamente, mas sem consistência. No caso das respostas uni-estruturais poderemos ter diversas conclusões, que podem ser correctas, mas que não são coerentes entre si. Nas respostas multi-estruturais a conclusão é determinada pelo envolvimento de um número maior de aspectos, mas que não estão relacionados entre si, podendo apresentar algumas inconsistências.

A resposta relacional apresenta uma conclusão capaz de relacionar todos os aspectos relevantes, evidenciando uma coerência global. Contudo a conclusão final, óptima num contexto, poderá mostrar-se falível noutros, mostrando uma forte ligação aos aspectos concretos. Só a resposta abstracta mostrará uma consistência global, estabelecendo princípios aplicáveis a qualquer situação.

Os Ciclos de Aprendizagem

Biggs e Telfer (1981, in Biggs & Collis, 1982) consideram que os indivíduos aprendem de formas próprias que são típicas da sua idade e portanto as respostas produzidas, para além de evoluírem de acordo com a estrutura SOLO, estão ligadas ao estádio de desenvolvimento do próprio indivíduo.

Aliás, Pegg e Tall (2010, p. 174) sustentam que a Taxonomia SOLO, ao considerar o crescimento global do conhecimento através de sucessivos modos de funcionamento (sensoriomotor, icónico, simbólico concreto, formal e pós-formal) e ciclos locais de desenvolvimento (uni-estrutural, multi-estrutural, relacional e abstracto), permite clarificar aspectos importantes que se colocam na construção de uma teoria global do desenvolvimento cognitivo, que se mostram de grande interesse quer do ponto de vista teórico, quer do ponto de vista prático.

No Quadro 1, apresenta-se uma síntese comparativa entre quatro teorias globais do crescimento global dos indivíduos a longo termo realizada por Pegg e Tall.

Quadro 1: Estádios Globais de Desenvolvimento Cognitivo (Pegg & Tall, 2010, p. 175)

Estádios de Piaget	Níveis de van Hiele (Hoffer, 1981)	Modos SOLO	Modos de Bruner
Sensoriomotor	I Reconhecimento	Sensoriomotor	Inactivo
Pré-operacional	II Análise	Icónico	Icónico
Operacional Concreto	III Ordenação	Simbólico Concreto	Simbólico
Operacional Formal		Formal	
	IV Dedução		
		Pós-formal	
	V Rigor		

Biggs e Collis sugerem, ainda, que os indivíduos aprendem ao longo da vida, através de Ciclos de Aprendizagem, seguindo a estrutura SOLO. Sucessivamente, em cada novo episódio de aprendizagem as aprendizagens evoluem seguindo os níveis do modelo SOLO (1982).

Para atingir uma certa competência, num determinado modo de funcionamento, os indivíduos passam por momentos em que treinam capacidades elementares (uni-estrutural), depois dominam várias capacidades (multi-estrutural), acabando por utilizar esse domínio com um fito pré-determinado (relacional). O nível abstracto será atingido quando se estabelece uma estratégia para obter determinados resultados.

Cada indivíduo entra num determinado modo de funcionamento quando atinge um desempenho uni-estrutural desse modo, evoluindo até produzir respostas mais elaboradas, multi-estrutural, e chegar as níveis mais complexos, relacional. Quando chegar ao nível abstracto significa que passa a funcionar no modo imediatamente mais elevado.

Note-se, ainda, que Pegg e Tall (2010) defendem que a estrutura teórica dos ciclos de aprendizagem do modelo SOLO é semelhante aos modelos de construção de conceitos de Davis, Dubinsky e Gray e Tall. O Quadro 2, na página seguinte, apresenta a forma como aqueles autores, de forma resumida, comparam estes três modelos com os ciclos de aprendizagem do modelo SOLO.

Quadro 2: Ciclos locais de desenvolvimento cognitivo (Pegg & Tall, 2010, p. 182)

Modelo SOLO	Davis	APOS de Dubinsky	Gray e Tall
			Objectos Base
Uni-estrutural Multi-estrutural	Procedimento (VMS)	Acção	Procedimento
Relacional	Processos Integrados	Processos	Processos
Uni-estrutural (um novo ciclo)	Entidade	Objecto	Proceito
		Esquema	

Modelo de Análise das Questões

O modelo de análise das questões das provas de aferição e dos exames, que apresentamos, corresponde a uma versão preliminar, que temos vindo a aperfeiçoar durante a análise das diversas provas.

Este modelo, inspirado na Taxonomia SOLO, foi concebido para analisar vários tipos de questões – testes, provas de aferição e exames, e adaptar-se a qualquer nível de escolaridade.

Os ciclos de aprendizagem, de acordo como Biggs e Collis (1982) os definem, sugerem que em cada nível de escolaridade teremos uma estrutura de questões semelhantes, variando a complexidade do conhecimento matemático que se terá de utilizar, bem como a complexidade dos raciocínios necessários à resolução das questões.

Desta forma, tal como no modelo SOLO, considerámos três parâmetros de análise: Conhecimento, quantidade de conhecimentos exigidos para produzir a resposta; Operações, tipo de raciocínio envolvido na resolução; e Resposta, tipo de respostas solicitadas.

Entendemos por Conhecimento o conjunto de conceitos que a resposta sugere que sejam utilizados e a forma como esses conceitos são envolvidos na resposta, ou seja, são fornecidos pelo enunciado ou têm que ser pesquisados para além dele.

Operações, o tipo de raciocínio envolvido na resposta bem como são estabelecidas as conclusões: trata-se de uma generalização inédita ou uma conclusão geral semelhante a outra já experimentada, ou será uma reprodução de uma generalização realizada anteriormente.

No que respeita à Resposta, pretende-se distinguir, por um lado, o tipo de respostas que são solicitadas: solicita-se uma resposta de nível de complexidade inferior, trata-se de uma resposta fechada ou não; por outro, quando existe a possibilidade de coexistirem diversas respostas como são resolvidas possíveis inconsistências e por fim como as respostas se compatibilizam entre elas.

O Quadro 3 resume os critérios estabelecidos para definir as diferentes categorias deste modelo de análise.

Quadro 3: Modelo de caracterização das questões de provas de avaliação

Categoria das Questões	Conhecimentos	Operações	Respostas
Abstracto	Os conhecimentos envolvidos: - são de grau adequado ou superior ao nível de escolaridade envolvido, tendo, neste caso, que ser pesquisados; - são relacionados entre si. Envolve a elaboração de hipóteses de trabalho. É necessário identificar informação relevante.	São envolvidos raciocínios de carácter indutivo e/ou dedutivo. São estabelecidas generalizações inéditas.	As inconsistências surgidas são resolvidas. As respostas não são fechadas. As conclusões são abertas e/ou permitem alternativas logicamente válidas.
Relacional	Os conhecimentos envolvidos: - são de grau adequado ao nível de escolaridade envolvido; - são relacionados entre si. É necessário identificar informação relevante.	São envolvidos raciocínios de carácter indutivo e/ou dedutivo. São realizadas generalizações semelhantes a outras já experimentadas.	As inconsistências surgidas, dentro do sistema proposto, são resolvidas. As respostas são fechadas. As conclusões são únicas e dentro do sistema envolvido.
Multi-estrutural	Os conhecimentos envolvidos: - são de grau adequado ao nível de escolaridade envolvido; - são utilizados de forma isolada. É necessário identificar informação relevante.	São envolvidos raciocínios de carácter indutivo e/ou dedutivo, semelhantes a outros já experimentados. São realizadas generalizações, semelhantes a outras já experimentadas.	As inconsistências surgidas, dentro do sistema proposto, são resolvidas. As respostas solicitadas são fechadas. As conclusões são únicas e dentro do sistema envolvido.
Uni-estrutural	O único conhecimento envolvido é de grau adequado ao nível de escolaridade em presença. É necessário identificar informação relevante.	São envolvidos raciocínios de carácter indutivo ou dedutivo, semelhantes a outros já experimentados. São tiradas conclusões, semelhantes a outras já conhecidas, em termos de um único conceito.	As respostas são fechadas. As conclusões são únicas e dentro do sistema envolvido.
Pré-estrutural	Os conhecimentos envolvidos: - são de grau inferior ao nível de escolaridade envolvido; - são do âmbito do senso comum, podendo não estar explícita a ligação ao conhecimento matemático. Não é necessário identificar informação relevante.	Não é envolvido, explicitamente, qualquer tipo de raciocínio.	As respostas são fechadas. As conclusões são únicas e dentro do sistema envolvido ou num sistema menos complexo.

Metodologia

Na análise elaboramos hipotéticas respostas às questões que procurávamos caracterizar. Estas respostas foram construídas tendo em conta que, em certos casos, poderíamos encontrar mais do que uma resposta e procurámos atender aos critérios de classificação como forma de esgotar as diversas possibilidades.

Desta forma, foi possível descortinar quantos conhecimentos matemáticos estavam envolvidos na construção da resposta, o que foi conseguido através dos objectivos dos programas de Matemática dos respectivos níveis de escolaridade, e se estes conhecimentos estavam ou não relacionados entre si. Nesta fase estabelecemos que uma unidade de conhecimento matemático era aquela que fosse susceptível de ser avaliada individualmente e que duas unidades de conhecimento estavam relacionadas se a utilização de uma dependia de resultados que envolviam a outra. Tomámos, ainda, em consideração se o conhecimento era fornecido pelo enunciado da questão ou se era necessário realizar alguma pesquisa adicional, ou se o conhecimento era adequado ao nível de escolaridade em apreço, de nível mais avançado ou de nível inferior.

No que respeita às operações identificámos se o raciocínio era de tipo indutivo ou dedutivo e se a resposta envolvia qualquer tipo de generalização, distinguindo as que eram inéditas, nunca teriam sido realizadas em sala de aula, de acordo com o estabelecido no programa, ou eram idênticas a outras já realizadas.

Para as respostas estabelecemos que eram únicas aquelas em que estava envolvido apenas um processo de resposta e que eram fechadas as que apenas admitiam uma resposta.

Como se pode constatar, esta grelha de análise é aplicável a qualquer nível de escolaridade, desde que se tenha em consideração que os conceitos a que nos referimos, em cada caso, são os próprios desse nível de escolaridade e que as operações envolvidas são as próprias do desenvolvimento correspondente.

Durante a construção desta grelha foram analisadas diversas questões quer de provas de aferição quer de exames, e de diferentes níveis de escolaridade, o que nos permitiu efectuar alguns ajustes sugeridos pela própria análise. Contudo consideramos que melhorias e correcções podem ser introduzidas durante a análise de novas questões.

Análise das Questões

A selecção das questões foi feita de modo a evidenciar a possibilidade de utilização do modelo em qualquer dos níveis de ensino considerados, tendo-se optado por questões que apresentaram um maior debate na sua classificação.

Questão (PAM1CEB200903)[4]

3. Um grupo de 47 crianças, do campo de férias, vai fazer alpinismo.
As crianças vão de carro. Em cada carro cabem 6 crianças.

Quantos carros são necessários para levar as 47 crianças?

Mostra como chegaste à tua resposta.

Resposta: ______________________________

Critérios de Classificação (PAM1CEB200903)

Item 3

Resposta correcta: 8.

31 Apresenta uma estratégia apropriada e completa de resolução do problema, e responde correctamente.

22 Apresenta uma estratégia apropriada e completa de resolução do problema, cometendo pequenos erros de cálculo (a), que não alteram o grau de dificuldade do problema, e responde de acordo com o valor obtido.

21 Apresenta uma estratégia apropriada e completa de resolução do problema, mas responde incorrectamente ou não responde.

12 Revela alguma compreensão do problema.

11 Responde correctamente, sem apresentar uma explicação adequada, ou sen apresentar uma explicação.

00 Apresenta outra resposta além das mencionadas.

Nota:
(a) Entende-se por pequenos erros de cálculo aqueles que não sejam reveladores da não compreensão das noções de número e de operação.

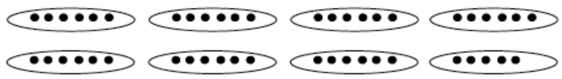
---

4 Prova de Aferição de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico, ano de 2009, questão 3.

Código 31

- $$\begin{array}{l|l} 47 & \underline{6\quad} \\ \ \ 5 & 7 \end{array}$$

  Resposta: São necessários 8 carros.

- 

  Resposta: São necessários 8 carros.

- $6 \times 8 = 48$

  Resposta: São necessários 8 carros.

Código 22

- $6 \times 8 = 46$
  $6 \times 9 = 54$

  Resposta: São necessários 9 carros.

Código 21

- $6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 + 6 = 48$

  Resposta: Foram 7 carros para as crianças.

- $$\begin{array}{l|l} 47 & \underline{6\quad} \\ \ \ 5 & 7 \end{array}$$

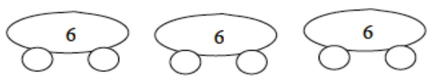
  Resposta: São necessários 7 carros.

Código 12

- $$\begin{array}{l|l} 47 & \underline{6\quad} \\ \ \ 0 & 6 \end{array}$$ *(Considera-se que o erro de cálculo altera o grau de dificuldade do problema.)*

  Resposta: São necessários 6 carros.

Código 00

- 

  Resposta: *(Não responde à pergunta.)*

- $47 - 6 = 41$

  Resposta: São necessários 41 carros.

Resolução Proposta

A resposta correcta é 8. Ao dividir as 47 crianças em grupos de 6, número de crianças que cada carro transporta, verifica-se que 7 automóveis ficarão cheios e, sobrando 5 crianças, é necessário um outro automóvel.

A resolução desta questão pode ser realizada de duas formas distintas: um processo multiplicativo, utilizando a divisão; e aditivo, utilizando a subtracção sucessiva.

No primeiro caso é necessário que os alunos sejam capazes de compreender a operação divisão nos seus diferentes sentidos (medida, partilha e razão), o que os conduzirá à utilização desta operação. Em seguida, após a realização da operação terão necessidade de compreender os significados de divisão inteira, quociente e resto, de modo a permitir-lhes concluir que quociente indica o número de automóveis completamente cheios e o resto o número de crianças que irá no automóvel que não vai cheio (8 automóveis, 7 seguem cheios e outro transportará 5 crianças).

No segundo, será necessário utilizar a operação subtracção e compreender que cada grupo de oito que se retira corresponde a um automóvel, repetindo-se 7 vezes esta operação. No final restarão 5 crianças, pelo que é necessário utilizar mais um carro.

Categorização da questão

Conhecimentos Envolvidos. Em qualquer uma das respostas vão ser utilizados os conhecimentos descritos em dois objectivos distintos: "Utilizar subtracções sucessivas para a repartição de quantidades" e "Explorar situações que envolvam a divisão (subtracções sucessivas, adições e produtos)" (DEB, 2004, p. 176), do 3.º ano de escolaridade. Na primeira resposta apresentada, acresce a necessidade de dominar o algoritmo da divisão, de modo a permitir o cálculo do quociente e do resto, conhecendo o significado de cada um destes elementos.

Nestas respostas, os conhecimentos parecerem ser utilizados de forma sequencial mas, em qualquer dos casos, ter-se-á que estabelecer conexões entre o conhecimento do algoritmo e o significado de cada um dos seus elementos ou entre o números de vezes que se repete a subtracção e o número de carros a utilizar.

Na resolução da questão encontrar-se-á um valor para o quociente desta operação ou o número de subtracções a realizar, que é 7, mas deve, simultaneamente ter em conta que o resto é 5 ou na última subtracção sobram 5 não sendo possível voltar a retirar 8, ou seja, sobram 5 crianças sem transporte, que terão que ser transportadas num outro veículo, pelo que a resposta adequada é 8 automóveis.

Operações Envolvidas. O raciocínio utilizado na resposta é de carácter dedutivo e, provavelmente, semelhante a outros já experimentados, pois está estabelecido como objectivo específico no programa de Matemática do 1.º ciclo, como se constatou anteriormente.

Tipo de Resposta. Nas duas soluções apresentadas a resposta solicitada é fechada, mas os alunos têm que desfazer a inconsistência entre o resultado da operação, que toma um valor, e a solução, que apresenta um valor distinto.

Categorização. Desta forma considera-se que este item pode ser categorizada como uma questão *Relacional*.

Questão (PAM2CEB200919)[5]

19. Repara nas três primeiras figuras do padrão que o António inventou.

O António vai continuar a desenhar figuras, seguindo o mesmo padrão.

Quantas estrelas terá a 5ª figura?

Resposta: ______________________________________

[5] Prova de Aferição de Matemática do 2.º Ciclo do Ensino Básico, ano de 2009, questão 19.

Critérios de Classificação (PAM2CEB200919)

Item 19

22 **Resposta correcta:** 35.

21 Desenha a 5ª figura, mas não responde à pergunta, ou responde incorrectamente.

12 O trabalho revela que o aluno identifica a lei de formação da sequência de figuras.

11 Responde 24 ou identifica correctamente o número de estrelas da 4ª figura.

01 Identifica parcialmente a lei de formação da sequência de figuras.

00 Apresenta outra resposta além das mencionadas.

Código 12

❖ ***Resposta:*** É mais 5, depois mais 7, depois mais 9 e continua sempre assim.

Código 11

❖ 4ª = 24 5ª = 40

Resposta: A quinta figura tem 40 estrelas.

Código 01

❖ 

Resposta: 21 estrelas.

Código 00

❖ ***Resposta:*** 20 estrelas.

Resolução Proposta

A resposta correcta é 35. Para chegar a este resultado é necessário descobrir a regra de formação de cada novo elemento: cada novo elemento tem mais uma linha e cada linha tem mais uma estrela, e efectuar a contagem utilizando uma estratégia de simples contagem, eventualmente aditiva – contar cada linha e depois adicionar todas as somas obtidas, ou uma estratégia multiplicativa, contar o número de elementos de uma linha e multiplicar pelo número de linhas.

Nos Programas de Matemática do 2.º Ciclo do Ensino Básico (DHGEBS, 1991), que estavam em vigor durante a escolaridade dos alunos que foram submetidos a esta prova, nada consta sobre sequências ou estratégias de contagens de elementos dispostos de forma rectangular. No que respeita à determinação da área de um rectângulo esta estratégia é sugerida para introduzir a fórmula do cálculo da área.

No que diz respeito ao Programa de Matemática do 1.º Ciclo do Ensino Básico (DEB, 2004), no 2.º ano de escolaridade está estabelecido que os alunos devem "Determinar quantidades dispostas em forma rectangular utilizando a multiplicação.", pelo que poderíamos concluir que os conhecimentos utilizados seriam de complexidade inferior ao nível de escolaridade em apreço.

Por outro lado, quando olhamos para o Programa de Matemática do Ensino Básico (Ponte et al., 2007) encontramos referências ao trabalho no âmbito das sequências. Nos 1.º e 2.º anos de escolaridade o programa estabelece como objectivo específico "Elaborara sequências de números segundo uma dada lei de formação e investigar regularidades em sequências e em tabelas de números", e nos 3.º e 4.º anos "Investigar regularidades numéricas". Em qualquer dos casos estamos perante situações sempre ligadas aos números e à sua compreensão.

No 2. Ciclo, no capítulo da Álgebra, tópico das Sequências e Regularidades, aparecem três objectivos específicos que se enquadram na situação colocada por esta questão: "Determinar o termo seguinte (ou o anterior) a um dado termo e ampliar a sequência numérica, conhecida a sua lei de formação" e "Analisar as relações entre os termos de uma sequência e indicar uma lei de formação, utilizando a linguagem natural e simbólica".

Podemos, desta forma, descortinar várias parcelas de conhecimento que não temos a garantia de terem sido trabalhadas em sala de aula, se atendermos que não dizem respeito ao programa leccionado aos alunos que realizaram esta prova.

Categorização da questão

Conhecimentos Envolvidas. As diversas parcelas de conhecimento que têm que ser utilizadas na resolução da questão não estão definidas no programa em vigor para os alunos que foram sujeitos à prova, são utilizadas de forma independente e sequencialmente: primeiro têm que descortinar lei de formação dos elementos da sequência, segundo construir o 5.º elemento e, por fim, determinar o número de estrelas que o constituem.

Operações Envolvidas. Quer o raciocino indutivo quer o dedutivo estão presentes nesta resolução. Poderemos afirmar que para muitos dos alunos que se sujeitara a esta prova se tratou da primeira vez que trabalharam uma tarefa deste tipo, pelo que será uma situação inédita.

Tipo de Resposta. A resposta é fechada e os processos de resolução de idênticos.

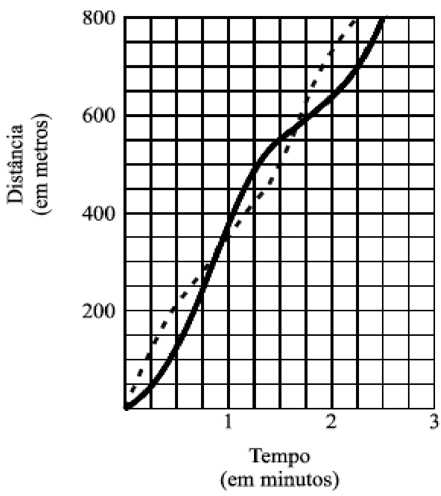
Categorização. A questão é categorizada com *Multi-estrutural*.

Questão (EM3CEB20050103)[6]

3. Dois amigos, o Carlos e o João, participaram numa corrida de 800 metros.

Logo após o sinal de partida, o João estava à frente do Carlos, mas, ao fim de algum tempo, o Carlos conseguiu ultrapassá-lo. Na parte final da corrida, o João fez um *sprint*, ultrapassou o Carlos e cortou a meta em primeiro lugar.

Os gráficos que se seguem representam a relação entre o tempo e a distância percorrida, ao longo desta corrida, por cada um deles.



3.1. Quantos metros percorreu **o João** durante o primeiro minuto e meio da corrida?

Resposta ____

3.2. Quanto tempo decorreu entre a chegada de cada um dos dois amigos à meta?
Apresenta, na tua resposta, esse tempo expresso em segundos.

Resposta ____________________________________

6 Exame Nacional de Matemática, 9.º ano de escolaridade, 3.º Ciclo do Ensino Básico, ano de 2005, Prova 23 – 1.ª Chamada, questão 3.

Critérios de Classificação (EM3CEB20050103)

3.1. .... **4**

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho do examinando:

Responde correctamente $(500$ **ou** 500 metros) 4

Responde 550 **ou** 550 metros 2

Dá outra resposta 0

3.2. .... **4**

A cotação deverá ser atribuída de acordo com os seguintes níveis de desempenho do examinando:

Responde correctamente $(15$ **ou** 15 segundos) 4

Responde $0{,}25$ minutos **ou** $\frac{1}{4}$ de minuto 3

Evidencia ler correctamente os dois tempos de chegada à meta (**por exemplo:** «Um chegou aos $2{,}5$ minutos e o outro aos $2{,}25$ minutos.» **ou** ...), mas não responde, **ou** responde incorrectamente 2

Dá outra resposta 0

Resolução proposta

A resposta correcta à questão 3.1. é 500 metros.

Na resolução deste item o aluno tem que ter em atenção a informação relevante que faz parte do enunciado, para identificar no gráfico a linha que traduz a corrida do João, localizar no eixo que indica o tempo um minuto e meio, seguir na vertical e para cima, até se cruzar com a linha relativa ao João (linha a tracejado) e fazer a leitura, no eixo que indica a distância, da ordenada que corresponde à abcissa 1,5 minutos.

A resposta à questão 3.2. é 15 segundos.

O aluno deve reconhecer a parte final da corrida como sendo a chegada à meta, estabelecer uma relação entre as abcissas dos pontos de chegada dos dois amigos e traduzir o tempo de intervalo entre as duas chegadas – um quarto de minuto – em segundos.

O programa de Matemática do ensino básico (DEB, 2001, p. 54) aponta como objectivo que o aluno deva "Interpretar e explorar gráficos que lhe sejam fornecidos" e, dada a importância da linguagem gráfica como instrumento poderoso de análise e comunicação, as sugestões metodológicas aconselham a análise e interpretação de gráficos que traduzam situações da vida real. Descrever uma corrida ou um passeio traduzido por um gráfico distância à origem/tempo, são representações que surgem ao longo do 3.º ciclo e que exigem capacidades matemáticas que envolvem conhecimentos e/ou argumentos simples que o aluno pode realizar com interesse.

Categorização da questão

Conhecimentos envolvidos. Nos dois itens é exigido o domínio de mais do que um conhecimento distinto para ler, interpretar e analisar o gráfico de duas linhas.

Operações envolvidas. As duas alíneas exigem raciocínios dedutivos semelhantes a outros já experimentados neste ciclo de aprendizagem.

Tipo de resposta. Nas duas alíneas a resposta é fechada.

Categorização. De acordo com a argumentação exposta, e para alunos do 9º ano, os dois itens são categorizados como uma questão *Multi-estrutural*.

Questão (EM1220100104)[7]

4. Na *Internet*, no dia 14 de Outubro de 2009, pelas 14 horas, colocaram-se à venda todos os bilhetes de um espectáculo. O último bilhete foi vendido cinco horas após o início da venda.

Admita que, t horas após o início da venda, o número de bilhetes vendidos, em **centenas**, é dado, aproximadamente, por

$$N(t) = 8\log_4(3t+1)^3 - 8\log_4(3t+1), \quad t \in [0, 5]$$

Resolva os dois itens seguintes, recorrendo a métodos exclusivamente analíticos.

4.1. Mostre que $N(t) = 16\log_4(3t+1)$, para qualquer $t \in [0, 5]$

4.2. Determine quanto tempo foi necessário para vender 2400 bilhetes.

Apresente o resultado em horas e minutos.

Se utilizar a calculadora em eventuais cálculos numéricos, sempre que proceder a arredondamentos, use três casas decimais, apresentando os minutos arredondados às unidades.

[7] Prova Escrita de Matemática A, 12.º Ano de Escolaridade, 1.ª Fase, ano de 2010, questão 4.

Critérios de Classificação (EM1220100104)

4.1. .... **10 pontos**

Este item pode ser resolvido por, pelo menos, dois processos:

1.º Processo:

Escrever $N(t) = 24\log_4(3t+1) - 8\log_4(3t+1)$ .... 4 pontos

Concluir que $N(t) = 16\log_4(3t+1)$ .... 6 pontos

2.º Processo:

Escrever $N(t) = 8\log_4\left(\dfrac{(3t+1)^3}{3t+1}\right)$ .... 4 pontos

Obter $N(t) = 8\log_4(3t+1)^2$ .... 2 pontos

Concluir que $N(t) = 16\log_4(3t+1)$ .... 4 pontos

4.2. .... **15 pontos**

Escrever $N(t) = 24$ (**ver nota 1**)... 3 pontos

Resolver a equação $N(t) = 24$ .... 8 pontos

Escrever $\log_4(3t+1) = \dfrac{3}{2}$ .... 2 pontos

Escrever $3t+1 = 4^{\frac{3}{2}}$ .... 4 pontos

Escrever $t = \dfrac{-1+4^{\frac{3}{2}}}{3}$ (ou equivalente) .... 2 pontos

Calcular o valor de t, em horas e minutos $(t = 2$ horas e 20 minutos$)$
(**ver notas 2 e 3**).. 4 pontos

Notas:

1. Caso o examinando escreva $N(t) = 2400$, a pontuação a atribuir, nesta etapa, deve ser desvalorizada em 2 pontos.

Resolução Proposta – 4.1

$$N(t) = 8\log_4(3t+1)^3 - 8\log_4(3t+1)$$

$$= 8\log_4(3t+1)^2$$

$$= 16\log_4(3t+1)$$

Para responder a esta questão, os alunos terão que dominar o conhecimento sobre ”Regras operatórias de exponenciais e logaritmos” do tema Introdução ao Cálculo Diferencial do Programa de Matemática do 12.º ano (ME, 2002, p. 4).

Categorização da questão

Conhecimentos Envolvidos. Nesta alínea os alunos terão que reconhecer que se trata de uma função logarítmica e dominar o conhecimento sobre regras operatórias de logaritmos.

Operações Envolvidas. São envolvidos raciocínios de carácter dedutivo, semelhantes a outros já experimentados atendendo que o conhecimento exigido está previsto no programa de Matemática do 12.º ano (tal como acima referido).

Tipo de Respostas. A resposta é fechada dentro do sistema envolvido.

Classificação. Considera-se que esta alínea 4.1 pode ser categorizada como *Uni-estrutural*.

Resolução Proposta – 4.2

2400 = 24 centenas

Equação do problema: $16\log_4(3t+1) = 24$

$$\log_4(3t+1) = \frac{3}{2}$$

$$t = \frac{\left(4^{\frac{3}{2}} - 1\right)}{3}$$

$$t = 2{,}333$$

Resposta: 2,3h = 2h e 20 minutos

Para responder a esta questão, os alunos terão que dominar os conhecimentos sobre "Utilização de funções exponenciais e logarítmicas na modelação de situações reais" e "Regras operatórias de exponenciais e logaritmos" do tema Introdução ao Cálculo Diferencial do Programa de Matemática do 12.º ano (ME, 2002, p. 4).

Categorização da questão

Conhecimentos Envolvidos. Nesta alínea os alunos terão que interpretar o problema, escrever a equação e resolver a mesma, sendo necessário o domínio dos conhecimentos sobre a utilização da função logarítmica na modelação de uma situação real e aplicação das regras operatórias de exponenciais e logaritmos.

A resolução exige que os conhecimentos estejam articulados, mas não relacionados entre si.

Operações Envolvidas. São envolvidos raciocínios de carácter dedutivo, semelhantes a outros já experimentados pois os conhecimentos exigidos estão previstos no programa de Matemática do 12.º ano (tal como acima referido).

Tipo de Respostas. A resposta é fechada dentro do sistema envolvido.

Categorização. Considera-se que esta a alínea 4.2 pode ser categorizada como *Multi-estrutural*.

Conclusão

Na análise destas questões de álgebra verificámos que na generalidade as respostas exigem a utilização de mais do que um conhecimento matemático: apenas uma das questões do Exame do 12.º ano de escolaridade necessita de um único conhecimento.

Todas as questões que apresentámos envolvem raciocínios de carácter dedutivo, com procedimentos que já foram experimentados em sala de aula de acordo com o que está prescrito nos respectivos programas de Matemática.

Notámos, também, que apenas a questão da Prova de Aferição do 1.º Ciclo requereu que na sua solução fossem relacionados conhecimentos matemáticos: a necessidade de interpretar os resultados da operação realizada com o contexto gerado pela questão.

Parece ficar patente que o modelo se pode utilizar nos diversos níveis de ensino e que pode fornecer dados relevantes para a análise da qualidade dos exames.

Referências

Barreto, A., & Preto, C. V. (1996). Indicadores da evolução social. In A. Barreto, C. V. Preto, J. Ferrão, M. J. V. Rosa, M. F. Mónica, J. S. Lopes, H. M. Carreira & H. N. Rodrigues (Eds.), *A situação Social em Portugal 19960 – 1995* (pp. 61-162). Lisboa: Instituto de Ciências Sociais da Universidade de Lisboa.

Biggs, J. B. (1992). Modes of learning, forms of knowing, and ways of schooling. In A. Demetriou, M. Shayer & A. Efklides (Eds.), *Neo-Piagetian Theories of Cognitive Development* (pp. 31-51). London: Routledge.

Biggs, J. B., & Collis, K. F. (1982). *Evaluating the quality of learning*. London: Academic Press, Inc.

Boavida, A. M., Domingos, A., Matos, J. M., & Junqueira, M. (Eds.). (1997). *Aprendizagens Matemáticas*. Lisboa: Secção de Educação e Matemática - Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Ceia, M. (2002). A Taxonomia SOLO e os níveis de van Hiele. Comunicação apresentada no *XI Encontro de Investigação em Educação Matemática*, Coimbra.

Ceia, M., & Duarte, J. (2002). Os exames e a taxonomia SOLO. Comunicação apresentada no *XXI Seminário de Investigação em Educação Matemática*, Aveiro.

Collis, K. F. (1992). Curriculum and assessment: A basic cognitive model. In G. C. Leder (Ed.), *Assessment and Learning of Mathematics* (pp. 24-45). Victoria: Australia: The Australian Council for Educational Research Ltd.

Departamento da Educação Básica (Ed.) (2004). *Organização Curricular e Programas: Ensino Básico – 1.º Ciclo*. Lisboa: Editorial do Ministério da Educação.

Direcção Geral dos Ensinos Básico e Secundário (Ed.) (1991). *Programa de Matemática: Plano de Organização Curricular do Ensino – Aprendizagem, 2.º Ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: Imprensa Nacional – Casa da Moeda.

Direcção Geral dos Ensinos Básico e Secundário (Ed.) (1991). *Programa de Matemática: Plano de Organização Curricular do Ensino – Aprendizagem, 3.º Ciclo do Ensino Básico*. Lisboa: Imprensa Nacional – Casa da Moeda.

Kulm, G. (Ed.) (1990). *Assessing higher order thinking in mathematics*. American Association for the Advancement of Science Press.

Menezes, L., Santos, L., Gomes, H. & Rodrigues, C. (2008). *Avaliação em Matemática: Problemas e Desafios*. Viseu: Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação.

Pegg, J., & Tall, D. (2010). The fundamental cycle of concept construction underlying various theoretical frameworks. In B. Sriraman & L. English (Eds.), *Theories of Mathematics Education: Seeking New Frontiers* (pp. 173 – 192). New York: Springer-Verlag.

Ponte, J. P., Serrazina, L., Guimarães, H. M., Breda, A., Guimarães, F., Sousa, H., Menezes, L., Martins, M. E. G., & Oliveira, P. A. (2007). *Programa de Matemática do Ensino Básico*. Lisboa: Direcção-Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular - Ministério da Educação.

Romberg, T. A., Zarinnia, E. A., & Collis, K. F. (1990). A new world view of assessment in mathematics. In G. Kulm (Ed.), *Assessing Higher Order Thinking in Mathematics*. Washington, DC: American Association for the Advancement of Science.

Silva, J. C., Fonseca, M. G., Martins, A. A., Fonseca, C. M. C., & Lopes, I. M. C. (2002). *Matemática A: 12.º ano.* Lisboa: Departamento do Ensino Secundário – Ministério da Educação.