ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA 2011
Póvoa do Varzim

Investigação sobre o ensino da Álgebra: Uma reflexão sobre estudos realizados na Universidade de Lisboa (2006-11)

João Pedro da Ponte
Hélia Oliveira

Instituto de Educação
UNIVERSIDADE DE LISBOA

Pensamento algébrico
(James Kaput, 2008)

Aspectos nucleares da Álgebra

- Simbolização sistemática de generalizações de regularidades e condições (*systematically symbolizing generalizations of regularities and constraints*);
- Pensamento guiado sintacticamente e acções em generalizações expressas através de sistemas simbólicos convencionais (*syntactically guided reasoning and actions on generalizations expressed in conventional symbol systems*).

Ramos do pensamento algébrico *(algebraic reasoning)*

- Estudo de estruturas e sistemas abstraídos do cálculo e de relações, incluindo aqueles que surgem da Aritmética (aritmética generalizada) e do raciocínio quantitativo;
- Estudo de funções, relações e co-variação (*joint variation*);
- Aplicação de um conjunto de linguagens de modelação tanto dentro como fora da Matemática.

Sentido de símbolo
(Abraham Arcavi, 1994, 2006)

- Sensibilidade perante o símbolo para tomar decisões sobre a sua utilidade, provar relações e aceitar ou rejeitar conjecturas.
- Ser capaz de sentir o problema a partir da inspecção dos símbolos e da comparação dos significados com os resultados da manipulação.
- Não perder uma visão global do que está a trabalhar e seja flexível, evitando cair em situações de circularidade ou em manipulações destituídas de significado.
- Habilidade de criar e manipular uma expressão simbólica para um determinado objectivo.
- Escolher a representação simbólica adequada a um determinado problema.
- Ter em atenção o ganho de significados mais ricos que podem emergir de expressões equivalentes derivadas de manipulação simbólica.

Representações activas, icónicas e simbólicas (Jerome Bruner, 1999)

O que queremos dizer com representação? O que significa traduzir a experiência num modelo do mundo? A minha sugestão é que os seres humanos têm provavelmente três maneiras diferentes de realizarem esta proeza. A primeira é através da acção. Conhecemos muitas coisas para as quais não há imagética nem palavras e é muito difícil ensiná-la através de palavras, diagramas ou imagens (…) Há um segundo sistema de representação que depende da organização visual ou outra organização sensória e do recurso a imagens de resumo (…) A primeira forma de representação veio a ser designada como *activa* e a segunda como *icónica* (…). Por fim, há a representação por palavras ou linguagem. O seu traço distintivo é ser *simbólica* por natureza (…) (pp. 27-29)

Representações

Goldin (2008)

- Representações internas e externas
- Sistemas de representação

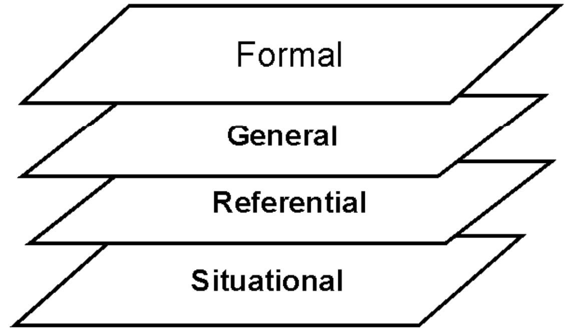
Duval (2006)

- Conversões e Tratamentos – "If treatment is the more important from a mathematical point of view, conversion is basically the deciding factor for learning".

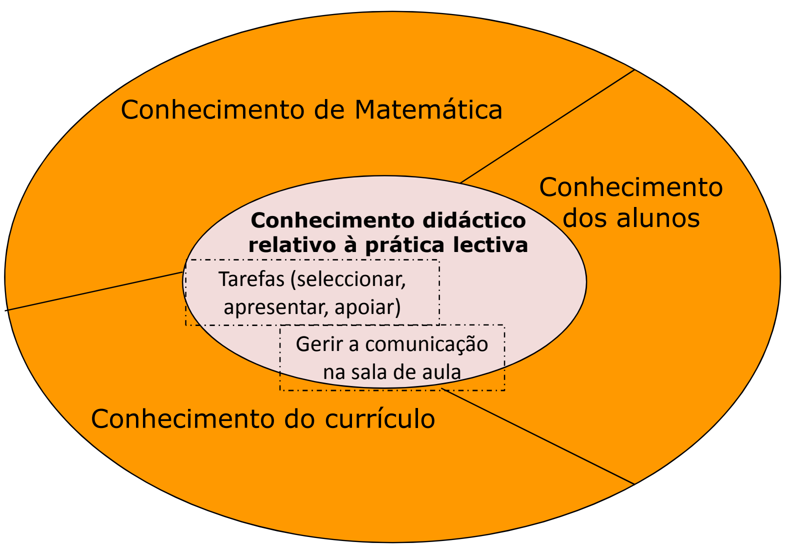
Damásio (1995)

- Imagens - o facto de um organismo possuir uma mente significa que ele forma representações neurais que se podem tornar em imagens que são manipuladas num processo chamado pensamento (p. 105).

Níveis de actividade/Modelos (Gravemeijer, 2005)



Conhecimento profissional do professor (Ponte e Oliveira, 2001)



Mudança curricular em Matemática

Os alunos aprendem a partir da sua experiência matemática e da reflexão sobre a sua experiência

Ensino directo

Tarefas
- Tarefa padrão: Exercício,
- As situações são artificiais,
- Para cada problema existe uma estratégia e uma resposta certa.

Papéis
- Os alunos recebem "explicações",
- O professor mostra "exemplos" para eles aprenderem a "fazer as coisas",
- O professor e o manual são as autoridades na sala de aula.

Comunicação
- O professor coloca questões e fornece feedback imediato (sequência I-R-F),
- Os alunos põem "dúvidas".

Aprendizagem exploratória

Tarefas
- Variedade: Explorações, Investigações, Problemas, Projectos, Exercícios…
- As situações são realísticas,
- Existem várias estratégias para lidar com um problema.

Papéis
- Os alunos recebem tarefas e têm de descobrir estratégias para as resolver,
- O professor pede ao aluno para explicar e justificar o seu raciocínio,
- O aluno é também uma autoridade.

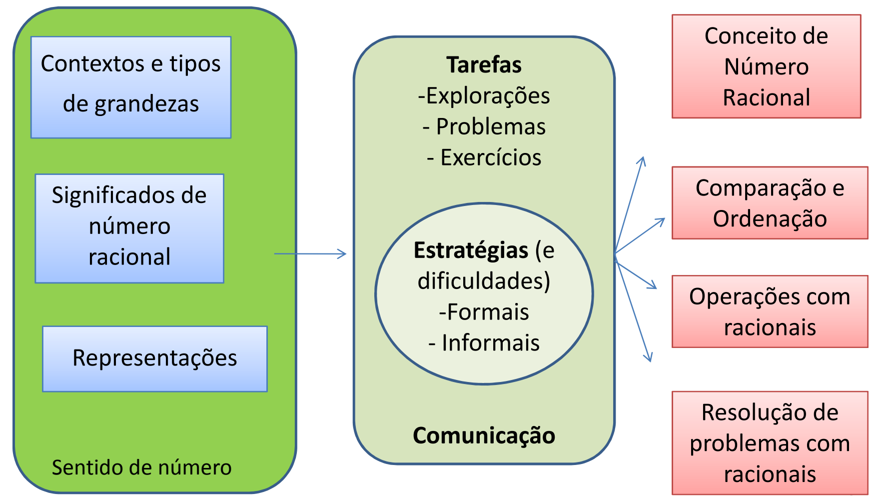
Comunicação
- Os alunos são encorajados a discutir com os colegas (em grupos ou pares),
- No fim de um trabalho significativo, fazem-se discussões com toda a turma,
- Os significados são negociados na sala de aula.

Estudos sobre o pensamento algébrico na Universidade de Lisboa

1.º e 2.º ciclos		3.º ciclo/secundário/superior	
-	-	Estudos sobre o Ensino-aprendizagem	Raposo (2009) Almeida (2009)
Experiências de ensino/formação			
Comparação e ordenação de racionais	Quaresma (2010)	Iniciação ao pensamento algébrico	Pesquita (2007) Matos (2008) Branco (2008)
Proporcionalidade directa	Silvestre (2006) Costa (2007) Rocha (2007)	Desenvolvimento do pensamento algébrico	Bandarra (2006) Candeias (2010) Nabais (2010)
Sequências	Santos (2008) Cunha (2010)	Desenvolvimento do raciocínio e aprend. da Análise Numérica	Henriques (2011)
-	-	Desenvolvimento raciocínio/pensamento algébrico/modelação	Azevedo (2009) Oliveira (2010) Silva (2009)

Ensino-aprendizagem dos números racionais

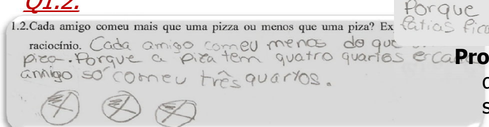
Quaresma, 2011



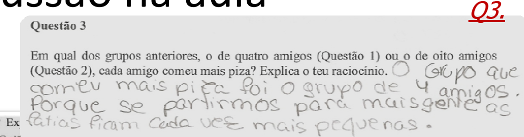
Quaresma, 2011

Discussão na aula

Q1.2.



Q3.



Professora: Cada amigo comeu mais que uma piza ou menos que uma piza?

Turma: Menos.

Professora: Menos, porquê Leonor?

Leonor: Porque eles comeram só 3/4 e uma piza inteira tem 4/4.

André: Oh professora e não é só isso, vê-se logo porque se há 3 pizas eles são 4 não dá para comerem mais do que uma unidade.

Professora: Qual a diferença entre aquilo que cada um come no primeiro caso e no segundo caso? O que é que se alterou?

Amélia: Foi que ficou partido em mais partes.

Professora: E o que é que aconteceu a cada parte?

Alunos: Ficou mais pequenino. Ficou a metade.

Leonor: Pois é 3/8 é metade de 3/4!

Professora: Quer dizer que cada um passou a comer que parte daquilo que comiam no primeiro caso?

Alunos: A metade.

Professora: Pois porque nós duplicámos o número de amigos, logo cada um teve de partilhar cada fatia com outro.

Quaresma, 2011

Aprendizagens dos alunos na unidade

Representações

- O trabalho com as múltiplas representações ajudou os alunos a desenvolverem a sua capacidade de converter informação de uma representação para outra;
- A valorização da representação pictórica revelou-se importante para que os alunos desenvolvessem as suas estratégias informais;
- O trabalho das fracções em estreita ligação com o numerais decimais e com as percentagens revelou-se importante para a compreensão desta representação.

Natureza das tarefas

- As tarefas de natureza exploratória permitiram aos alunos desenvolverem novos conceitos e uma compreensão mais aprofundada das diferentes representações;
- Os problemas ajudaram os alunos a compreender melhor o modo de usar os conceitos relativos aos números racionais numa diversidade de situações;
- Os exercícios frequentes ajudaram à consolidação de conceitos e ao domínio das diferentes representações.

Silvestre, 2006, 2009-2011

Raciocínio proporcional

(i) distinguir relações de proporcionalidade directa daquelas que o não são;
(ii) compreender a natureza multiplicativa da relação de proporcionalidade directa;
(iii) resolver vários tipos de problemas, revelando flexibilidade para usar diferentes abordagens, sem ser afectado pelos dados numéricos, contexto e representação.

Perspectivas teóricas
- Tipos de problemas;
- A relação de proporcionalidade directa
- Grandezas extensivas e intensivas;
- Caracterização das estratégias dos alunos e suas dificuldades

Perspectivas curriculares
- Programa de Matemática (2007)
- Natureza das tarefas
- Modo de trabalho na aula
- Utilização de tecnologias
- Desenvolvimento do pensamento algébrico

Unidade de ensino (6.º ano)
- 5 tarefas em contexto
  - 1 investigação
  - 1 exploração
  - problemas
- Uso da folha de cálculo
- Trabalho de grupo+discussão colectiva
- Teste diagnóstico
- Teste de avaliação
- 9 blocos (90 min.)

Silvestre, 2006

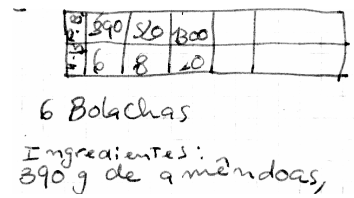
Proporcionalidade - estratégias

O papel das representações

Professora: As tabelas são a melhor forma para organizar os dados?

Margarida: Sim. (Sorri) Vê-se logo tudo, todos os números nos devidos lugares.

Professora: E preferes organizar os dados numa tabela vertical ou numa tabela horizontal?



Margarida: Na… Na vertical.

Professora: E porquê?

Margarida: Porque percebo melhor. Porque é melhor pra mim… Porque como "tou" habituada, como começamos a fazer no Excel e fazíamos na vertical e era fácil para ver. Na horizontal "nã"…

Professora: Qual é a tua dificuldade em usar a tabela na horizontal?

Margarida: (Franze a testa e pisca os olhos) Ah… Eu, eu não entendo bem…

Silvestre, 2009, 2010, 2011

Conclusões

- Os alunos resolvem alguns problemas de valor omisso antes da experiência de ensino.
- Antes da experiência de ensino os alunos revelam uma tendência para usar as estratégias de *composição/ /decomposição* (aditivas/multiplicativas)
- Com a experiência de ensino os alunos desenvolveram estratégias multiplicativas escalares e funcionais.
- No caso de alguns alunos, a escolha da estratégia depende do conhecimento que detêm sobre os números envolvidos.
- A experiência de ensino parece ter contribuído para os alunos desenvolverem a capacidade de resolver problemas, em particular a organização da informação.
- Os alunos também parecem terem desenvolvido a capacidade de comunicação escrita.

Santos (2008)

Generalização

(i) Reconhecer, descrever e continuar uma sequência pictórica ou numérica;
(ii) Prever termos distantes;
(iii) Formular generalizações próximas e distantes;
(iv) Identificar uma relação entre o termo e a respectiva ordem;
(v) Expressão da relação funcional através de uma linguagem progressivamente mais formal.

Perspectivas teóricas
- Os padrões potenciadores dos processos de generalização
- Caracterização das estratégias de generalização
- Generalização como meio e como finalidade
- Generalização entre padrões

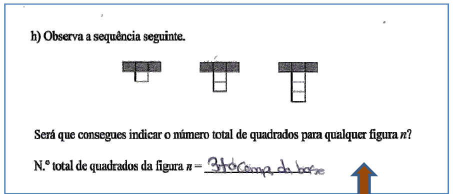
Perspectivas curriculares
- Programa de Matemática (2007)
- Natureza e sequência das tarefas
- Modo de trabalho na aula
- Desenvolvimento do pensamento algébrico

Unidade de ensino (5.º ano)
- 5 tarefas de exploração/investigação
- Trabalho a pares/grupo e discussão colectiva
- 9 blocos (dispersos ao longo de todo o ano lectivo)
- 1 Tarefa de diagnóstico

Santos, 2008

Generalização – como meio e finalidade

O papel das representações icónicas e da sequência de tarefas


h) Observa a sequência seguinte.

Será que consegues indicar o número total de quadrados para qualquer figura n?

N.º total de quadrados da figura n = 3+o comp. da base

Propriedades variantes e invariantes do padrão

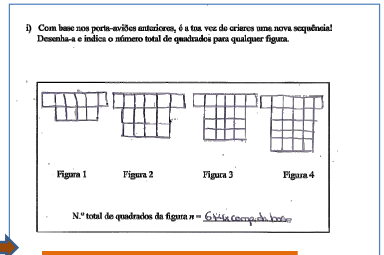

i) Com base nos porta-aviões anteriores, é a tua vez de criares uma nova sequência! Desenha-a e indica o número total de quadrados para qualquer figura.

Figura 1 Figura 2 Figura 3 Figura 4

N.º total de quadrados da figura n = 6+4x comp. da base

Generalização expansiva

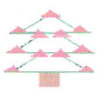
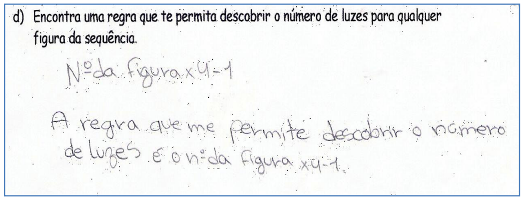


Figura 3


d) Encontra uma regra que te permita descobrir o número de luzes para qualquer figura da sequência.

Nºda figura x 4-1

A regra que me permite descobrir o número de luzes é o nº da figura x4-1.

Generalização reconstrutiva

Santos, 2008

Conclusão

- Importância da descrição oral e escrita do padrão;
- Variedade de estratégias decorrente da exploração de sequências pictóricas;
- Evolução de estratégias recursivas para funcionais;
- Desenvolvimento de processos de generalização;
- Utilização de escrita abreviada e de linguagem sincopada;
- Dificuldade em exprimirem raciocínios e pouca sensibilidade para o teste de conjecturas.

Branco (2008)

Pensamento algébrico

(i) Desenvolver a capacidade de analisar padrões e regularidades, descrever relações e representá-las simbolicamente;
(ii) Promover a compreensão do conceito de variável e do significado dos símbolos, através do estudo de padrões e regularidades;
(iii) Compreender o significado das expressões algébricas e dar significado ao trabalho com expressões algébricas com base na análise de expressões equivalentes;
(iv) Promover a utilização da linguagem algébrica, em particular nas equações, na resolução de problemas.

Perspectivas teóricas
- Introdução da linguagem algébrica através das sequências
- Resolução aritmética de problemas com equações; equações como ferramenta de resolução de problemas

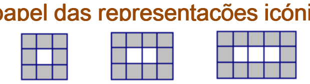
Unidade de ensino (7.º ano)
- 10 tarefas
  - exploração/investigação
  - problemas
  - exercícios
- Trabalho a pares+discussão colectiva
- Teste de avaliação
- 35 aulas (2x90+45 min.)

Perspectivas curriculares
- Programa de Matemática (2007)
- Natureza das tarefas
- Modo de trabalho na aula
- Desenvolvimento do pensamento algébrico

Branco, 2008

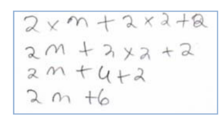
Pensamento algébrico –equivalência de expressões algébricas

O papel das representações icónicas



$n+3$ $\quad$ $2(n+2)+2$

$2n+6$ $\quad$ $3n+2$


$2\times m+2\times 2+2$
$2m+2\times 2+2$
$2m+4+2$
$2m+6$

Susana – É igual a esta [2(*n* + 2) + 2]. (…) Esta é uma expressão equivalente a esta.

Professora – Então justifica-me aqui, porque é que esta funciona, dois *n* mais seis. (…)
Susana – Os seis quadrados cinzentos? Estão aqui. [Aponta para as duas colunas de quadrados cinzentos, cada uma com três quadrados]
Professora – E esse dois *n o que é que representa? (…)*
Susana – É duas vezes o número da figura. Está dois… É o dois do número da figura e é o dois do número da figura. É o três do número da figura e o três do número da figura. [Aponta para os restantes quadrados cinzentos que estão na horizontal, na primeira e na última filas, tanto na figura 2 como na figura 3] (…) Então esta dá. Logo, esta que é equivalente, dá.

Branco, 2008

Conclusão

1. A unidade de ensino proporcionou o desenvolvimento de diversos aspectos do **pensamento algébrico:**

- Generalização de padrões
- Compreensão da variável como número generalizado e como incógnita
- Compreensão de expressões
- *Sentido do símbolo*
- Compreensão de equações
- Estratégias de resolução de problemas

2. Os alunos mostram apesar disso dificuldades na compreensão de alguns aspectos da linguagem algébrica e do seu uso na resolução de problemas

3. O estudo de padrões e regularidades promove a compreensão de diversos aspectos da linguagem algébrica, como das variáveis e expressões

4. É necessário consolidar as aprendizagens já realizadas e de promover uma compreensão mais profunda dos diferentes conhecimentos algébricos

Oliveira, 2010

Modelação no ens. secundário

	Tarefa 1: *O concerto dos Arctic Monkeys*	Tarefa 2: *Entregas ao domicílio*
Competência matemática	Mobilização de conhecimentos matemáticos adequados para dar respostas próprias face a problemas realistas (2º ano curso profissional)	
Objectivos específicos	▪ Estabelecer relações utilizando simultaneamente o estudo gráfico, numérico e analítico ▪ Construir e interpretar modelos para situações reais utilizando diversos tipos de funções ▪ Utilizar linguagem matemática adequada na elaboração, análise e justificação de conjecturas ou na comunicação de conclusões	
Recursos	Calculadora gráfica; computador; informações adicionais relativas ao contexto das tarefas	Calculadora gráfica; informações adicionais relativas ao contexto das tarefas
Caract. Tarefas	Modelação de situações contextualizadas na actividade profissional, exigindo respostas escritas em forma de "carta"	
Modo de trabalho	Pequeno grupo (3 ou 4 elementos) e grande grupo (turma)	
N.º blocos de 90 minutos	2	2

Modelação – Representação gráfica

Oliveira, 2010

O papel do contexto do problema

$y = 0{,}637x + 2$

Professora: O que é te faz confusão com essa função? (…)

Andreia: É que ele está a pensar na inversa. É isso é que lhe está a fazer confusão.

Professora: Inversa como?

Andreia: (vira-se para Rodrigo) Não é? Tu estavas a pensar que quanto maior fosse o número de quilómetros menor era o custo.

José: Quanto maior é o número de quilómetros menor é o custo.

Andreia: Tens uma empresa que faz uma coisa de Loures para Santarém e de Loures para o Porto. Para o Porto fica mais barato do que para Santarém? (…)

José: Tens que cobrar mais aos que estão mais perto.

Andreia: O custo por quilómetro diz tudo… logo tem de ser aquele custo por *x* quilómetros. Se aumenta os quilómetros, aumenta o custo. Por isso, nunca pode ser de outra maneira.

Sugestão do aluno: Introduzir na CG $\dfrac{0.637x + 2}{x}$

Os valores adequados introduzidos para a janela de visualização partem de uma análise dos dados, do contexto do problema e do sentido atribuído à expressão da função.

Oliveira, 2010

Conclusões

• Os modelos gerados consistem em metáforas baseadas em experiências pessoais, representações gráficas e correspondentes expressões algébricas.

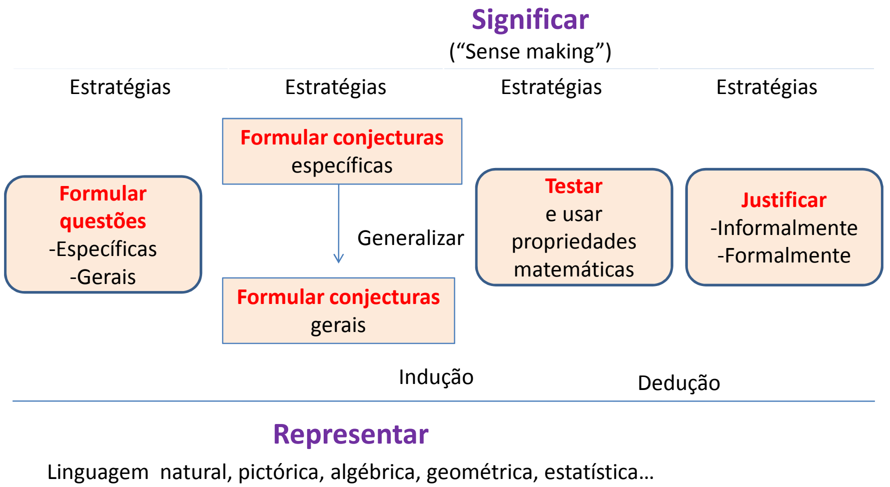
• Através da tentativa e erro e com base nos seus conhecimentos sobre a função afim, a função racional e sobre algumas propriedades das funções como o domínio ou o contradomínio, os alunos procuram uma representação gráfica que traduza a situação apresentada de acordo com a compreensão do problema e o seu conhecimento extra-matemático.

• Os conhecimentos matemáticos de alguns alunos, nomeadamente no que diz respeito à noção de variável e ao conceito de função, revelaram-se pouco consistentes, o que se traduziu na dificuldade de identificar as variáveis do problema e no estabelecimento de uma relação funcional entre elas.

• A calculadora gráfica permitiu experimentar, formular e testar as suas conjectures, foi utilizada com alguma reflexão sobre os conceitos matemáticos envolvidos e permitiu que desenvolvessem o seu conhecimento matemático e a sua capacidade para criar e modificar modelos matemáticos

Raciocínio matemático

(Azevedo, 2009; Henriques, 2011; Pereira e Ponte, EIEM)



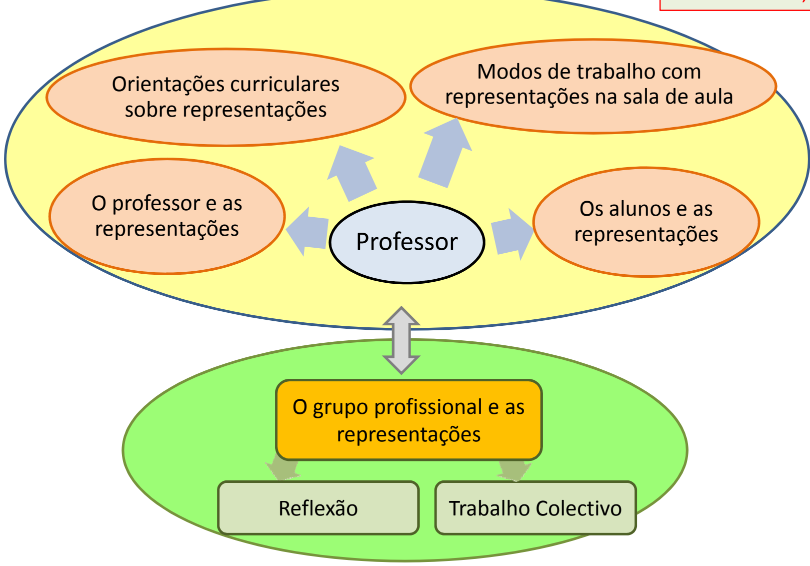
Um quadro de referência para a análise do sentido de símbolo

Grossman e Ponte, EIEM

Expressões Algébricas	Estar familiarizado com os símbolos e o seu significado
	Traduzir para linguagem simbólica a linguagem corrente.
	Passar de uma estrutura concreta para uma mais abstracta (sentido do número para sentido de símbolo).
	Criar uma expressão simbólica para um determinado objectivo.
Equações	Sentir o problema a partir da inspecção dos símbolos.
	Manipular simbolicamente utilizando os procedimentos adequados.
	Manter uma visão global do que se está a trabalhar evitando cair em manipulações destituídas de significado.
	Identificar equações equivalentes procurando novos aspectos dos significados originais.
	Compreender os diferentes papéis que os símbolos podem desempenhar.
Problemas	**Decidir se é útil recorrer ao símbolo.**
	Criar uma expressão simbólica que traduza a situação.
	Manipular simbolicamente mantendo uma visão global do significado do símbolo durante a aplicação de um procedimento e a resolução do problema.
	Interpretar o símbolo no contexto do problema.
	Utilizar os símbolos para aceitar ou rejeitar conjecturas.
	Generalizar.
Funções	Utilizar o símbolo para estabelecer relações quantitativas.
	Escolher a representação simbólica adequada.
	Analisar o efeito da mudança e da variação dos símbolos.
	Utilizar o símbolo para modelar situações.
	Compreender que os símbolos podem desempenhar papéis distintos em contextos diferentes.
	Utilizar o poder dos símbolos para tomar decisões.
	Compreender e utilizar diferentes representações do mesmo objecto matemático.

O professor e as representações

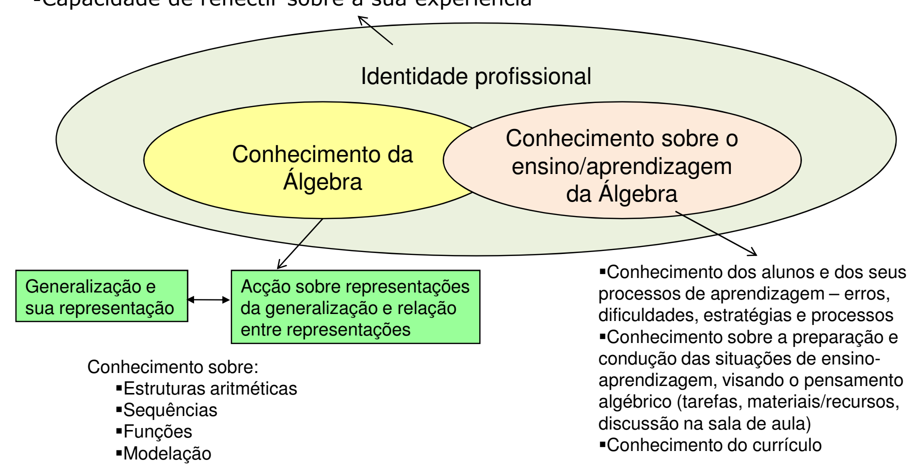
Ponte e Velez, EIEM



Formação inicial em Álgebra de futuros educadores e professores dos 1.º e 2.º ciclos

- Ideia sobre o ensino da Álgebra num nível de escolaridade
- Ideia sobre o professor/educador que quer ser
- Entendimento sobre o próprio desenvolvimento
- Capacidade de reflectir sobre a sua experiência

Branco e Ponte, EIEM



Vertentes fundamentais do pensamento algébrico

(Ponte, Branco e Matos, 2009)

Representar

- Ler, compreender, escrever e operar com símbolos usando as convenções algébricas usuais;
- Traduzir informação representada simbolicamente para outra forma de representação (por objectos, verbal, numérica, tabelas, gráficos) e vice-versa;
- Evidenciar sentido de símbolo, nomeadamente interpretando os diferentes sentidos do mesmo símbolo em diferentes contextos.

Raciocinar

- Relacionar (em particular, analisar propriedades);
- Fazer inferências
  - em particular, generalizar e agir sobre essas generalizações revelando compreensão das regras;
  - deduzir.

Resolver problemas e modelar situações

- Usar expressões algébricas, equações, inequações, sistemas (de equações e de inequações), funções e gráficos na interpretação e resolução de problemas matemáticos e de outros domínios (modelação).

Referências

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 14(3),* 24-35.

Arcavi, A. (2006). El desarrollo y el uso del sentido de los símbolos. In I. Vale, T. Pimentel, A. Barbosa, L. Fonseca, L. Santos & A. P. Canavarro (Eds.), *Números e Álgebra na aprendizagem da Matemática e na formação de professores* (pp. 29-48). Lisboa: SEM-SPCE.

Azevedo, A. B. (2009). *O desenvolvimento do raciocínio matemático na aprendizagem das funções: Uma experiência com alunos do ensino secundário* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Branco, N. (2008). *O estudo de padrões e regularidades no desenvolvimento do pensamento algébrico* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Bruner, J. (1999). *Para uma teoria da educação*. Lisboa: Relógio d'Água.

Damásio, A. R. (1995). *O erro de Descartes: Emoção, razão e cérebro humano.* Mem Martins: Europa-América.

Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 61,* 103-131.

Goldin, G. A. (2008). Perspectives on representation in mathematics learning and problem solving. In L. D. English (Ed.), *Handbook of international research in mathematics education* (pp. 176-201). New York, NY: Routledge.

Gravemeijer, K. P. E. (2005). What makes mathematics so difficult, and what can we do about it? In L. Santos, A. P. Canavarro & J. Brocardo (Eds.), *Educação matemática: Caminhos e encruzilhadas* (pp. 83-101). Lisboa: APM.

Referências

Henriques, A. C. (2011). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da Análise Numérica num contexto de actividades de investigação* (Tese de doutoramento, Universidade de Lisboa).

Kaput, J. J. (2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). New York, NY: Routledge.

Oliveira, C. (2010). *Modelação e Funções: uma experiência no Ensino Profissional* (Tese de Mestrado, Universidade de Lisboa).

Ponte, J. P., Branco, N., & Matos, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa: Ministério da Educação, Direcção Geral de Inovação e de Desenvolvimento Curricular.

Ponte, J. P., & Oliveira, H. (2002). Remar contra a maré: A construção do conhecimento e da identidade profissional na formação inicial. *Revista de Educação, 11*(2), 145-163.

Quaresma, M. (2010). *Ordenação e comparação de números racionais em diferentes representações: uma experiência de ensino* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Santos, M. (2008). A generalização nos padrões: Um estudo no 5.º ano de escolaridade (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).

Silva, A. I. S. (2006). *Investigações e novas tecnologias no ensino da proporcionalidade directa: Uma experiência no 2.º ciclo* (Tese de mestrado, Universidade de Lisboa).