Elementos de Matemática I

Manuel Delgado
e
Elisa Mirra

U. PORTO

FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Versão de 27 de Setembro de 2007

Conteúdo

Introdução

Estas notas destinam-se a servir de apoio às aulas teóricas da disciplina de Matemática I (M191) a ser leccionada no primeiro semestre do ano lectivo de 2007/08. Trata-se de uma disciplina do 1º ano dos cursos de Ciências de Engenharia, Ciência de Computadores e de Engenharia de Redes e Sistemas Informáticos. As notas são, em parte, uma reedição de um texto escrito com o objectivo de, no ano lectivo de 2003/04 servir de apoio às aulas de Elementos de Matemática I dos cursos de Bioquímica, Ciências e Tecnologia do Ambiente, Ensino da Física e da Química e ainda do curso de Química.

Ao escrever e tornar público este texto pretendemos apenas fornecer a cada aluno mais um instrumento de trabalho. Fizemo-lo na convicção de que um texto que siga de perto o programa o pode ajudar, por isso permitimo-nos desde já fazer as seguintes advertências: este texto não pode ser encarado como um substituto das aulas, onde de uma forma geral a matéria é apresentada acompanhada de outros detalhes e exemplos; este texto não substitui consultas de livros na biblioteca

Agradecemos a compreensão dos alunos para as prováveis gralhas. Durante o ano lectivo a que estas notas se destinam, procuraremos manter em

http://www.fc.up.pt/cmup/mdelgado/ensino/MatI-0708/

uma lista das gralhas de que formos dando conta, bem como a respectiva correcção.

A esta disciplina, não fosse uma pequena parte final em que são abordados alguns conceitos básicos de Álgebra Linear, poderia ser dado o nome de *Cálculo* já que o que nela se estuda são basicamente os conceitos de *derivada* e *integral* de funções reais de variável real. Ambos os conceitos dependem da noção de *limite*, com a qual já se espera alguma familiaridade da parte dos alunos. Esta noção, bem como a noção de *continuidade*, será recordada num capítulo de preliminares.

Embora nestas notas não seja dedicada especificamente nenhuma secção a exercícios, não podemos deixar de chamar a atenção dos alunos para o facto de não haver nenhum meio conhecido de aprender Matemática que não envolva a resolução (não dissemos “ver a resolução”) de muitos exercícios. Para esse efeito são disponibilizadas separadamente folhas de exercícios, alguns dos quais serão resolvidos nas aulas práticas ou teórico-práticas.

Os resultados (lemas, proposições, teoremas, etc.), exemplos e exercícios apresentados no texto são numerados. Por exemplo, "Proposição 3.5.2" indicaria o segundo item numerado da quinta secção do terceiro capítulo. Alguns dos exemplos só não são chamados de exercícios por ser dada uma resolução logo a seguir. Com a excepção de uma ou outra que julguemos ser conveniente destacar de outro modo, as definições são dadas no texto, sendo apenas usado outro tipo de letra (em geral o tipo *itálico*) para chamar a atenção do que está a ser definido.

Procuraremos que o texto seja facilmente legível, apresentando por isso poucas demonstrações. Estas podem ser encontradas nas nossas referências.

As notas estão divididas em duas partes: Cálculo e Álgebra Linear. Elas seguem o programa previsto para a disciplina: começam por recordar alguns conceitos, em geral já bem conhecidos dos alunos, num capítulo de preliminares a que atribuimos o número 0. Entre eles destacam-se os conceitos de limite e continuidade de funções reais de variável real.

O primeiro capítulo é dedicado às derivadas das funções reais de variável real. Este tema, embora também já conhecido dos alunos, deverá ser tratado com um pouco mais de profundidade. Aplicações das derivadas, com destaque para o esboço de gráficos de funções, são tratadas no segundo capítulo.

As novidades só começam verdadeiramente no terceiro capítulo, o qual é dedicado à integração. Depois de tornada evidente a importância do cálculo das primitivas com o teorema fundamental do cálculo, é dedicado um capítulo ao estudo de técnicas de primitivação e um outro às aplicações dos integrais.

O sexto capítulo é dedicado às sucessões e séries numéricas.

O sétimo capítulo é dedicado às séries de potências, com destaque para as séries de Taylor, que permitem calcular aproximações de funções por polinómios.

O oitavo capítulo, o único destas notas dedicado à Álgebra Linear, trata de sistemas de equações lineares e matrizes. São neste capítulo introduzidos os determinantes de ordens 2 e 3.

As notas incluem no final um índice de notações e um índice alfabético que se espera possam facilitar a consulta das mesmas.

O texto aqui apresentado foi influenciado por todas as nossas referências (ver página 119), com particular destaque para os livros de Adams [1] e de Swokowski [5], pois foram seguidos mais de perto em grande parte dos capítulos. No entanto, a generalidade dos resultados não demonstrados podem encontrar-se em qualquer dessas referências.

Parte I

Cálculo

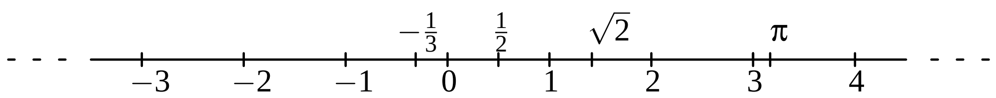
Capítulo 0

Preliminares

Este capítulo destina-se a recordar alguns conceitos, quase todos bem conhecidos. Servirá também para fixar alguma notação. O principal conceito a recordar é o de função. É dado depois especial destaque às funções trigonométricas, sendo ainda introduzidas as funções trigonométricas inversas. Recordamos ainda neste capítulo os extremamente importantes conceitos de limite e continuidade de funções reais de variável real.

0.1 Números reais

Ao longo destas notas vamos interessar-nos sobretudo pelo conjunto $\mathbb{R}$ dos números reais e seus subconjuntos. Lembramos que há uma correspondência biunívoca entre $\mathbb{R}$ e o conjunto dos pontos de uma recta:



Os subconjuntos de $\mathbb{R}$ que vamos quase sempre considerar são intervalos ou uniões finitas de intervalos.

Exemplo 0.1.1 *(i)* $]-3,7] = \{x \in \mathbb{R} : -3 < x \leq 7\}$ *é um* intervalo*, sendo* -3 *e* 7 *os seus extremos.*

(ii) $]-1,2] \cup]3,7[\cup [12,13]$ *é uma reunião de três intervalos (o primeiro semifechado à direita, o segundo aberto e o terceiro fechado).*

Questão 0.1.2 *O conjunto* $[1,2[\cup]2,5]$ *é um intervalo?*

Supomos serem bem conhecidas dos alunos as propriedades dos números reais. Há no entanto uma que, embora de uso menos frequente, convém recordar para que a possamos usar livremente no que se segue. Lembramos que o *supremo* de um conjunto de números reais é o menor dos seus majorantes. Com esta terminologia, a propriedade que diz que *todo o conjunto não vazio e majorado de números reais tem supremo em* $\mathbb{R}$ é habitualmente conhecida por *completude dos números reais*.

Exercício 0.1.3 *Indique os supremos dos conjuntos* $[0,3[$ *e* $]1,2]\cup\{7\}$.

0.2 Funções

Muito do nosso trabalho vai consistir no estudo de *funções*. Para indicar uma função f do conjunto A no conjunto B que a um elemento $x\in A$ associa um elemento $f(x)\in B$ usa-se habitualmente a notação seguinte:

$$\begin{array}{rccc} f: & A & \longrightarrow & B \\ & x & \longmapsto & f(x) \end{array}$$

O conjunto A diz-se o *domínio* de f. Os seus elementos são denominados *objectos*. O domínio de f denota-se muitas vezes por $\mathrm{Dom}(f)$. O conjunto B diz-se o *conjunto de chegada* de f.

A cada elemento x de A corresponde por f um e um só elemento $f(x)$ de B. O elemento $f(x)$ diz-se o *valor de* f *em* x ou *imagem de* x *por* f.

O conjunto $f(A)=\{f(x)\in B : x\in A\}$ diz-se o *contradomínio* ou a *imagem* de f. Usa-se por vezes a notação $\mathrm{Im}(f)$ em vez de $f(A)$. O contradomínio é, pois, o conjunto das imagens dos elementos do domínio e é um subconjunto do conjunto de chegada.

Consideraremos na maior parte dos casos A e B como subconjuntos de $\mathbb{R}$ (isto é, interessar-nos-emos sobretudo por *funções reais de variável real*). Quando nada for dito em contrário, a expressão "função" terá o significado de função real de variável real. Uma função será dada muitas vezes por meio de uma expressão que a define. Se nada for dito em contrário, subentender-se-á que o domínio de uma tal função é o maior subconjunto de $\mathbb{R}$ onde a expressão faz sentido.

Exemplo 0.2.1 *Considere a função dada pela expressão*

$$f(x)=\frac{3(1+\sqrt{x})}{x-1}.$$

Determine:
(a) $f(4), f(16)$ *e* $f(0)$*;*
(b) o domínio de f*.*

Solução. (a) $f(4) = \dfrac{9}{3} = 3$; $f(16) = \dfrac{15}{15} = 1$; $f(0) = \dfrac{3}{-1} = -3$.
(b) $f(x)$ é um número real se e só se $x \geq 0$ e $x - 1 \neq 0$, isto é, $x \geq 0$ e $x \neq 1$. Logo $\mathrm{Dom}(f) = [0,1[\cup]1,+\infty[$. ■

Uma função $f : A \longrightarrow B$ diz-se:

- *injectiva* se objectos diferentes têm imagens diferentes, isto é, se para quaisquer x e x' de A se tem

$$x \neq x' \Rightarrow f(x) \neq f(x')$$

  ou, o que é o mesmo, $f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$;

- *sobrejectiva* se todo o elemento de B é imagem de algum elemento de A, ou seja, o contradomínio de f coincide com o conjunto de chegada;

- *bijectiva* se é injectiva e sobrejectiva, isto é, cada elemento de B é imagem de um e só um elemento de A.

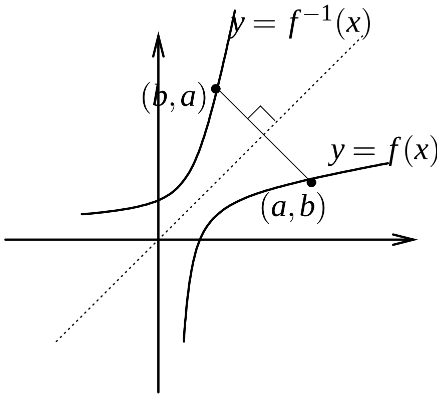
Exemplos 0.2.2 *1. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 + 1$ não é injectiva, visto que, por exemplo, $f(1) = f(-1)$ e não é sobrejectiva visto que, por exemplo, não existe nenhum número real cuja imagem por f seja 0. O contradomínio de f é o intervalo $[1,+\infty[$.*

2. A função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = 3x + 1$, cujo gráfico é uma recta, é injectiva e sobrejectiva, logo é bijectiva.

Se uma função f é injectiva e y está no contradomínio de f, existe um único elemento x do domínio de f tal que $y = f(x)$. O elemento x fica assim determinado por y sendo, portanto, uma função de y. Escrevemos $x = f^{-1}(y)$ e chamamos à função f^{-1}assim definida*função inversa* de f. Assim,

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y).$$

O gráfico de f^{-1} pode obter-se do de f fazendo uma reflexão sobre a recta $y = x$.



Tendo funções $f : A \longrightarrow B$ e $g : C \longrightarrow D$, pode considerar-se a *função composta* $g \circ f$,definida por $g \circ f(x) = g(f(x))$. Tem-se

$$\mathrm{Dom}(g \circ f) = \{x \in \mathrm{Dom}(f) : f(x) \in \mathrm{Dom}(g)\}.$$

Exemplo 0.2.3 *Sejam $f(x) = x^2 + 1$ e $g(x) = 3x + 2$.*

Tanto f como g são funções polinomiais *(isto é, as expressões que as definem são polinómios) logo têm domínio $\mathbb{R}$, assim como as compostas $g \circ f$ e $f \circ g$.*

$g \circ f(x) = 3(x^2 + 1) + 2 = 3x^2 + 5$

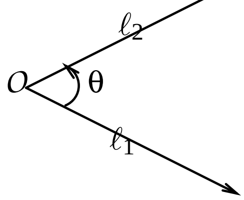
$f \circ g(x) = (3x + 2)^2 + 1 = 9x^2 + 12x + 5.$

Lembramos que duas funções são iguais se e só tiverem o mesmo domínio, o mesmo conjunto de chegada e todo o elemento do domínio tiver a mesma imagem pelas duas funções. Considerando as funções do exemplo anterior tem-se, pois, que $g \circ f \neq f \circ g$, uma vez que, por exemplo, $g \circ f(1) = 8 \neq f \circ g(1) = 26$. Conclui--se então que a composição de funções não é comutativa.

Exercício 0.2.4 *Determine expressões para $f \circ f$ e $g \circ g$ onde f e g são as funções polinomiais do exemplo anterior.*

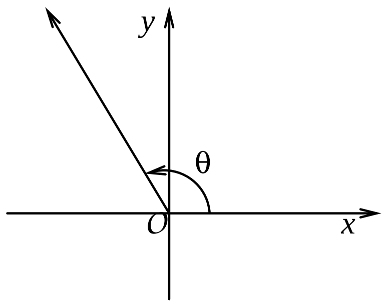
0.3 Trigonometria

Um *ângulo* θ fica determinado por duas semi-rectas ℓ_1 (*lado inicial*) e ℓ_2 (*lado terminal*) com a mesma origem O, que se diz o *vértice* do ângulo.

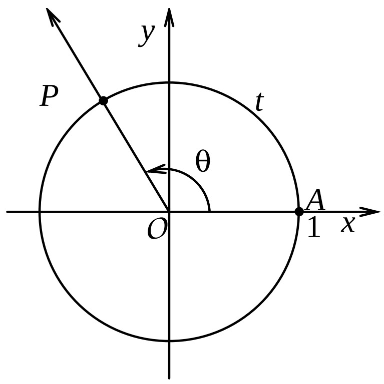


A *amplitude* de um ângulo pode ser expressa em graus ou em radianos, sendo o radiano a unidade mais importante para nós.

Introduzimos um sistema rectangular de coordenadas; tomamos a origem como vértice e a parte positiva do eixo dos xx como lado inicial. A uma rotação completa no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio corresponde um ângulo de 360^o.



Consideremos a circunferência unitária de centro na origem de um sistema rectangular de coordenadas e sobre ela os pontos $A(1,0)$ e P, sendo θ o ângulo AOP. Se t é o comprimento do arco de circunferência entre A e P (percorrido no sentido contrário ao dos ponteiros do relógio), então θ é um ângulo de t *radianos*.



Como a circunferência unitária tem comprimento 2π, tem-se a relação

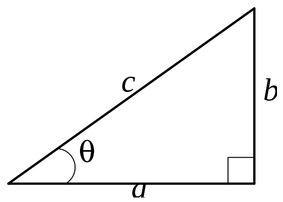
$$2\pi \text{ radianos } = 360^o.$$

Exercício 0.3.1 *Indique a relação entre as medidas em radianos e em graus para ângulos de amplitude* 30^o, 45^o, 60^o, 90^o *e* π *radianos.*

0.3.1 Funções trigonométricas

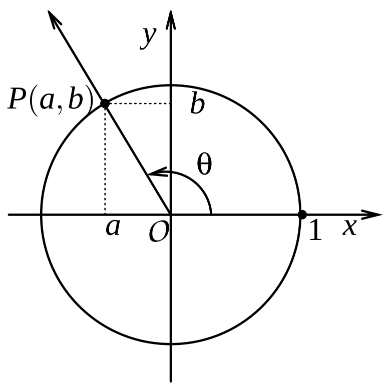
Temos seis funções trigonométricas: sen, cos, tg, cotg, sec, cosec que se dizem respectivamente *seno*, *cosseno*, *tangente*, *cotangente*, *secante* e *cossecante*. O valor de uma função trigonométrica para um número real x é o valor dessa função num ângulo de x radianos. (Resulta daqui a importância, para nós, dos radianos como unidade de medida.) Vamos então definir o valor das funções trigonométricas em termos de um ângulo.
Seja θ um ângulo agudo ($0 < \theta < \frac{\pi}{2}$) de um triângulo rectângulo como o representado na figura. Tem-se

$$\operatorname{sen}\theta = \frac{b}{c}, \ \cos\theta = \frac{a}{c}, \ \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a}.$$



Seja θ um ângulo qualquer. Suponhamos que $P(a,b)$ é o ponto em que o lado terminal intersecta a circunferência $x^2+y^2=1$ (que se diz o *círculo trigonométrico*). Tem-se:

$$\operatorname{sen}\theta = b, \ \cos\theta = a, \ \operatorname{tg}\theta = \frac{b}{a} \text{ para } a \neq 0.$$



Resulta que para qualquer ângulo θ (e consequentemente para qualquer número real) se tem $|\operatorname{sen}\theta| \leq 1$ e $|\cos\theta| \leq 1$.

Observamos também que $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$. Define-se

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}, \ \operatorname{cosec} x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}, \ \operatorname{cotg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

O domínio das funções seno e cosseno é $\mathbb{R}$, enquanto que o domínio da função tangente é $\mathbb{R}\setminus\left\{\frac{\pi}{2}+n\pi; n\in\mathbb{Z}\right\}$.

Exercício 0.3.2 *Indique o domínio das funções secante, cossecante e cotangente.*

A proposição seguinte é de extrema importância, sendo a fórmula por ela dada dita a *fórmula fundamental da trigonometria*.

Proposição 0.3.3 *Para qualquer número real x tem-se:*

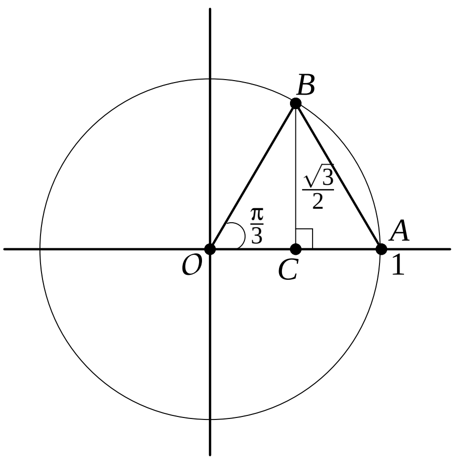
$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=1.$$

Demonstração. Considerando, como atrás, o círculo trigonométrico, tem-se:

$$\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x=b^2+a^2=1. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 0.3.4 *Determine os valores do seno, do cosseno e da tangente de* $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{4}$ *e* $\frac{\pi}{3}$ *radianos.*

Solução.
Na figura seguinte, o triângulo [OAB] é equilátero (tem os três ângulos iguais), logo o ponto C é o ponto médio de [OA]. Então:
$\overline{OC}=\dfrac{1}{2}$ e $\overline{BC}^2+\overline{OC}^2=1$, donde $\overline{BC}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.



Tem-se, portanto:

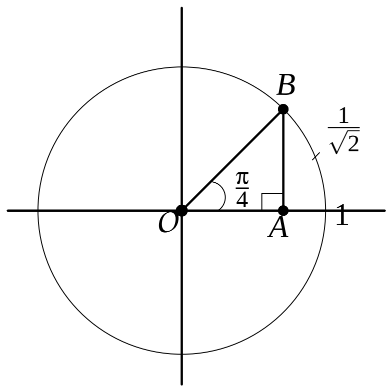
$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}=\cos\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2};\ \operatorname{sen}\frac{\pi}{6}=\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2};\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{3}=\sqrt{3};\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Na figura seguinte, o triângulo [OAB] é rectângulo e isósceles, logo

$$\overline{OA} = \overline{AB} \;\text{ e }\; \overline{OA}^2 + \overline{AB}^2 = 1,$$

donde

$$\overline{OA} = \overline{AB} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

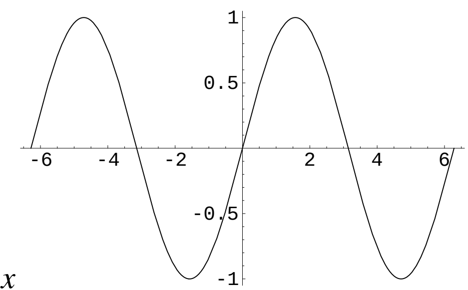


■

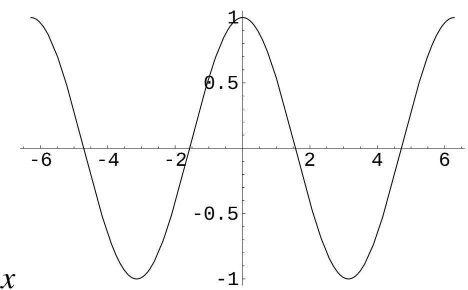
Tem-se, portanto:

$$\cos\frac{\pi}{4} = \operatorname{sen}\frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}; \;\; \operatorname{tg}\frac{\pi}{4} = 1.$$

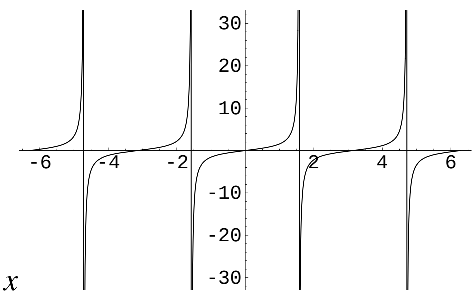
Os gráficos das funçoes seno, cosseno, tangente e secante têm o seguinte aspecto



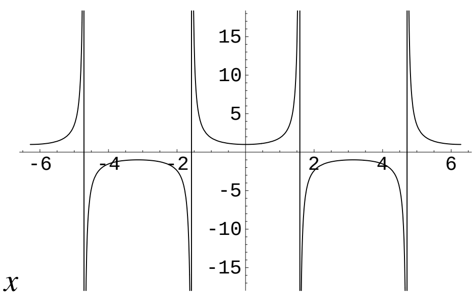
$\operatorname{sen} x$



$\cos x$



$\operatorname{tg} x$



$\sec x$

A proposição seguinte dá-nos conta de algumas relações importantes entre funções trigonométricas e que são frequentemente usadas.

Proposição 0.3.5 *1.* $\operatorname{sen}(-x) = -\operatorname{sen} x$ *(o seno é uma função ímpar);*

2. $\cos(-x) = \cos x$ *(o cosseno é uma função par);*

3. $\operatorname{sen}(u \pm v) = \operatorname{sen} u \cos v \pm \cos u \operatorname{sen} v$*;*

4. $\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v$*.*

Exemplo 0.3.6 *Encontre outras expressões para (i)* $\operatorname{sen} 2x$ *e (ii)* $\cos^2 x$*.*

Solução. (i) $\operatorname{sen} 2x = \operatorname{sen}(x+x) = \operatorname{sen} x \cos x + \operatorname{sen} x \cos x = 2 \operatorname{sen} x \cos x$.
(ii) $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$. ■

Exercício 0.3.7 *De modo análogo ao exemplo anterior, obtenha outras expressões para (i)* $\cos 2x$ *e (ii)* $\operatorname{sen}^2 x$*.*

0.3.2 Funções trigonométricas inversas

Lembramos que as funções trigonométricas são periódicas. (O período do seno e do cosseno é 2π; o da tangente é π. Note-se que $\operatorname{sen}(x+2\pi) = \operatorname{sen} x$, $\cos(x+2\pi) = \cos x$, $\operatorname{tg}(x+\pi) = \operatorname{tg} x$.) Daí resulta que não são injectivas. No entanto, são, em particular, injectivas nos intervalos $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, $[0,\pi]$ e $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, respectivamente. É considerando restrições a estes intervalos que vamos poder falar em funções inversas.

Consideremos a função Sen como sendo a restrição da função sen ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Ao contrário da função sen, a função Sen é injectiva e, portanto, admite uma inversa: a função arcsen (ou sen^{-1}). Temos então:

$$y = \operatorname{arcsen} x \Leftrightarrow x = \operatorname{Sen} y \Leftrightarrow x = \operatorname{sen} y \text{ e } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}.$$

Devemos pensar em $\operatorname{arcsen} x$ como sendo a medida do ângulo entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$ cujo seno é x.

O domínio da função arcsen é o contradomínio da função Sen, que é o mesmo da função sen, o intervalo $[-1,1]$.

Exemplos 0.3.8 *(i)* $\operatorname{arcsen}\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$;
(ii) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen} 0,3) = 0,3$;
(iii) $\operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\frac{4\pi}{5}) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}(\pi - \frac{\pi}{5})) = \operatorname{arcsen}(\operatorname{sen}\frac{\pi}{5}) = \frac{\pi}{5}$;
(iv) $\cos(\operatorname{arcsen} 0,6) = \cos x$ *com* $\operatorname{sen} x = 0,6$ *e* $-\frac{\pi}{2} \le x \le \frac{\pi}{2}$. *Logo,* $\cos x = \sqrt{1-(0,6)^2} = 0,8$.

A função arccos (ou $\cos^{-1}$) pode definir-se de forma análoga:

$$y = \arccos x \Leftrightarrow x = \cos y \text{ e } 0 \le y \le \pi.$$

Usando o facto de o cosseno de um ângulo ser o seno do seu complementar, chegamos facilmente ao resultado seguinte, que podemos usar também como definição:

$$\arccos x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arcsen} x, \text{ para } -1 \le x \le 1.$$

A função arctg (ou tg^{-1}) define-se de modo análogo:

$$y = \operatorname{arctg} x \Leftrightarrow x = \operatorname{tg} y \text{ e } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

O domínio da função arctg é $\mathbb{R}$, o contradomínio da função tg.

0.4 Limites

Para evitar tornar o texto demasiado pesado, consideraremos daqui em diante apenas funções definidas em intervalos ou uniões de intervalos não reduzidos a um ponto. Em particular, se nada for dito em contrário, não consideraremos funções definidas em pontos isolados.

Quando f é uma função definida perto de um número real a, excepto eventualmente em a, podemos perguntar-nos:

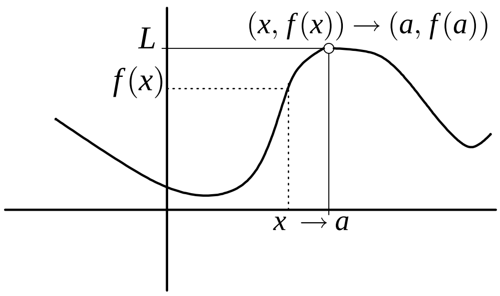
1. À medida que x se aproxima de a (mas $x \neq a$), o valor de $f(x)$ aproxima-se de um número real L?

2. Podemos tornar o valor de $f(x)$ tão próximo de L quanto queiramos, escolhendo x suficientemente próximo de a ($x \neq a$)?

Se a resposta a estas questões for afirmativa, escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

e dizemos que o *limite de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a *é* L.



O que dissemos antes pode ser encarado como uma definição intuitiva do conceito de limite. (Note-se o uso intuitivo do conceito de proximidade.) Mas a matemática não pode fazer-se com noções intuitivas...

Definição. Seja f uma função definida num intervalo de $\mathbb{R}$ que contém o ponto a, excepto eventualmente em a, e seja L um número real. Dizemos que o *limite de* $f(x)$ *quando* x *tende para* a *é* L e escrevemos $\lim_{x \to a} f(x) = L$ se

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \delta > 0 : 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Observações. (i) A ordem por que são considerados os números ε e δ é crucial.

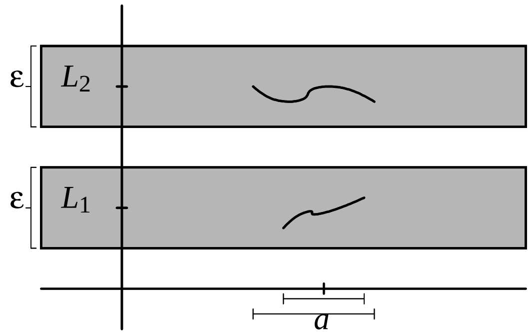
(ii) O número δ, que depende de ε, não é único, pois encontrado um δ, qualquer δ_1 tal que $0 < \delta_1 \leq \delta$ também serve.

Proposição 0.4.1 *Se* $f(x)$ *tem limite quando* x *tende para* a*, então esse limite é único.*

Demonstração.
Suponhamos que

$$\lim_{x \to a} f(x) = L_1 \;\text{ e }\; \lim_{x \to a} f(x) = L_2$$

com $L_1 \neq L_2$. Tome-se $\varepsilon < \dfrac{|L_1 - L_2|}{2}$.

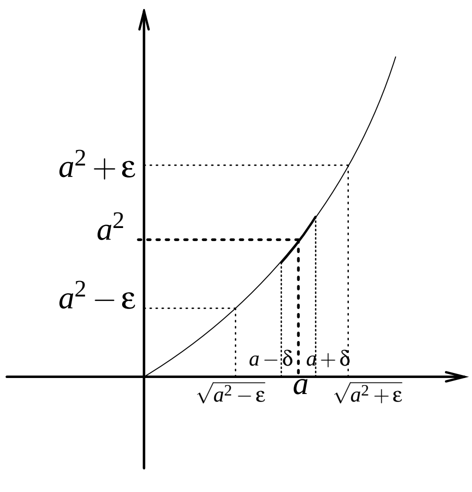


Então haveria um intervalo contendo a tal que o gráfico de f restrito a esse intervalo estava, por um lado, contido na faixa centrada na recta $y = L_1$ e amplitude 2ε e, por outro lado, na faixa centrada na recta $y = L_2$ com a mesma amplitude. Ora, as duas faixas são disjuntas e temos, por isso um absurdo! ■

Exemplo 0.4.2 *Seja* $f :]0, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ *tal que* $f(x) = x^2$. *Tem-se* $\lim_{x\to a} f(x) = a^2$, *para qualquer* $a \in \mathbb{R}^+$.

Solução.
Dado ε arbitrário, devemos encontrar $\delta > 0$ tal que se $x \in]a-\delta, a+\delta[$ e $x \neq a$, então $x^2 \in]a^2 - \varepsilon, a^2 + \varepsilon[$.

Tomando, se necessário, um ε mais pequeno, podemos supor que $]a^2 - \varepsilon, a^2 + \varepsilon[$ consiste de números positivos. As rectas $y = a^2 - \varepsilon$ e $y = a^2 + \varepsilon$ intersectam o gráfico de f nos pontos de abcissas $x = \sqrt{a^2 - \varepsilon}$ e $x = \sqrt{a^2 + \varepsilon}$, respectivamente.

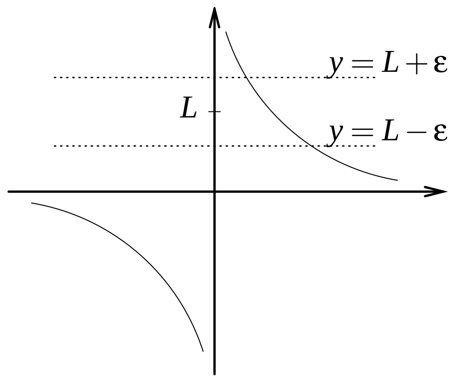


Escolhamos δ tal que $\sqrt{a^2 - \varepsilon} < a - \delta$ e $a + \delta < \sqrt{a^2 + \varepsilon}$. Tem-se, então, que

$$x \in]a-\delta, a+\delta[\Rightarrow x^2 \in]a^2 - \varepsilon, a^2 + \varepsilon[.$$ ■

Exemplo 0.4.3 *Não existe* $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}$.

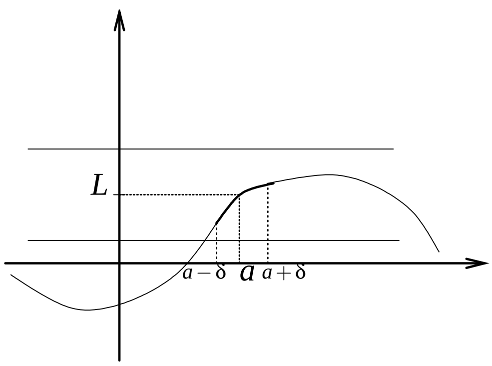
Solução.
Suponhamos que $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x} = L$ e $L > 0$. Consideremos um par de rectas horizontais $y = L \pm \varepsilon$, com $\varepsilon > 0$, qualquer.



Como $\left|\frac{1}{x}\right|$ pode tornar-se tão grande quanto queiramos, bastando para isso tomar x suficientemente próximo de 0, resulta que não existe nenhum intervalo aberto centrado em 0 que, exceptuando o ponto 0, seja totalmente enviado por $f(x) = \frac{1}{x}$ dentro da faixa horizontal limitada pelas rectas previamente dadas. Tem-se algo análogo para o caso de $L \leq 0$. ∎

Proposição 0.4.4 *Se* $\lim_{x\to a} f(x) = L$ *e* $L > 0$ *(respectivamente* $L < 0$*), então existe um intervalo aberto* I *contendo* a *tal que* $f(I \setminus \{a\}) \subseteq \mathbb{R}^+$ *(respectivamente* $\mathbb{R}^-$*), isto é,* $\forall x \in I \setminus \{a\}, f(x) > 0$ *(respectivamente* < 0*).*

Demonstração.
Suponhamos que $L > 0$. Tome-se $\varepsilon < L$. Claro que $]L-\varepsilon, L+\varepsilon[\subseteq \mathbb{R}^+$. Por hipótese, existe $\delta > 0$ tal que $f(]a-\delta, a+\delta[) \subseteq]L-\varepsilon, L+\varepsilon[$. Basta então tomar $I =]a-\delta, a+\delta[$.



O caso $L < 0$ é análogo. ■

A determinação de limites pela definição é em geral muito trabalhosa. Além disso, é preciso ter antecipadamente uma ideia do valor desse limite. Há, no entanto, diversas técnicas que permitem, por vezes, evitar o uso directo da definição. A ideia é, em geral, desenvolver técnicas que permitem determinar limites de funções dadas por expressões razoavelmente complicadas a partir de limites conhecidos de funções dadas por expressões mais simples.

Proposição 0.4.5 *Seja $a \in \mathbb{R}$.*
(i) Seja f a função dada por $f(x) = c$. Então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = c$.
(ii) Seja f a função (identidade) definida por $f(x) = x$. Então $\lim\limits_{x\to a} f(x) = a$.

Demonstração. Exercício. ■

A demontração da proposição seguinte pode encontrar-se em qualquer das nossas referências.

Proposição 0.4.6 *Se os limites $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ e $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ existem, então:*
(i) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x) + \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (o limite da soma é a soma dos limites, quando estes existem);
(ii) $\lim\limits_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to a} f(x)\cdot \lim\limits_{x\to a} g(x)$ (o limite do produto é o produto dos limites, quando estes existem);
(iii) Se $\lim\limits_{x\to a} g(x) \neq 0$, $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$.

Exemplo 0.4.7 *Tem-se $\lim\limits_{x\to a}(2x^3+3x+5) = 2a^3+3a+5$.*

Mais geralmente, vale a proposição seguinte:

Proposição 0.4.8 *Se f é uma função polinomial e a é um número real, então*

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a).$$

Uma *função racional* é o quociente de duas funções polinomiais.

Corolário 0.4.9 *Se $\frac{p(x)}{q(x)}$ é uma função racional e $q(a) \neq 0$, então*

$$\lim_{x\to a} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(a)}{q(a)}.$$

O resultado seguinte é conhecido pelo sugestivo nome de *Teorema do encaixe*.

Proposição 0.4.10 *Sejam f, g e h funções tais que $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ para todo o x num intervalo aberto contendo a, excepto eventualmente em a. Se $\lim_{x\to a} f(x) = L = \lim_{x\to a} h(x)$, então $\lim_{x\to a} g(x)$ existe e $\lim_{x\to a} g(x) = L$.*

Exercício 0.4.11 *Determine $\lim_{x\to 0} x^2 \operatorname{sen} \frac{1}{x}$.*

Nota 0.4.12 *Limites laterais podem definir-se de um modo análogo ao modo como definimos limites. Também os resultados anteriormente enunciados têm análogos para limites laterais.*

Observamos que quando o limite existe, também existem os limites laterais e são iguais. Consequentemente, se os limites laterais forem diferentes ou se algum deles não existir, podemos concluir que o limite não existe.

Consideremos a função $\frac{1}{x}$ e os quadros seguintes

x	$\frac{1}{x}$
1	1
0,1	10
0,01	100
0,001	1000
0,0001	10000
0,00001	100000
...	...

x	$\frac{1}{x}$
1	1
10	0,1
100	0,01
1000	0,001
10000	0,0001
100000	0,00001
...	...

O primeiro quadro sugere que quando x se aproxima de 0 por valores à direita de 0, $\frac{1}{x}$ se torna arbitrariamente grande. Denotamos este facto escrevendo $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$. O segundo quadro sugere $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Exercício 0.4.13 *Escreva definições formais para os diversos tipos de limites que podem ocorrer envolvendo $+\infty$ e $-\infty$.*

Exemplos 0.4.14 *(i)* $\lim_{x\to a^+} f(x) = +\infty$ *significa*

$$\forall M > 0\ \exists \delta > 0 : a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > M.$$

(ii) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$ *significa*

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists M > 0 : x > M \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Pode mostrar-se o seguinte:

Proposição 0.4.15 *Se $a \in \mathbb{R}^+$, então:*

1. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^a}{e^x} = 0$;

2. $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^a} = 0$;

3. $\lim_{x\to-\infty} |x^a|e^x = 0$;

4. $\lim_{x\to 0^+} x^a \ln x = 0$.

Observamos que a alínea (1) da proposição anterior diz basicamente que a exponencial cresce mais rapidamente que qualquer polinómio. A regra de L'Hôpital (Teorema 1.8.8) que estudaremos adiante vai permitir-nos calcular facilmente este tipo de limites.

0.5 Funções contínuas

Intuitivamente, uma função definida num intervalo é contínua se o seu gráfico pode ser representado sem levantar a caneta.

Definição. Uma função definida num ponto a diz-se *contínua em a* se existir $\lim_{x\to a} f(x)$ e se tiver $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

Observamos que se f não estiver definida em a, o problema da continuidade de f em a não se põe.

Definição. Uma função é *contínua* se o for em todos os pontos do seu domínio.

Nota 0.5.1 *Uma função f definida num intervalo fechado $[a,b]$ diz-se contínua se for contínua em $]a,b[$ e for* contínua à direita *em a (isto é, $\lim_{x\to a^+} f(x) = f(a)$) e* à esquerda *em b (isto é, $\lim_{x\to b^-} f(x) = f(b)$).*

Uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ limitada diz-se *contínua por pedaços* se existem $x_0, x_1, x_2, \cdots, x_n \in \mathbb{R}$ tais que $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$ e para cada $i = 1, 2, \cdots, n$ f é contínua em $]x_{i-1}, x_i[$. Além disso, os limites laterais

$$\lim_{x \to x_i^+} f(x) \ \ (i = 0, 1, \ldots, n-1) \text{ e } \lim_{x \to x_i^-} f(x) \ \ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

existem (e são finitos).

Dos resultados enunciados sobre limites vêm imediatamente as duas proposições seguintes:

Proposição 0.5.2 *Se f e g são contínuas em a, então também são contínuas em a as funções: $f + g$, $\quad f \cdot g \quad$ e $\quad \frac{f}{g}$, desde que $g(a) \neq 0$.*

Proposição 0.5.3 *Uma função polinomial é contínua em $\mathbb{R}$.*

A proposição seguinte, que no fundo diz que o comportamento da composição de funções face à continuidade é bom, é usado muitas vezes.

Proposição 0.5.4 *Se g é contínua em c e f é contínua em $b = g(c)$, então $f \circ g$ é contínua em c.*

Geometricamente o resultado seguinte é óbvio. A prova pode encontrar-se em qualquer da nossas referências.

Proposição 0.5.5 (Teorema dos valores intermédios) *Se f é uma função contínua num intervalo fechado $[a,b]$ e se w é um número entre $f(a)$ e $f(b)$, então existe pelo menos um valor $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = w$.*

Corolário 0.5.6 *Se f é contínua num intervalo fechado $[a,b]$ e $f(a)$ e $f(b)$ têm sinais contrários, então existe $c \in [a,b]$ tal que $f(c) = 0$.*

Corolário 0.5.7 *Se f é contínua e não tem zeros num intervalo, então $f(x) > 0$ ou $f(x) < 0$ para todo o x nesse intervalo.*

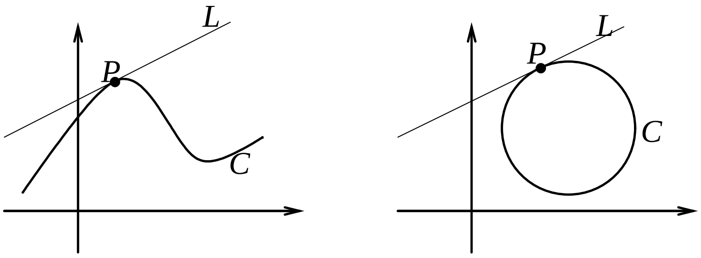
Capítulo 1

Derivação

Neste capítulo começamos por recordar o já bem conhecido conceito de derivada. São depois dados diversos resultados com os quais o aluno pode não estar tão familiarizado. Estes incluem a derivação implícita e a regra de L'Hôpital, muito útil para levantar indeterminações que ocorrem quando se pretendem calcular limites.

1.1 Definição e resultados básicos

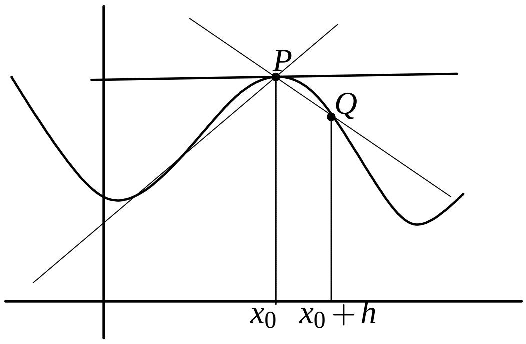
Problema.
Encontrar uma linha recta L que seja tangente à curva C no ponto P.



Vamos começar por considerar curvas que são gráficos de funções contínuas. Suponhamos que C é o gráfico de $y = f(x)$ e que P é o ponto (x_0, y_0) de C (isto é, $y_0 = f(x_0)$).

A primeira questão que se coloca é: como definir tangência? Vejamos que se pode dar uma definição aceitável usando limites.

Se Q é um ponto de C diferente de P, a recta que passa por P e por Q diz-se *secante* à curva C. Quando Q se move ao longo de C, esta secante roda à volta de P. A recta L que passa por P e cujo declive é o limite dos declives das secantes PQ quando Q se aproxima de P ao longo de C é a *recta tangente* a C em P.



Note-se que, no caso de C ser o gráfico de uma função $y=f(x)$, se tem $P=(x_0,f(x_0))$, para algum x_0 e, sendo $Q\neq P$, a primeira coordenada de Q é diferente de x_0 (por f ser uma função), digamos x_0+h, com $h\neq 0$. O declive de PQ é, então,

$$\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

que se diz o *quociente de Newton* de f em x_0.

Suponhamos que f é contínua em x_0 e consideremos o limite

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}.$$

- Se o limite existir e for m, então a recta

  $$y=m(x-x_0)+f(x_0),$$

  de declive m e que passa no ponto $(x_0,f(x_0))$, diz-se a *tangente ao gráfico* $y=f(x)$ em P.

- Se o limite for $+\infty$ ou $-\infty$, a recta $x=x_0$ diz-se a tangente ao gráfico de $y=f(x)$ em P.

- Se o limite não existir, sem ser $\pm\infty$, dizemos que o gráfico de $y=f(x)$ não tem tangente em P.

Definição. A *derivada* de uma função f é uma função f' definida por

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

desde que este limite exista.

Quando $f'(x)$ existe, dizemos que f é *derivável* (ou que é *diferenciável*) em x. Quando $f'(x)$ não existe, dizemos que f não é derivável em x e, se x pertencer ao domínio de f, dizemos que x é um *ponto singular* de f. Dizemos que uma função é *derivável* se for derivável em todos os pontos do seu domínio.

Dependendo do domínio da função, podem ser necessárias pequenas adaptações à definição. Por exemplo, a função *f ser derivável em* $]a,b]$ significa que f é derivável em $]a,b[$ e que é derivável à esquerda em b, isto é, existe

$$\lim_{h\to 0^-} \frac{f(b+h)-f(b)}{h}.$$

É habitual usar outras notações para a derivada de $y = f(x)$:

$$f'(x) = D_x f(x) = D_x y = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx} f(x).$$

Querendo indicar a derivada no ponto x_0, podemos usar notações como por exemplo $f'(x_0)$ ou $\left.\frac{dy}{dx}\right|_{x=x_0}$.

Exemplo 1.1.1 *Seja f definida por* $f(x) = 3x^2+3x-8$. *Determine:*
(a) $f'(x)$*, para qualquer x;*
(b) $f'(2)$*;*
(c) uma equação da recta tangente ao gráfico de f no ponto $(2,10)$.

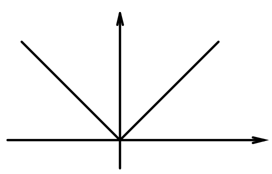
Solução. (a)

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(3(x+h)^2+3(x+h)-8)-(3x^2+3x-8)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{6xh+3h^2+3h}{h} = \lim_{h\to 0}(6x+h+3) = 6x+3; \end{aligned}$$

(b) $f'(2) = 6\times 2+3 = 15$;
(c) $y = 15(x-2)+10 \Leftrightarrow y = 15x-20$. ■

Exemplo 1.1.2 *Determine a derivada de função*

$$f(x) = |x|.$$

Solução. O gráfico da função pode esboçar-se como se segue:  .

Se $x > 0$, $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{x+h-x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h}{h} = 1$.

Se $x < 0$, $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-(x+h)-(-x)}{h} = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{-h}{h} = -1$.

Se $x = 0$, tem-se $\lim\limits_{h\to 0^+} \dfrac{h}{h} = 1$, mas $\lim\limits_{h\to 0^-} \dfrac{-h}{h} = -1$, logo $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{|h|}{h}$ não existe, já que os limites laterais são diferentes.

Assim, $f'(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x > 0 \\ -1 & \text{se } x < 0 \end{cases}$, não estando f' definida em 0 (0 é um ponto singular). O facto de f' não estar definida em 0 não é surpreendente, já que o gráfico de $|x|$ apresenta um bico em $(0, |0|)$. ∎

Como a função $|x|$ é contínua em $\mathbb{R}$, o Exemplo 1.1.2 mostra que uma função contínua não é necessariamente derivável. Mas se for derivável, é contínua, como mostra a proposição seguinte.

Proposição 1.1.3 *Se f é uma função derivável em a, então f é contínua em a.*

Demonstração. Tem-se

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

e

$$f(x) = \frac{f(x)-f(a)}{x-a}(x-a) + f(a), \text{ se } x \neq a.$$

Assim,

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} \cdot \lim_{x\to a}(x-a) + \lim_{x\to a} f(a) = f'(a)\cdot 0 + f(a) = f(a).$$ ∎

Proposição 1.1.4 *Sejam c um número real e n um número natural. Tem-se:*

1. *Se $f(x) = c$, então $f'(x) = 0$.*
2. *Se $f(x) = x^n$, então $f'(x) = nx^{n-1}$.*

Demonstração. Exercício. ∎

A proposição seguinte fornece-nos técnicas para calcular derivadas de funções dadas por expressões relativamente complicadas à custa das derivadas de funções mais simples.

Proposição 1.1.5 *Sejam f e g funções deriváveis em a. Tem-se:*

1. $(f+g)'(a) = f'(a) + g'(a)$

2. $(f \cdot g)'(a) = f'(a) \cdot g(a) + f(a) \cdot g'(a)$

3. $\left(\dfrac{f}{g}\right)'(a) = \dfrac{f'(a) \cdot g(a) \; - \; f(a) \cdot g'(a)}{(g(a))^2}$, *se* $g(a) \neq 0$.

Demonstração. Exercício. ■

Proposição 1.1.6 *Seja* α *um número real. Se* $f(x) = x^{\alpha}$*, então* $f'(x) = \alpha x^{\alpha - 1}$*, desde que* $x \neq 0$ *se* $\alpha < 1$.

A demonstração desta proposição para α racional não é difícil, usando as técnicas de derivação da proposição anterior. De qualquer modo, sugerimos consultar a literatura para uma demonstração completa.

Exemplo 1.1.7 *Seja* $y = \sqrt[3]{x^2}$. *Como* $y = x^{\frac{2}{3}}$ *vem que* $y' = \frac{2}{3} x^{-\frac{1}{3}}$, *se* $x \neq 0$.

A proposição seguinte dá-nos as derivadas das funções trigonométricas.

Proposição 1.1.8 *Tem-se:*

1. $D_x \ \operatorname{sen} x = \cos x$

2. $D_x \ \cos x = -\operatorname{sen} x$

3. $D_x \ \operatorname{tg} x = \sec^2 x$

4. $D_x \ \operatorname{cotg} x = -\operatorname{cosec}^2 x$

5. $D_x \ \sec x = \sec x \ \operatorname{tg} x$

6. $D_x \ \operatorname{cosec} x = -\operatorname{cosec} x \ \operatorname{cotg} x.$

Proposição 1.1.9 (Regra da cadeia) *Sejam* $y = f(u)$ *e* $u = g(x)$ *funções. Suponhamos que as derivadas* $\dfrac{dy}{du}$ *e* $\dfrac{du}{dx}$ *existem ambas (isto é,* f *é derivável em* $g(x)$ *e* g *é derivável em* x*). Então a função composta* $y = f(g(x))$ *tem derivada (em* x*) dada por*

$$[f(g(x))]' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

A igualdade $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{dy}{du} \cdot \dfrac{du}{dx}$ pode ajudar a memorizar. Note-se, no entanto, que a parte esquerda não se obtém da direita por anulação de du. De facto, $\frac{du}{dx}$ não é o quociente de duas quantidades, mas uma quantidade.

Exemplo 1.1.10 $D_x(3x + \operatorname{sen}(2x)) = 3 + \cos(2x) \cdot 2.$

1.2 Uso das derivadas

As derivadas ajudam-nos a interpretar certas variações no mundo que nos rodeia. Vejamos alguns exemplos.

1.2.1 Aproximação de quantidades pequenas

Suponhamos que a quantidade y é função da quantidade x, isto é, $y = f(x)$. Pretendemos saber como uma variação Δx na quantidade x afecta a quantidade y. A variação Δy é dada por

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x).$$

Se a variação Δx for pequena, podemos usar o facto de $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ ser aproximadamente a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ para obter uma aproximação de Δy:

$$\Delta y = \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \Delta x \approx \frac{dy}{dx} \cdot \Delta x = f'(x) \cdot \Delta x.$$

Exemplo 1.2.1 *Em que percentagem aumentamos a área de um círculo se aumentarmos o seu raio em 2%?*

Solução. Tem-se $A = \pi r^2$, logo $\Delta A \approx \dfrac{dA}{dr}\,\Delta r = 2\pi r\,\Delta r$.

Como $\Delta r = \dfrac{2}{100} r$, temos $\Delta A \approx 2\pi r \times \dfrac{2}{100} r = \dfrac{4}{100}\pi r^2 = \dfrac{4}{100} A$.

Logo, a área é aumentada em aproximadamente 4%. ■

É possível determinar majorantes para o erro cometido, mas não vamos tratar disso aqui. Este tema é um pouco mais desenvolvido na Secção 2.5.

1.2.2 Taxa de variação

Seja $y = f(x)$ uma função definida num intervalo aberto contendo o ponto a. A *taxa média de variação* de $y = f(x)$ em relação a x no intervalo $[a, a+h]$ é $\dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$. A *taxa instantânea de variação* de y em relação a x em a é $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a)$, desde que este limite exista.

Se a função f nos der a posição de uma partícula em movimento rectilíneo como função do tempo, é imediato reconhecer que a taxa média de variação nos dá a velocidade média da partícula num certo intervalo de tempo e que a taxa instantânea de variação nos dá a velocidade da partícula num determinado instante.

Suponhamos então que um objecto se move ao longo de um eixo e que a sua posição no instante t é $x = f(t)$. A *velocidade* do objecto no instante t é:

$$v = \frac{dx}{dt} = f'(t).$$

A *aceleração* é a taxa instantânea de variação da velocidade, sendo, portanto,

$$a = \frac{dv}{dt}.$$

1.3 Derivadas de ordem superior

Pode acontecer que a derivada $y' = f'(x)$ de uma função $y = f(x)$ seja ela própria uma função derivável em x. A sua derivada diz-se a *segunda derivada* de f em x e representa-se usando alguma das notações seguintes:

$$y'' = f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\frac{d}{dx}f(x) = \frac{d^2}{dx^2}f(x) = D_x^2 y = D_x^2 f(x).$$

Podemos, mais geralmente, ter *derivadas de ordem n*, sendo usadas notações análogas:

$$y^{(n)} = f^{(n)}(x) = \frac{d^n y}{dx^n} = \cdots$$

Uma função diz-se de *classe* C^k se for k vezes derivável e a derivada de ordem k for contínua.

Exemplo 1.3.1 *Se n é um inteiro positivo e $f(x) = x^n$, tem-se*

$$f^{(k)}(x) = \begin{cases} \dfrac{n!}{(n-k)!}\, x^{n-k} & se\ 0 \le k \le n \\ 0 & se\ k > n \end{cases}$$

Segue facilmente que a derivada de ordem n da função polinomial de grau n

$$a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0$$

é $n!a_n$ e que qualquer derivada de ordem superior a n da mesma função é 0.

Exercício 1.3.2 *Sejam A, B e k constantes. Mostre que a função*

$$y = A\cos(kt) + B\,\mathrm{sen}(kt)$$

é solução da equação

$$\frac{d^2y}{dt^2} + k^2y = 0. \tag{1.1}$$

A equação (1.1) é um exemplo de uma equação diferencial de segunda ordem (ver Capítulo **??**).

1.4 Derivação implícita

Referimos no início do capítulo o problema da determinação de tangentes a curvas e resolvêmo-lo para o caso de curvas que são gráficos de funções deriváveis. Mas nem sempre as curvas são gráficos de funções. Em geral, o gráfico de uma curva é o gráfico de uma equação em duas variáveis $F(x,y) = 0$.

Exemplo 1.4.1 *Para a circunferência $x^2 + y^2 = 25$, temos $F(x,y) = x^2 + y^2 - 25$.*

Por vezes a equação não pode ser resolvida explicitamente em ordem a y, no entanto vemos a equação como definindo implicitamente y como uma ou mais funções de x. A ideia da *derivação implícita* é "derivar a equação em ordem a x, obtendo a derivada $\dfrac{dy}{dx}$ ou y'".

Exemplo 1.4.2 *Determine $\dfrac{dy}{dx}$, se $y^2 = x$.*

Solução. Tem-se

$$\frac{d}{dx}(y^2) = \frac{d}{dx}x,$$

donde, usando a regra da cadeia no primeiro membro (y é função de x), vem $2y\dfrac{dy}{dx} = 1$, logo $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y}$. ■

No exemplo anterior, $y^2 = x$ define duas funções de x, deriváveis, que conhecemos explicitamente: $y_1 = \sqrt{x}$ e $y_2 = -\sqrt{x}$. Para $x > 0$ podemos encontrar derivadas:

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y_1}$$

$$\frac{dy_2}{dx} = -\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y_2},$$

o que está de acordo com o obtido por derivação implícita.

Nota 1.4.3 *Existe um teorema, o* Teorema da Função Implícita*, que justifica a legitimidade de usarmos derivação implícita. Ele diz, basicamente, que parte do gráfico de uma curva* $F(x,y)=0$ *perto de um ponto* (x_0,y_0) *dessa curva é o gráfico de uma função de x derivável em* x_0*, desde que* $F(x,y)$ *seja suficientemente "regular" e* $\frac{d}{dy}F(x_0,y)|_{y=y_0} \neq 0$.

Exemplo 1.4.4 *Determine o declive da tangente à circunferência* $x^2+y^2=25$ *no ponto* $(3,-4)$.

Solução. Usando derivação implícita, temos:

$$\frac{d}{dx}x^2+\frac{d}{dx}y^2=\frac{d}{dx}25$$

$$2x+2y\frac{dy}{dx}=0$$

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{y}.$$

O declive da tangente à circunferência em $(3,-4)$ é $-\left.\frac{x}{y}\right|_{(3,-4)}=-\frac{3}{-4}=\frac{3}{4}$.

Como a circunferência é a união dos gráficos das funções $y_1=\sqrt{25-x^2}$ e $y_2=-\sqrt{25-x^2}$ e $(3,-4)$ pertence ao gráfico de y_2, o problema poderia também ser resolvido do seguinte modo: $\left.\frac{dy_2}{dx}\right|_{x=3}=-\left.\frac{-2x}{2\sqrt{25-x^2}}\right|_{x=3}=-\frac{-6}{2\sqrt{16}}=\frac{3}{4}$. ■

Exemplo 1.4.5 *Determine uma equação da tangente à curva* $x^2+xy+2y^3=4$ *no ponto* $(-2,1)$.

Solução. Tem-se $2x+y+xy'+6y^2y'=0$.

Substituindo x por -2 e y por 1 e resolvendo em ordem a y', vem $y'(-2,1)=\frac{3}{4}$. Assim, a recta pedida tem de equação

$$y=\frac{3}{4}(x+2)+1 \Leftrightarrow y=\frac{3}{4}x+\frac{5}{2}.$$ ■

Exercício 1.4.6 *Determine* $\frac{dy}{dx}$*, se* $y\operatorname{sen}x=x^3+\cos y$.

Solução. $\frac{dy}{dx}=\frac{3x^2-y\cos x}{\operatorname{sen}x+\operatorname{sen}y}$. ■

Podem também determinar-se derivadas de ordem superior.

Exemplo 1.4.7 *Determine* $y'' = \dfrac{d^2y}{dx^2}$, *se* $xy + y^2 = 2x$.

Solução.

$$y' = \frac{2-y}{x+2y};\ \ y'' = \frac{(x+2y)(-y'-(2-y)(1+2y')}{(x+2y)^2}$$

Substituindo y' pela expressão antes obtida e usando a igualdade $xy+y^2 = 2x$, vem:

$$y'' = \frac{-8}{(x+2y)^3}.$$ ■

1.5 Derivada da função inversa

Seja f derivável num intervalo aberto $]a,b[$ e suponhamos que $f'(x) > 0$ para $x \in]a,b[$ (o que implica que f é crescente em $]a,b[$) ou que $f'(x) < 0$ para $x \in]a,b[$ (logo f é decrescente em $]a,b[$). Em qualquer dos casos, f é injectiva em $]a,b[$ e tem inversa f^{-1} definida por

$$y = f^{-1}(x) \Leftrightarrow x = f(y),\ \ (a < x < b).$$

Lembramos (ver página **??**) que o gráfico de f^{-1} se obtém do de f fazendo um reflexão sobre a recta $y = x$. Se o gráfico de f não tem tangentes horizontais, o gráfico de f^{-1} não tem tangentes verticais, o que faz pensar que f^{-1} será derivável.

Seja $y = f^{-1}(x)$. Para determinar $\dfrac{dy}{dx}$, resolvemos a equação em ordem a x: $x = f(y)$ e derivamos implicitamente: $1 = f'(y)\dfrac{dy}{dx}$. Logo

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{f'(y)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Obtemos então a fórmula

$$\frac{d}{dx}f^{-1}(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

Nota 1.5.1 *Suponhamos que f e f^{-1} são deriváveis. Tem-se $f(f^{-1}(x)) = x$. Usando a regra da cadeia, temos*

$$f'(f^{-1}(x)) \cdot (f^{-1})'(x) = 1. \tag{1.2}$$

Resulta de novo a fórmula:

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}.$$

De (1.2) resulta imediatamente que se a é tal que $f'(f^{-1}(a)) = 0$, então f^{-1} não é derivável em a.

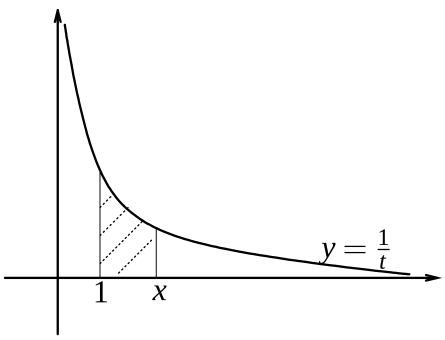
Exemplo 1.5.2 *Mostre que $f(x) = x^3 + x$ é injectiva (em $\mathbb{R}$). Notando que $f(2) = 10$, determine $(f^{-1})'(10)$.*

Solução. Tem-se $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Consequentemente, f é estritamente crescente e, portanto, injectiva.

$$(f^{-1})'(10) = \frac{1}{f'(f^{-1}(10))} = \frac{1}{f'(2)} = \frac{1}{13}. \qquad \blacksquare$$

1.6 Derivadas das funções logarítmica e exponencial

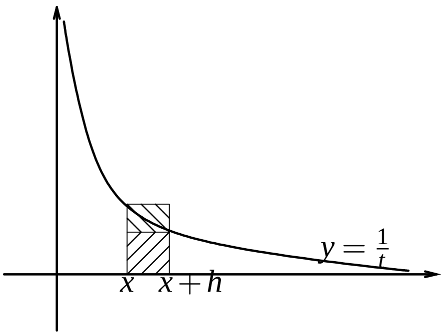
Comecemos por observar que, para cada $x > 0$, o *logaritmo natural* (ou *logaritmo de base e*) $\ln x$ pode ser definido como a área da região do plano limitada pela recta $y = 0$, pelo gráfico da função $y = \frac{1}{t}$ e pelas rectas verticais $t = 1$ e $t = x$.



Proposição 1.6.1 *Se $x > 0$, então* $\dfrac{d}{dx} \ln x = \dfrac{1}{x}$.

Demonstração. Para $h > 0$, $\ln(x+h) - \ln x$ é a área da região do plano limitada pela recta $y = 0$, pelo gráfico da função $y = \frac{1}{t}$ e pelas rectas verticais $t = x$ e $t = x+h$. Comparando com as áreas dos rectângulos assinalados na figura, tem-se:

$$\frac{h}{x+h} < \ln(x+h) - \ln x < \frac{h}{x}.$$



Dividindo todos os membros das inequações por h e usando o teorema do encaixe para limites laterais, temos

$$\lim_{h \to 0^+} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x}.$$

Usando argumentos semelhantes, resolve-se também o caso de $h < 0$, isto é, $0 < x+h < x$, concluindo-se assim a demonstração. ■

Proposição 1.6.2 *Para $x \in \mathbb{R}$, $\frac{d}{dx}e^x = e^x$.*

Demonstração. Sendo $y = e^x$ vem que $x = \ln y$. Usando derivação implícita, tem-se $1 = \frac{1}{y}\frac{dy}{dx}$, donde $\frac{dy}{dx} = y = e^x$. ■

Nota 1.6.3 *Para $a > 0$, $\frac{d}{dx}a^x = \frac{d}{dx}e^{x\ln a} = e^{x\ln a} \cdot \ln a = a^x \cdot \ln a$.*

Assim, $\frac{d}{dx}a^x$ é negativa se $0 < a < 1$ e positiva se $a > 1$. Logo, para $a > 0$ e $a \neq 1$, a função a^x é injectiva e a sua inversa diz-se o logaritmo de base *a e representa-se por* $\log_a x$.

Exercício 1.6.4 *Determine a derivada de $\sqrt{1+e^{2x}}$.*

Solução. $\frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^{2x}}}$ ■

1.7 Derivadas das funções trigonométricas inversas

Proposição 1.7.1 *Tem-se* $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arcsen} x = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ $(x \in]-1,1[)$.

Demonstração. Lembramos que $y = \operatorname{arcsen} x \Leftrightarrow x = \operatorname{sen} y$ e $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$.

Usando derivação implícita, tem-se $1 = \cos y \cdot \dfrac{dy}{dx}$.

Como $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$, tem-se $\cos y \geq 0$, donde $\cos y = \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 y} = \sqrt{1-x^2}$.

Logo $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{\cos y} = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. ∎

Exercício 1.7.2 *Mostre que* $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{arcsen}\dfrac{x}{a}\right) = \dfrac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}$.

Com uma demonstração análoga à da proposição anterior:

Proposição 1.7.3 *Tem-se* $\dfrac{d}{dx}\operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{1+x^2}$.

Exercício 1.7.4 *Mostre que* $\dfrac{d}{dx}\left(\operatorname{arctg}\dfrac{x}{a}\right) = \dfrac{a}{a^2+x^2}$.

1.8 Teorema do valor médio e resultados relacionados

O resultado seguinte é usado na demonstração do Teorema do valor médio e é útil por si só. A sua demonstração, que não faremos, usa a completude do conjunto dos números reais.

Teorema 1.8.1 *Uma função contínua definida num intervalo fechado limitado atinge um máximo e um mínimo nesse intervalo.*

Proposição 1.8.2 *Se f é uma função definida num intervalo aberto $]a,b[$ e atinge um máximo ou um mínimo no ponto $c \in]a,b[$ e $f'(c)$ existe, então $f'(c) = 0$.*

Demonstração. Suponhamos que f atinge um máximo em c. (Para o caso de atingir um mínimo seria análogo.) Então $f(x)-f(c) \leq 0$, para qualquer $x \in]a,b[$. Se $x \in]c,b[$, então $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0$, logo

$$f'(c) = \lim_{x \to c^+} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \leq 0.$$

Analogamente, se $x \in]a,c[$, tem-se $\dfrac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$, logo

$$f'(c) = \lim_{x \to c^-} \frac{f(x)-f(c)}{x-c} \geq 0$$

e, portanto, $f'(c) = 0$. ■

Teorema 1.8.3 (Teorema de Rolle) *Suponhamos que g é uma função contínua num intervalo fechado $[a,b]$ e que é derivável no intervalo aberto $]a,b[$. Se $g(a) = g(b)$, então existe $c \in]a,b[$ tal que $g'(c) = 0$.*

Demonstração. Se g for constante, tem-se $g'(c) = 0$, $\forall c \in [a,b]$. Se g não for constante, suponhamos que existe $x_0 \in]a,b[$ tal que $g(x_0) \neq g(a)$. Vamos supor que $g(x_0) > g(a)$. (Se $g(x_0) < g(a)$ é análogo.) Pelo Teorema 1.8.1, g atinge um máximo nalgum ponto $c \in [a,b]$. Como $g(c) \geq g(x_0) > g(a) = g(b)$, c não pode ser a nem b, logo $c \in]a,b[$, donde g é derivável em c. Pela Proposição 1.8.2, vem que $g'(c) = 0$. ■

Teorema 1.8.4 (Teorema do valor médio) *Se f é contínua num intervalo fechado $[a,b]$ e é derivável no intervalo aberto $]a,b[$, então existe um ponto $c \in]a,b[$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c).$$

O teorema do valor médio também é conhecido por *Teorema de Lagrange*. Não faremos uma demonstração completa, mas indicamos a seguir uma estratégia para a fazer: considera-se

$$g(x) = f(x) - \left(f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,(x-a)\right)$$

e completa-se a demonstração usando o Teorema de Rolle.

Aplicando o Teorema do valor médio à função

$$h(x) = (f(b)-f(a))(g(x)-g(a)) - (f(b)-g(a))(f(x)-f(a))$$

e tendo o cuidado de justificar que não se fazem divisões por 0, obtém-se o resultado seguinte que também é conhecido por *Teorema de Cauchy*.

Teorema 1.8.5 (Teorema do valor médio generalizado) *Se f e g são funções contínuas num intervalo fechado $[a,b]$, deriváveis no intervalo aberto $]a,b[$ e $g'(x) \neq 0$ para todo o $x \in]a,b[$, então existe um ponto $c \in]a,b[$ tal que*

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Corolário 1.8.6 *Se f é contínua num intervalo I e $f'(x) = 0$ para todo o ponto x do interior de I, então f é constante em I.*

Demonstração. Seja $x_0 \in I$. Se $x \in I \setminus \{x_0\}$, existe c entre x_0 e x (logo no interior de I) tal que $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} = f'(c)$, pelo teorema do valor médio. Obtemos, então, $f(x) = f(x_0)$. ∎

Exemplo 1.8.7 *Mostre que* $\operatorname{sen} x < x, \ \forall x > 0.$

Solução. Se $x \geq 1$ é óbvio. Se $0 < x < 1$, pelo teorema do valor médio, existe $c \in]0,x[$ tal que

$$\frac{\operatorname{sen} x}{x} = \frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} 0}{x-0} = \frac{d}{dx}\operatorname{sen} x|_{x=c} = \cos c < 1.$$ ∎

Teorema 1.8.8 (Regra de L'Hôpital) *Sejam f e g funções deriváveis num intervalo aberto $]a,b[$ contendo c, excepto eventualmente em c. Se $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ conduz a uma indeterminação da forma $\frac{0}{0}$ ou $\frac{\infty}{\infty}$ e $g'(x) \neq 0$ para $x \neq c$, então*

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)},$$

desde que $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ exista ou $\lim\limits_{x\to c}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = \infty$.

A demonstração usa o teorema do valor médio generalizado e mais uma vez remetemos para a literatura.

Nota 1.8.9 *A regra de L'Hôpital é também válida para limites laterais e também pode ser aplicada a limites com $x \to \pm\infty$.*

Exemplo 1.8.10 *Calcule* $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen} x}{x}$.

Solução. Temos uma indeterminação do tipo $\frac{0}{0}$. Como as funções $\operatorname{sen} x$ e x são deriváveis (em $\mathbb{R}$) podemos aplicar a regra de L'Hôpital. Temos então

$$\lim_{x \to 0} \frac{\operatorname{sen} x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x}{1} = 1. \qquad \blacksquare$$

Exercício 1.8.11 *Mostre que* $\lim_{x \to \infty} x^{\frac{1}{x}} = 1.$

Capítulo 2

Aplicações das derivadas

As aplicações das derivadas em que incidirá o nosso estudo centram-se no esboço de gráficos de funções e no estudo dos polinómios de Taylor. Existem imensas outras.

2.1 Intervalos de monotonia

Temos aqui mais uma aplicação do Teorema do valor médio.

Proposição 2.1.1 *Seja J um intervalo aberto e seja I um intervalo que consiste dos pontos de J e eventualmente algum seu extremo. Suponhamos que f é contínua em I e derivável em J.*

1. *Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in J$, então f é estritamente crescente em I*

   (isto é, $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$).

2. *Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in J$, então f é estritamente decrescente em I*

   (isto é, $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$).

3. *Se $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in J$, então f é não decrescente em I*

   (isto é, $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$).

4. *Se $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in J$, então f é não crescente em I*

   (isto é, $\forall x_1, x_2 \in I,\ x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$).

Demonstração. Sejam $x_1, x_2 \in I$, com $x_1 < x_2$. Pelo teorema do valor médio (que podemos aplicar pois f é contínua em $[x_1, x_2]$ e derivável em $]x_1, x_2[$) existe $c \in]x_1, x_2[\subseteq J$ tal que

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(c),$$

logo

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)\, f'(c).$$

Como $x_2 - x_1 > 0$, $f(x_2) - f(x_1)$ tem o mesmo sinal que $f'(c)$, sendo 0 se $f'(c)$ o for. ■

Os *intervalos de monotonia* de uma função são os maiores intervalos abertos em que essa função é monótona (crescente ou decrescente).

Exemplo 2.1.2 *Determine os intervalos de monotonia da função*

$$f(x) = x^3 - 12x + 1.$$

Solução. $f'(x) = 3x^2 - 12 = 3(x-2)(x+2)$, logo $f'(x) > 0$ em $]-\infty, -2[$ e em $]2, +\infty[$ e $f'(x) < 0$ em $]-2, 2[$. Podemos construir o seguinte quadro que ajuda a visualizar a situação:

		-2		2	
$x-2$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$x+2$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	17	$\searrow$	-15	$\nearrow$

Temos então que f é estritamente crescente em $]-\infty, -2[$ e em $]2, +\infty[$ e que f é estritamente decrescente em $]-2, 2[$. ■

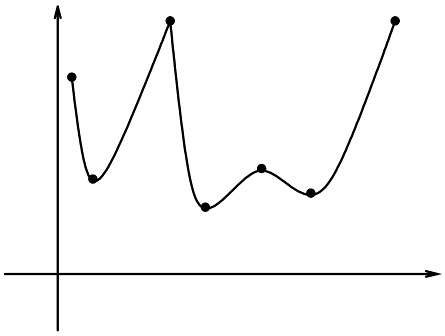
2.2 Máximos e mínimos locais

É importante ter presente que uma função contínua definida num intervalo fechado tem um máximo e um mínimo (Teorema 1.8.1).

Definição. Dizemos que uma função f tem um *máximo local* no ponto x_0 do seu domínio (dizendo-se então $f(x_0)$ um *valor de máximo local*) se existir $h > 0$ tal que $f(x) \leq f(x_0)$ para $x \in \mathrm{Dom}(f) \cap]x_0 - h, x_0 + h[$.

Dizemos que uma função f tem um *mínimo local* no ponto x_0 do seu domínio (dizendo-se então $f(x_0)$ *um valor de mínimo local*) se existir $h > 0$ tal que $f(x) \geq f(x_0)$ para $x \in \mathrm{Dom}(f) \cap]x_0 - h, x_0 + h[$.

A figura seguinte sugere que os extremos locais de uma função f pertencem a alguma das seguintes classes de pontos:



(i) *pontos críticos* de f (pontos do domínio de f onde $f'(x) = 0$);

(ii) *pontos singulares* de f (pontos do domínio de f onde f não é derivável);

(iii) *extremidades* do domínio de f (pontos que não pertencem a um intervalo aberto contido no domínio de f).

Proposição 2.2.1 *Os extremos locais de uma função f estão, de facto, entre as classes de pontos definidas acima.*

Demonstração. Suponhamos que x_0 é um máximo (respectivamente mínimo) local de f e que x_0 não é uma extremidade do domínio de f nem um ponto singular de f. Então $f(x)$ está definida nalgum intervalo $]x_0 - h, x_0 + h[$, sendo x_0 um máximo (respectivamente mínimo) absoluto nesse intervalo. Como x_0 não é singular, $f'(x_0)$ existe, tendo-se $f'(x_0) = 0$, pela Proposição 1.8.2. ∎

Para demonstrar a proposição que se segue, basta atender à informação dada pelo sinal da derivada sobre o crescimento/decrescimento da função, isto é, pela Proposição 2.1.1

Proposição 2.2.2 *Seja x_0 um ponto do domínio de uma função f.*

1ª parte (pontos críticos interiores e pontos singulares)

Suponhamos que f é contínua em x_0 e que x_0 não é uma extremidade do domínio.

(i) Se existir um intervalo aberto $]a,b[$ contendo x_0 tal que $f'(x) > 0$ para $x \in]a, x_0[$ e $f'(x) < 0$ para $x \in]x_0, b[$, então f tem um máximo local em x_0.

(ii) Se existir um intervalo aberto $]a,b[$ contendo x_0 tal que $f'(x) < 0$ para $x \in$

$]a,x_0[$ e $f'(x)>0$ para $x\in]x_0,b[$, então f tem um mínimo local em x_0.

2ª parte (extremidades do domínio)

Suponhamos que x_0 é uma extremidade esquerda (respectivamente direita) do domínio e que f é contínua à direita (respectivamente esquerda) em x_0.

(i) Se $f'(x)>0$ nalgum intervalo $]x_0,b[$ (respectivamente $]a,x_0[$), então f tem um mínimo (respectivamente máximo) local em x_0.

(ii) Se $f'(x)<0$ nalgum intervalo $]x_0,b[$ (respectivamente $]a,x_0[$), então f tem um máximo (respectivamente mínimo) local em x_0 .

Proposição 2.2.3 *Suponhamos que f é derivável duas vezes e $f'(x_0)=0$. Tem-se:*

1. *Se $f''(x_0)<0$, então f tem um máximo local em x_0.*
2. *Se $f''(x_0)>0$, então f tem um mínimo local em x_0.*
3. *Se $f''(x_0)=0$, nada se pode concluir.*

Demonstração. 1. Tem-se:

$$\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x_0+h)-f'(x_0)}{h}=f''(x_0)<0.$$

Logo, para $h>0$ (pequeno), tem-se $f'(x_0+h)<0$ e para $h<0$ (pequeno) tem-se $f'(x_0+h)>0$. Agora basta usar o resultado anterior.

2. Análoga à prova da alínea anterior.

3. $f(x)=x^4$, $f(x)=-x^4$, $f(x)=x^3$ são exemplos que provam a afirmação: Em qualquer dos casos tem-se $f''(0)=f'(0)=0$, mas:

   - a primeira função tem um mínimo em 0;

   - a segunda função tem um máximo em 0;

   - a terceira função não tem máximo nem mínimo em 0.

■

2.3 Concavidades e pontos de inflexão

Diz-se que uma função f é *convexa* (ou que tem a *concavidade voltada para cima*) num intervalo aberto I se, para quaisquer $a,b\in I$, com $a<b$, o segmento de recta que une $(a,f(a))$ a $(b,f(b))$ está acima do gráfico de f em $]a,b[$.

Diz-se que uma função f é *côncava* (ou que tem a *concavidade voltada para baixo*) num intervalo aberto I se, para quaisquer $a, b \in I$, com $a < b$, o segmento de recta que une $(a, f(a))$ a $(b, f(b))$ está abaixo do gráfico de f em $]a, b[$.

Um ponto $(a, f(a))$ do gráfico de f diz-se um *ponto de inflexão* da curva $y = f(x)$ (diz-se também que *f tem um ponto de inflexão em a*) se:

1. o gráfico de f tem uma tangente em $(a, f(a))$;
2. a função f é convexa de um dos lados de a e côncava do outro.

O resultado seguinte, de fácil demonstração, é muito útil.

Proposição 2.3.1 *1. Se $f''(x) > 0$ num intervalo I, então f é convexa em I.*

2. Se $f''(x) < 0$ num intervalo I, então f é côncava em I.

3. Se f tem um ponto de inflexão em x_0 e $f''(x_0)$ existe, então $f''(x_0) = 0$.

Exemplo 2.3.2 *Determine os intervalos de monotonia, os valores extremos e as concavidades de $f(x) = x^4 - 2x^3 + 1$. Esboce o gráfico de f.*

Solução. Tem-se $f'(x) = 4x^3 - 6x^2 = 2x^2(2x-3)$. Os zeros de f' são 0 e $\frac{3}{2}$.

		0		$\frac{3}{2}$	
$2x^2$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$2x-3$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f'(x)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	1	$\searrow$	$-\frac{11}{16}$	$\nearrow$

A derivada $f'(x)$ é positiva em $]\frac{3}{2}, +\infty[$ e negativa em $]-\infty, 0[\, \cup\,]0, \frac{3}{2}[$, logo f é estritamente crescente em $]\frac{3}{2}, +\infty[$ e estritamente decrescente em $]-\infty, 0[$ e em $]0, \frac{3}{2}[$. De facto, f é estritamente decrescente no intervalo $]-\infty, \frac{3}{2}[$. Atinge um mínimo local em $\frac{3}{2}$ e o seu valor é $f(\frac{3}{2}) = -\frac{11}{16}$; não tem máximos locais.

Tem-se $f''(x) = 12x^2 - 12x = 12x(x-1)$. Os zeros de f'' são 0 e 1.

		0		1	
$12x$	$-$	0	$+$	$+$	$+$
$x-1$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\cup$	1	$\cap$	0	$\cup$

A segunda derivada $f''(x)$ é positiva em $]-\infty, 0[\, \cup\,]1, +\infty[$ e negativa em $]0, 1[$, logo f é convexa em $]-\infty, 0[$ e em $]1, +\infty[$ e côncava em $]0, 1[$. Tem pontos de inflexão em $x = 0$ e $x = 1$.

∎

2.4 Esboço do gráfico de uma função

Para fazer o esboço do gráfico de uma função, normalmente procuram-se informações dadas

- pela própria função: intersecções com os eixos, possíveis simetrias, etc.;
- pela derivada: intervalos de monotonia;
- pela segunda derivada: concavidades.

Deve ainda ser feito o estudo das *assíntotas*: rectas das quais o gráfico da função se aproxima arbitrariamente à medida que a distância à origem tende para infinito.

Definição.

1. O gráfico de $y = f(x)$ tem uma *assíntota vertical* $x = a$ se $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ ou $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ ou ambos.
2. O gráfico de $y = f(x)$ tem uma *assíntota horizontal* $y = L$ se $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = L$ ou $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x) = L$ ou ambos ($L \in \mathbb{R}$).
3. A recta $y = mx + b$, com $m \neq 0$, é uma *assíntota oblíqua* do gráfico de $y = f(x)$ se $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x) - (mx+b)) = 0$ ou $\lim\limits_{x\to -\infty}(f(x) - (mx+b)) = 0$ ou ambos.

Exemplo 2.4.1 *(Assíntotas de funções racionais)*

Seja $f(x) = \dfrac{P_m(x)}{Q_n(x)}$ *uma função racional em que* P_m *e* Q_n *são funções polinomiais de graus m e n, respectivamente, e que não têm raízes comuns. Então o gráfico de f*

(a) tem uma assíntota vertical em cada x tal que $Q_n(x) = 0$ *(ou seja, em cada zero de* Q_n*);*

(b) tem uma assíntota horizontal bilateral $y = 0$ *se* $m < n$*;*

(c) tem uma assíntota horizontal bilateral $y = L$ $(L \neq 0)$ *se* $m = n$ *(L é o quociente dos coeficientes dos termos de mais alto grau de* P_m *e* Q_n*);*

(d) tem uma assíntota oblíqua bilateral se $m = n+1$ *(tem-se* $f(x) = mx + b + \dfrac{R(x)}{Q_n(x)}$*, sendo* $y = mx+b$ *a assíntota.* $R(x)$ *é o resto da divisão de* $P_m(x)$ *por* $Q_n(x)$ *e* $mx+b$ *o quociente);*

(e) não tem assíntotas horizontais nem oblíquas se $m > n+1$.

Exemplo 2.4.2 *Determinar a assíntota oblíqua de* $y = \dfrac{x^3}{x^2+x+1}$.

Solução. Efectuando a divisão de x^3 por x^2+x+1 obtém-se o quociente $Q(x) = x-1$ e o resto $R(x) = 1$. Então:
$x^3 = (x-1)(x^2+x+1)+1$ donde $f(x) = x-1+\frac{1}{x^2+x+1}$. Temos então uma assíntota oblíqua: $y = x-1$. ■

Exemplo 2.4.3 *Esboce o gráfico de* $f(x) = \dfrac{x^2+2x+4}{2x}$.

Solução. (Informações dadas directamente pela função.)
Podemos começar por simplificar a expressão: $f(x) = \dfrac{x}{2}+1+\dfrac{2}{x}$.

Domínio: $\mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Assíntotas:

$y = \frac{x}{2}+1$ é assíntota oblíqua. (Verifique.)

$\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$; $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -\infty$, logo $x = 0$ é assíntota vertical bilateral.

Não tem assíntotas horizontais.

Não é par nem ímpar nem o seu gráfico intersecta os eixos coordenados.

(Informações dadas pela 1ª derivada.)

Tem-se: $f'(x) = \dfrac{1}{2}-\dfrac{2}{x^2} = \dfrac{x^2-4}{2x^2}$;

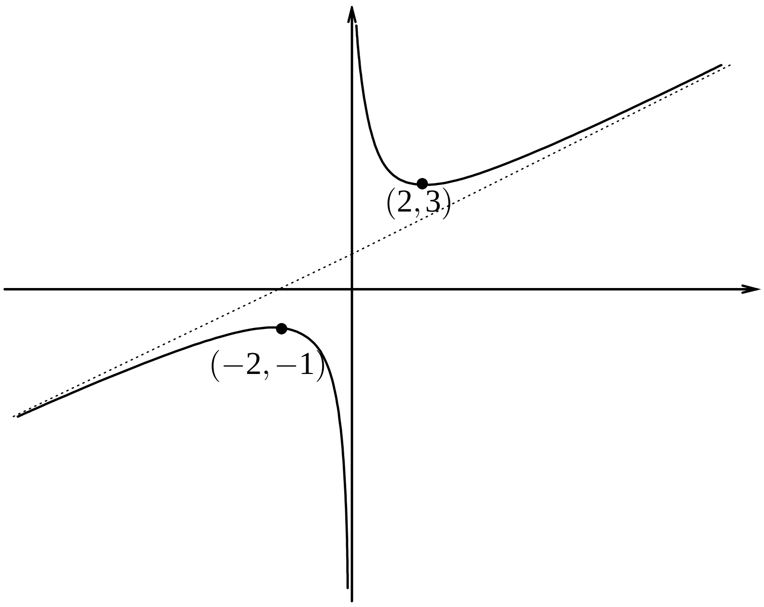
Pontos críticos: 2 e -2.

		-2		0		2	
x^2-4	$+$	0	$-$	-4	$-$	0	$+$
$2x^2$	$+$	$+$	$+$	0	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	$n.d.$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	$n.d.$	$\searrow$	3	$\nearrow$

f é crescente em $]-\infty,-2[$ e em $]2,+\infty[$ (onde $f'(x)$ é positiva) e decrescente em $]-2,0[$ e em $]0,2[$ (onde $f'(x)$ é negativa). Tem um máximo local de valor -1 em $x = -2$ e um mínimo local de valor 3 em $x = 2$.

(Informações dadas pela 2ª derivada.)
$f''(x) = \frac{4}{x^3}$ nunca se anula. $f''(x) > 0$ em $]0,+\infty[$ e $f''(x) < 0$ em $]-\infty,0[$, logo f é convexa em $]0,+\infty[$ e côncava em $]-\infty,0[$. Não existem pontos de inflexão.

O gráfico de f tem o seguinte aspecto:



∎

2.5 Polinómios de Taylor

A *aproximação linear* da função f (derivável em a) no ponto a é a função

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a).$$

Observamos que a recta $y = L(x)$ é a tangente ao gráfico de f no ponto a. Observamos ainda que esta fórmula já foi antes usada para aproximar pequenas variações (Subsecção 1.2.1). Vamos agora ver melhores aproximações, bem como estudar os erros cometidos.

O *erro*cometido numa aproximação é a diferença entre o valor exacto e o valor aproximado.

Suponhamos que $f^{(n)}(x)$ existe nalgum intervalo aberto contendo a. O polinómio

$$P_{n,a,f}(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n$$

diz-se o *polinómio de Taylor de ordem n de f em a.* (Se pudermos subentender a e f, escrevemos apenas $P_n(x)$).

Exemplos 2.5.1 *Encontre polinómios de Taylor $P_{n,a,f}$, para:*

(a) $f(x) = \operatorname{sen} x,\ \ a = 0,\ \ \ n = 3$

(b) $f(x) = e^x,\ \ a,\ \ \ n.$

Solução. (a) $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\operatorname{sen} x$, $f'''(x) = -\cos x$.

$$P_{3,0,f}(x) = \operatorname{sen} 0 + \cos 0\, x - \frac{\operatorname{sen} 0}{2!}x^2 - \frac{\cos 0}{3!}x^3 = x - \frac{x^3}{6}$$

(b) Tem-se $f^{(n)}(x) = e^x$, para qualquer n, logo

$$P_{n,a,f}(x) = e^a + \frac{e^a}{1!}(x-a) + \frac{e^a}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{e^a}{n!}(x-a)^n.$$

■

Exemplo 2.5.2 *Vamos usar polinómios de Taylor de e^x no ponto* 0 *para encontrar aproximações sucessivas de e.*

Sendo $f(x) = e^x$, vem $e = f(1)$. Tem-se então

$$P_n(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}.$$

$P_0(1) = 1$
$P_1(1) = 1 + 1 = 2$
$P_2(1) = P_1(1) + \frac{1}{2} = 2,5$
$P_3(1) = P_2(1) + \frac{1}{6} = 2,66(6)$
$P_4(1) = P_3(1) + \frac{1}{24} = 2,7083...$
$P_5(1) = P_4(1) + \frac{1}{120} = 2,7166...$

O $2,7$ *parece ter estabilizado...*

A demonstração do resultado seguinte usa o teorema do valor médio generalizado. Não a faremos.

Proposição 2.5.3 (Teorema de Taylor) *Se a derivada de ordem $n+1$, $f^{(n+1)}(t)$, existe para todo o t de um intervalo aberto contendo a e x e $P_n(x)$ é o polinómio de Taylor de ordem n de $f(x)$ no ponto a, então tem-se a fórmula (dita a* fórmula de Taylor*),*

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$

onde o erro $E_n(x)$ (dito resto de Lagrange*) é dado por*

$$E_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(X)}{(n+1)!}\,(x-a)^{n+1}$$

em que X é um número entre a e x.

Exemplo 2.5.4 *Verifique que o polinómio de Taylor de ordem* 7*,* $P_7(x)$*, de* e^x *no ponto* 0 *é suficiente para calcular e com* 3 *casas decimais. (Tenha em consideração que* $2 < e < 3$*.)*

Solução. O erro cometido na aproximação $e^x \approx P_n(x)$ é

$$E_n(x) = \frac{e^X}{(n+1)!}\, x^{n+1},$$

para algum X entre 0 e x. Se $x = 1$, então $0 < X < 1$, donde $e^X < e < 3$, tendo-se então $0 < E_7(1) < \frac{3}{(7+1)!}$.

Ora,

$$\frac{3}{8!} = \frac{3}{40320} \approx 0{,}000074,$$

logo $n = 7$ serve. (Tem-se $\dfrac{3}{7!} \approx 0{,}00059$, logo não temos a garantia de que $n = 6$ sirva.) ■

Capítulo 3

Integração

A integração é, a par da derivação, um dos dois grandes temas do *Cálculo Infinitesimal*. Em certo sentido, trata-se de uma generalização do conceito de área. A integração está, por via do Teorema Fundamental do Cálculo, intimamente ligado à primitivação a qual é uma espécie de inversa da derivação.

3.1 Primitivas

Será preciso esperar pela Secção 3.4 para se perceber porque é que o conceito de primitiva aparece no início de um capítulo dedicado à integração.

Uma *primitiva* de uma função f é uma função F tal que $F'(x) = f(x)$, para todo o elemento x do domínio de f. Embora não adoptemos essa terminologia, chamamos a atenção para o facto de as primitivas serem por vezes, sugestivamente, chamadas "antiderivadas".

Exemplos 3.1.1 *1.* $F(x) = x$ *é uma primitiva da função constante* $f(x) = 1$.

2. $F(x) = x^{-1}$ *é uma primitiva de* $f(x) = -x^{-2}$.

3. $F(x) = -\frac{1}{3}\cos(3x)$ *é uma primitiva de* $f(x) = \operatorname{sen}(3x)$.

Nota 3.1.2 *Se adicionarmos uma constante a uma primitiva de uma função, obtemos uma primitiva da mesma função.*

Se uma função estiver definida num intervalo, esta é a única forma de obter novas primitivas, como mostra a proposição seguinte.

Proposição 3.1.3 *Sejam F e G primitivas da função f no intervalo I. Então existe uma constante C tal que, para qualquer x de I, se tem $F(x) - G(x) = C$.*

Demonstração. Seja $x \in I$. Tem-se:

$$\frac{d}{dx}(F(x) - G(x)) = f(x) - f(x) = 0.$$

Logo, pelo Corolário 1.8.6, $F(x) - G(x) = C$ (C constante) em I. ■

Quando se trata de uma função que não está definida num intervalo, duas primitivas podem não diferir de uma constante, como mostra o seguinte exemplo.

Exemplo 3.1.4 *As funções* $F(x) = \begin{cases} x+1, & se\ x \in [0,1] \\ x+2, & se\ x \in [2,3] \end{cases}$ *e* $G(x) = x$ *são primitivas da função* $f : [0,1] \cup [2,3] \to \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = 1$.

A *primitiva geral* da função $f(x)$, também dita *integral indefinido* de $f(x)$, denota-se por

$$\int f(x)\, dx$$

e, no caso de f estar definida num intervalo, obtém-se a partir de uma primitiva particular adicionando-lhe uma constante. O símbolo $\int$ é um "s" estendido e diz-se o *símbolo de integral*; "dx" deve aqui ser encarado apenas como um símbolo.

3.1.1 Primitivas elementares

Indicamos a seguir algumas primitivas a que chamamos elementares; resultam do bom conhecimento que temos das derivadas de algumas funções. Como sempre acontece, para verificar que se tem de facto uma primitiva, basta derivar o segundo membro. Vamos escrever como em geral aparece nas tabelas, embora conscientes de que quando a função a primitivar não tem como domínio um intervalo, a indicação da constante C não significa que todas as primitivas se obtêm adicionando uma constante. Por outro lado, acontecerá por vezes ao longo do texto não escrevermos a constante C ou escrevermo-la entre parêntesis. Ficará em geral claro do contexto se a expressão que escrevemos se refere a uma primitiva particular ou à primitiva geral.

$$(a) \quad \int 1\, dx = x + C \qquad (b) \quad \int x\, dx = \frac{x^2}{2} + C$$

$$(c) \quad \int x^2\, dx = \frac{x^3}{3} + C \qquad (d) \quad \int \frac{1}{x^2}\, dx = -\frac{1}{x} + C$$

$$(e) \quad \int \sqrt{x}\, dx = \frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} + C \qquad (f) \quad \int \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2\sqrt{x} + C$$

Todos os exemplos acima são casos particulares de

$$\int x^r\,dx = \frac{1}{r+1}x^{r+1} + C(r \neq -1).$$

Vejamos outros exemplos:

(g) $\displaystyle\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + C$ (h) $\displaystyle\int e^x\,dx = e^x + C$

(i) $\displaystyle\int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$ (j) $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C$

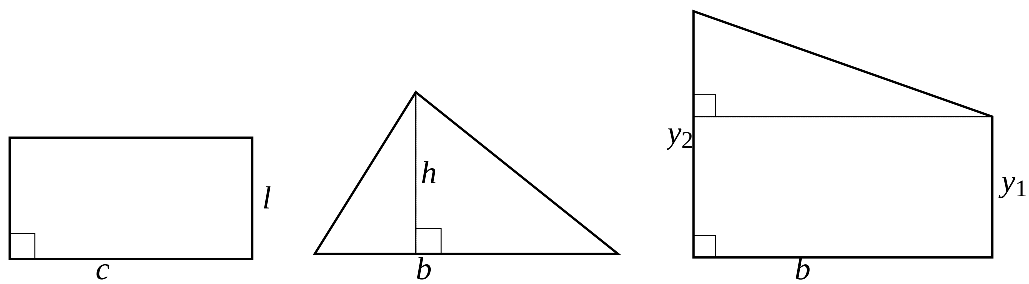
(k) $\displaystyle\int \sec^2 x\,dx = \operatorname{tg} x + C$ (l) $\displaystyle\int \operatorname{cosec}^2 x\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$

(m) $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arcsen} x + C$ (n) $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arctg} x + C$

3.2 Área como limite de somas; o integral definido

Conhecemos fórmulas para o cálculo de áreas de certos polígonos. Indicamos a seguir alguns exemplos. Poderíamos obter outros combinando estes.

Exemplos 3.2.1 *Na figura representamos respectivamente um rectângulo, um triângulo e um trapézio.*



Tem-se:

- *Um rectângulo cujo comprimento é c cm e cuja largura é l cm tem de área*

$$A = cl\ \ cm^2.$$

- *Um triângulo cuja base tem de comprimento b (unidades) de altura h (unidades) tem de área*

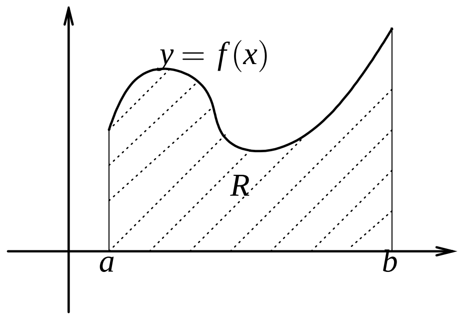
$$A = \frac{bh}{2}\ \textit{(unidades quadradas).}$$

- *A área do trapézio indicado na figura é a soma da área do rectângulo com a área do triângulo indicados:*

$$A = by_1 + \frac{b(y_2 - y_1)}{2} = \frac{b}{2}(y_2 + y_1).$$

Como já começou a ser feito no exemplo anterior, de um modo geral não especificaremos as unidades de medida.

Problema: Calcular a área da região (não poligonal) R limitada pelo gráfico da função (positiva) $y = f(x)$, pelo eixo dos xx e pelas rectas verticais $x = a$ e $x = b$.



A ideia é considerar rectângulos tais que a soma das respectivas áreas aproxime cada vez melhor a área da região. Precisamos para o efeito de mais algumas definições.

Uma *partição* do intervalo $[a,b]$ é um conjunto de números reais

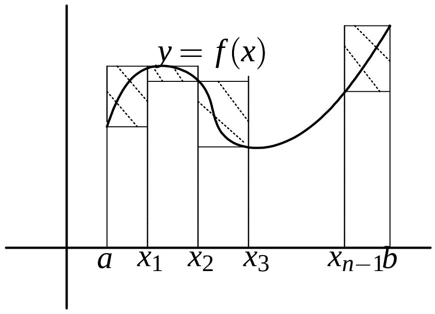
$$P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\},$$

com $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n = b$.

A partição P divide o intervalo $[a,b]$ em n subintervalos, sendo o intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ designado por *i-ésimo subintervalo da partição*. O comprimento de $[x_{i-1}, x_i]$ é representado pelo número positivo $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. O máximo $||P||$ dos comprimentos dos subintervalos da partição P designa-se por *norma* de P.

Suponhamos que f é contínua no intervalo fechado $[a,b]$. Então f é contínua em cada um dos subintervalos da partição, assumindo aí, pelo Teorema 1.8.1, um valor máximo e um valor mínimo, isto é, existem números ℓ_i e u_i em $[x_{i-1}, x_i]$ tais que

$$f(\ell_i) \leq f(x) \leq f(u_i), \forall x \in [x_{i-1}, x_i].$$



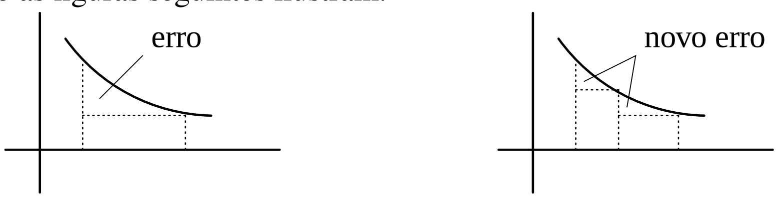
Os números $f(\ell_i)\Delta x_i$ e $f(u_i)\Delta x_i$, se positivos, representam áreas de rectângulos. As somas

$$\underline{\sum}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(\ell_i)\Delta x_i \quad \text{e} \quad \overline{\sum}(f,P) = \sum_{i=1}^{n} f(u_i)\Delta x_i$$

dizem-se respectivamente *soma inferior de Riemann* e *soma superior de Riemann* para a função f e partição P.

Suponhamos que f é uma função contínua e positiva. Claro que quando $||P||$ se aproxima de 0 as somas de Riemann aproximam a área da região R. A soma inferior dá-nos uma aproximação por defeito e a soma superior dá-nos uma aproximação por excesso. Em particular, qualquer soma inferior é menor ou igual a qualquer soma superior. Se acrescentarmos pontos à partição obtemos melhores aproximações, como as figuras seguintes ilustram.

Somas inferiores:



Somas superiores:

É assim fácil ver que se P_2 for uma partição que contém a partição P_1, então

$$\underline{\sum}(f,P_1) \leq \underline{\sum}(f,P_2) \leq \overline{\sum}(f,P_2) \leq \overline{\sum}(f,P_1). \tag{3.1}$$

Pela completude dos números reais, existe $I \in \mathbb{R}$ tal que, para qualquer partição P, se tem

$$\underline{\sum}(f,P) \leq I \leq \overline{\sum}(f,P).$$

Quando existe um único tal I, dizemos que f é *integrável* em $[a,b]$ e I diz-se o *integral definido* de f em $[a,b]$. Usa-se então a notação

$$I = \int_a^b f(x)\, dx$$

Os números a e b dizem-se respectivamente o *limite inferior de integração* e o *limite superior de integração*. A função f diz-se a *função integranda*. A variável x diz-se a *variável de integração.* O símbolo dx, por vezes dito *diferencial* de x, indica-nos qual a variável de integração.

Nota 3.2.2 *1.* $\int_a^b f(x)\, dx$ *é um número real, não é uma função de* x *ou uma classe de funções, como acontece com* $\int f(x)\, dx$.

2. O integral definido depende apenas da função integranda e dos limites de integração, isto é,

$$\int_a^b f(x)\, dx = \int_a^b f(t)\, dt.$$

Vamos a seguir calcular um integral pela definição. Para o efeito será útil a fórmula dada no lema seguinte:

Lema 3.2.3 *Seja n um número natural. Tem-se*

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}.$$

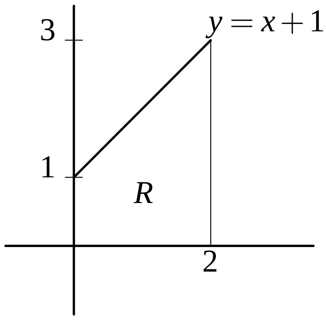
Demonstração. Escrevamos a soma de duas maneiras diferentes:

$$\begin{array}{ccccccccccc} S & = & 1 & + & 2 & + & \cdots & + & n-1 & + & n \\ S & = & n & + & n-1 & + & \cdots & + & 2 & + & 1 \\ \hline 2S & = & (n+1) & + & (n+1) & + & \cdots & + & (n+1) & + & (n+1) \end{array}$$

Somando membro a membro, podemos obter no segundo membro n parcelas cada uma das quais vale $n+1$, isto é, obtemos $2S = n(n+1)$. ■

Exemplo 3.2.4 *Consideremos a função* $f(x) = x+1$ *definida no intervalo* $[0,2]$.

Observamos que a área da região R *limitada pela recta* $y = x+1$, *pelo eixo dos xx e pelas rectas* $x = 0$ *e* $x = 2$ *é, usando a fórmula para a área do trapézio,* $\frac{2}{2}(1+3) = 4$.



Consideremos a partição

$$P_n = \left\{0, \frac{2}{n}, \frac{4}{n}, \ldots, \frac{2n}{n}\right\}$$

do intervalo $[0,2]$ *em n subintervalos de igual comprimento. O i-ésimo subintervalo da partição é* $\left[\frac{2(i-1)}{n}, \frac{2i}{n}\right]$, *tendo-se* $\Delta x_i = \frac{2}{n}$. *Note-se que* $||P_n|| \to 0$.

Atendendo a que a função é crescente, tem-se

$$f(\ell_i) = f\left(\frac{2(i-1)}{n}\right) = \frac{2(i-1)}{n} + 1 \text{ e } f(u_i) = f\left(\frac{2i}{n}\right) = \frac{2i}{n} + 1.$$

Calculemos agora a soma inferior de Riemann de P_n*:*

$$\begin{aligned}
\underline{\sum}(f, P_n) &= \textstyle\sum_{i=1}^n f(\ell_i)\Delta x_i = \sum_{i=1}^n \left(\frac{2(i-1)}{n} + 1\right) \cdot \frac{2}{n} \\
&= \frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{2(i-1)}{n} + 1\right) = \frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n}(i-1) + \sum_{i=1}^{n} 1\right) = \frac{2}{n}\left(\frac{2}{n}\sum_{j=1}^{n-1} j + n\right) \\
&= \frac{2}{n}\left(\frac{2}{n} \cdot \frac{(n-1)n}{2} + n\right) = \frac{2(2n-1)}{n}
\end{aligned}$$

Tem-se então

$$\lim_{n\to\infty} \underline{\sum}(f, P_n) = 4.$$

Exercício 3.2.5 *Mostre que* $\lim_{n\to\infty} \overline{\sum}(f, P_n) = 4$.

Seja P uma partição qualquer de $[0,2]$ *e seja* $Q = P \cup P_n$. *Usando as desigualdades (3.1) da página 51 obtemos*

$$\underline{\sum}(f, P) \le \underline{\sum}(f, Q) \le \overline{\sum}(f, Q) \le \overline{\sum}(f, P).$$

Do teorema das sucessões enquadradas resulta imediatamente que 4 *é o único número real tal que*

$$\underline{\sum}(f, P) \le 4 \le \overline{\sum}(f, P)$$

tendo-se, portanto,

$$\int_0^2 (x+1)\,dx = 4$$

que é, como sabemos, a área do trapézio R.

Exercício 3.2.6 *Adapte o exemplo anterior para mostrar que*

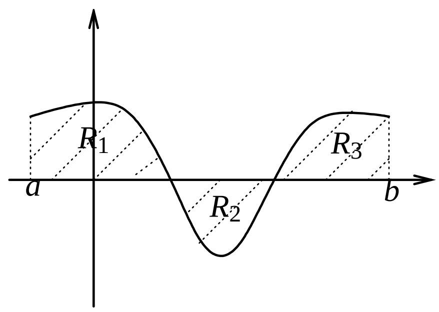
$$\int_0^a x\,dx = \frac{a^2}{2}.$$

Nota 3.2.7 *Seja $f(x)$ integrável em $[a,b]$ e seja R a região limitada pelo eixo dos xx, o gráfico de f e as rectas $x = a$ e $x = b$. então $\int_a^b f(x)\,dx$ é a área de R acima do eixo dos xx menos a área de R abaixo do eixo dos xx.*

Exemplo 3.2.8 *No caso da figura a seguir ter-se-ia:*

$$\int_a^b f(x)\,dx = A(R_1) - A(R_2) + A(R_3)$$

em que $A(R_i)$ representa a área da região R_i $(i = 1, 2, 3)$.



Nota 3.2.9 *As somas de Riemann também se definem para funções não necessariamente contínuas. Para este efeito, em vez de falar em máximos e mínimos, haveria a necessidade de falar em supremos e ínfimos.*

3.3 Propriedades do integral definido

A definição de integral estende-se naturalmente ao caso em que $a = b$ (toma-se $\Delta x = 0$) e ao caso em que $a > b$ (toma-se $\Delta x_i < 0$).

O resultado seguinte sumariza algumas das mais importantes propriedades do integral definido.

Teorema 3.3.1 *Sejam f e g funções integráveis nalgum intervalo contendo os pontos a, b e c. Então*

1. $\displaystyle\int_a^a f(x)\,dx = 0$;

2. $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$;

3. *Para $A, B \in \mathbb{R}$, tem-se*

$$\int_a^b (Af(x) + Bg(x))\,dx = A\int_a^b f(x)\,dx + B\int_a^b g(x)\,dx;$$

4. $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$;

5. *Se $a < b$ e $f(x) \leq g(x)$, para $x \in [a,b]$, então* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$;

6. *Se $a \leq b$, então* $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$;

   Suponhamos agora que f é integrável em $[-a,a]$, com $a > 0$.

7. *Se f é uma função ímpar, então* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

8. *Se f é uma função par, então* $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

O resultado apresentado no número 6 do teorema anterior é uma espécie de generalização da *desigualdade triangular*: $|\sum x_i| \leq \sum |x_i|$.

Exemplo 3.3.2 $\displaystyle\int_{-1}^1 (3x+2)\,dx = 3\int_{-1}^1 x\,dx + \int_{-1}^1 2\,dx = 0 + 4 = 4$. *Usámos aqui o facto de a função identidade $f(x) = x$ ser ímpar e de $\displaystyle\int_{-1}^1 2\,dx$ não ser mais que a área de um quadrado de lado 2.*

Exemplo 3.3.3 $\displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx$ *é a área de um semicírculo de raio 2. Logo* $\displaystyle\int_{-2}^2 \sqrt{4-x^2}\,dx = \frac{1}{2}\pi \cdot 2^2 = 2\pi$.

Podemos naturalmente perguntar-nos se as funções com que mais frequentemente lidamos são integráveis. A proposição seguinte diz-nos que a resposta é "sim".

Proposição 3.3.4 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função contínua por pedaços, então f é integrável em $[a,b]$.*

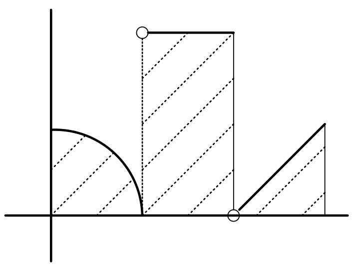
A continuidade não é, no entanto, uma condição necessária. A continuidade por pedaços é suficiente, como se afirma na proposição seguinte.

Proposição 3.3.5 *Se $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ é uma função limitada e contínua excepto eventualmente número finito de pontos, então f é integrável em $[a,b]$.*

Exemplo 3.3.6 *Seja*

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{1-x^2} & se \quad 0 \le x \le 1 \\ 2 & se \quad 1 < x \le 2 \\ x-2 & se \quad 2 < x \le 3 \end{cases}$$

O integral $\displaystyle\int_0^3 f(x)\,dx$ é a área da região destacada na figura seguinte.



$$\begin{aligned} \int_0^3 f(x)\,dx &= \textstyle\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx + \int_1^2 2\,dx + \int_2^3 (x-2)\,dx \\ &= \tfrac{1}{4}\pi \times 1^2 + 2 \times 1 + \tfrac{1}{2}(1 \times 1) \end{aligned}$$

3.4 Teorema Fundamental do Cálculo

Começamos esta secção enunciando o *Teorema do valor médio para integrais*:

Teorema 3.4.1 *Se f é uma função contínua definida no intervalo $[a,b]$, então existe um ponto $c \in]a,b[$ tal que*

$$\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(c).$$

Teorema 3.4.2 *Seja f uma função contínua definida num intervalo I contendo o ponto a.*

> **1º Teorema fundamental do cálculo**
> *Seja F a função definida em I por $F(x) = \int_a^x f(t)\,dx$. Então F é derivável em I, tendo-se $F'(x) = f(x)$, para todo o x de I (isto é, F é uma primitiva de f em I).*
>
> **2º Teorema fundamental do cálculo**
> *Se G é uma primitiva de f em I, então, para qualquer $c \in I$,*
>
> $$\int_a^c f(t)\,dt = G(c) - G(a).$$

A prova do 1º teorema fundamental do cálculo usa o teorema do valor médio para integrais e não a faremos. O 2º é um corolário simples do 1º:

Como G é uma primitiva de f em I, tem-se, pela Proposição 3.1.3,

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt = G(x) + C$$

para alguma constante C.

Para $x = a$, tem-se $0 = \int_a^a f(t)\,dt = G(a) + C$, logo $C = -G(a)$. Tomando agora $x = b$, tem-se $\int_a^b f(t)\,dt = G(b) + C = G(b) - G(a)$. ■

O número real $G(b) - G(a)$ é muitas vezes representado por $[G(x)]_a^b$ ou simplesmente por $G(x)]_a^b$.

Exemplo 3.4.3 *Determine $\int_0^a x\,dx$. (Confronte com o Exercício 3.2.6.)*

Solução. Como $\frac{x^2}{2}$ é uma primitiva de x, vem $\int_0^a x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^a = \frac{a^2}{2} - \frac{0^2}{2} = \frac{a^2}{2}$. ■

Exemplo 3.4.4 *Encontre as derivadas das seguintes funções:*

(a) $F(x) = \int_x^3 e^{-t^2}\,dt$; *(b)* $G(x) = x^2\int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\,dt$; *(c)* $H(x) = \int_{x^2}^{x^3} e^{-t^2}\,dt$;

Solução. (a) Tem-se $F(x) = -\int_3^x e^{-t^2}\, dt$, logo $F'(x) = -e^{-x^2}$.

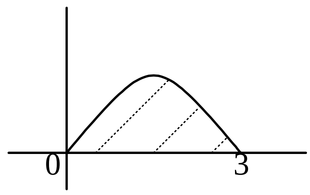
(b) $G'(x) = 2x\int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\, dt + x^2\frac{d}{dx}\int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\, dt = 2x\int_{-4}^{5x} e^{-t^2}\, dt + x^2\cdot e^{-(5x)^2}\cdot 5.$
(Note-se o uso da regra da cadeia.)

(c) Tem-se $H(x) = \int_{x^2}^{0} e^{-t^2}\, dt + \int_0^{x^3} e^{-t^2}\, dt$. Logo

$$H'(x) = -e^{-(x^2)^2}\cdot 2x + e^{-(x^3)^2}\cdot 3x^2. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 3.4.5 *Determine a área da região do plano acima do eixo dos xx e abaixo da curva $y = 3x - x^2$.*

Solução. Tem-se $3x - x^2 = x(3-x) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 3$. Um esboço gráfico da região é:



A área pedida é então $\int_0^3 (3x - x^2)\, dx = \left[\frac{3}{2}x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^3 = \frac{27}{2} - \frac{27}{3} - 0 + 0 = \frac{27(3-2)}{6} = \frac{9}{2}$. $\blacksquare$

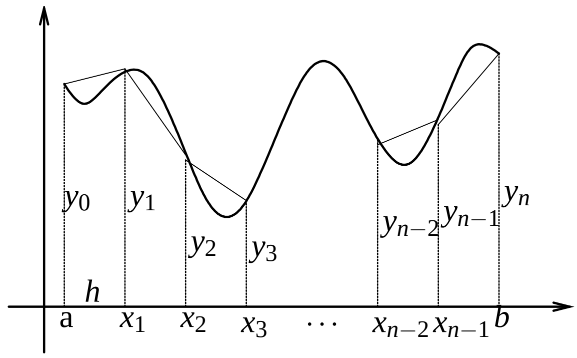
3.5 Integração numérica

A secção anterior torna evidente a utilidade de saber calcular primitivas. No capítulo seguinte veremos algumas técnicas que nos permitirão em muitos casos encontrar primitivas de funções integráveis. Como essa tarefa nem sempre é fácil (ou mesmo possível em termos das funções habituais), há muitas vezes conveniência em encontrar valores aproximados do integral definido. As somas de Riemann podem ser usadas para determinar aproximações, mas há melhores métodos. Vamos ver dois deles: a regra do trapézio e a regra de Simpson.

3.5.1 Regra do trapézio

Suponhamos que $f(x)$ é contínua num intervalo $[a,b]$ e que dividimos $[a,b]$ em n subintervalos de comprimento $h = \frac{b-a}{n}$ usando a partição

$$\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}.$$



Sejam $y_0 = f(x_0), y_1 = f(x_1), \ldots, y_n = f(x_n)$. Tem-se $\displaystyle\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)\,dx \simeq h\frac{y_{j-1}+y_j}{2}$, para $j \in \{1,\ldots,n\}$.

A aproximação pela *regra do trapézio*, usando n subintervalos, de $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ denota-se por T_n e é dada por

$$T_n = h\left(\frac{y_0+y_1}{2}+\frac{y_1+y_2}{2}+\cdots+\frac{y_{n-1}+y_n}{2}\right) = h\left(\frac{1}{2}y_0+y_1+\cdots+y_{n-1}+\frac{1}{2}y_n\right).$$

Exemplo 3.5.1 *Calcule, usando a regra do trapézio, T_4 e T_8 para* $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

Solução. As partições a considerar são

$$\left\{1,\frac{5}{4},\frac{3}{2},\frac{7}{4},2\right\} \text{ e } \left\{1,\frac{9}{8},\frac{5}{4},\frac{11}{8},\frac{3}{2},\frac{13}{8},\frac{7}{4},\frac{15}{8},2\right\}.$$

Tem-se então

$$T_4 = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\times 1+\frac{4}{5}+\frac{2}{3}+\frac{4}{7}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right) = 0,69702381\ldots$$
$$T_8 = \frac{1}{8}\left(4T_4+\frac{8}{9}+\frac{8}{11}+\frac{8}{13}+\frac{8}{15}\right) = 0,69412185\ldots$$ ∎

É possível majorar os erros cometidos:

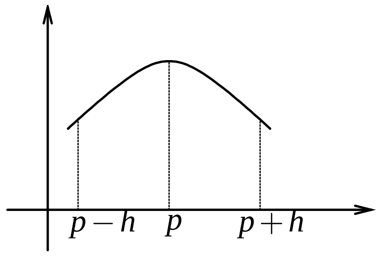
Proposição 3.5.2 *Suponhamos que f é de classe C^2 (isto é, tem segunda derivada contínua) em $[a,b]$ e satisfaz, em $[a,b]$, $|f''(x)| \le k$ para algum $k \in \mathbb{R}$. Então*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - T_n\right| \le \frac{k(b-a)^3}{12n^2}.$$

Exercício 3.5.3 *Obtenha majorantes para os erros cometidos no exemplo anterior ao calcular* $\displaystyle\int_1^2 \frac{dx}{x}$ *usando a regra do trapézio.*

3.5.2 Regra de Simpson

A ideia subjacente à regra de Simpson é semelhante à da regra do trapézio, mas em vez de usar segmentos de recta para fazer aproximações usam-se arcos de parábola.



Também aqui se considera uma partição, mas esta deve ter um número *par* de subintervalos, havendo também a necessidade de calcular o valor da função nos pontos da partição. Obter uma expressão para as aproximações dadas pela regra de Simpson é um pouco mais difícil que para o caso da regra do trapézio e remetemos para a literatura.

A aproximação dada pela *regra de Simpson*, usando um número par n de subintervalos, de $\int_1^2 f(x)\,dx$ denota-se por S_n e, usando a notação usada antes para a regra do trapézio, é dada por

$$\begin{aligned} S_n &= \tfrac{h}{3}\left(y_0 + 4y_1 + 2y_2 + 4y_3 + 2y_4 + \cdots + 2y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n\right) \\ &= \tfrac{h}{3}\left(y_{\text{extremos}} + 2y_{\text{pares}} + 4y_{\text{ímpares}}\right) \end{aligned}$$

Exemplo 3.5.4 *Calcule, usando a regra de Simpson, S_4 e S_8 para* $\int_1^2 \frac{1}{x}\,dx$.

Solução. Usamos aqui as partições de $[0,2]$ já consideradas no Exemplo 3.5.1.Tem--se:

$$S_4 = \frac{1}{12}\left(1 + 4\cdot\frac{4}{5} + 2\cdot\frac{2}{3} + 4\cdot\frac{4}{7} + \frac{1}{2}\right) = 0,69325397\ldots$$

$$S_8 = \frac{1}{24}\left(1 + \frac{1}{2} + 4\left(\frac{8}{9} + \frac{8}{11} + \frac{8}{13} + \frac{8}{15}\right) + 2\left(\frac{4}{5} + \frac{2}{3} + \frac{4}{7}\right)\right) = 0,69315453\ldots$$

■

Atendendo a que o valor dado por uma máquina de calcular para $\ln 2 = \int_1^2 \frac{1}{x}\, dx$ é $0,69314718\ldots$, vemos que a regra de Simpson nos dá neste caso uma melhor aproximação que a regra do trapézio.

Também é possível obter majorantes para os erros cometidos quando se usa a regra de Simpson. Remetemos para a literatura para a demonstração da proposição seguinte.

Proposição 3.5.5 *Suponhamos que f é de classe C^4 em $[a,b]$ e satisfaz, em $[a,b]$, $|f^{(4)}(x)| \leq k$ para algum $k \in \mathbb{R}$. Então*

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - S_n \right| \leq \frac{k(b-a)^5}{180n^2}.$$

3.6 Integrais impróprios

Foram até agora considerados integrais definidos do tipo $\int_a^b f(x)\, dx$ em que $f(x)$ é uma função definida no intervalo fechado $[a,b]$. Generalizamos agora o conceito de integral definido, permitindo que se tenha alguma das seguintes situações:

(1) $a = -\infty$, $b = +\infty$ ou ambos;

(2) f ilimitada quando x se aproxima de a ou de b ou ambos.

Integrais satisfazendo (1) ou (2) dizem-se *impróprios*. Damos a seguir algumas definições envolvendo integrais impróprios.

Se f está definida em $[a,+\infty[$ e é integrável em qualquer intervalo fechado da forma $[a,R]$, define-se

$$\int_a^{+\infty} f(x)\, dx = \lim_{R\to+\infty} \int_a^R f(x)\, dx.$$

Analogamente, define-se

$$\int_{-\infty}^b f(x)\, dx = \lim_{L\to-\infty} \int_L^b f(x)\, dx.$$

Se f é integrável em qualquer intervalo da forma $[a+h,b]$, com $0 < h < b-a$, e é (eventualmente) ilimitada perto de a, define-se

$$\int_a^b f(x)\, dx = \lim_{c\to a^+} \int_c^b f(x)\, dx.$$

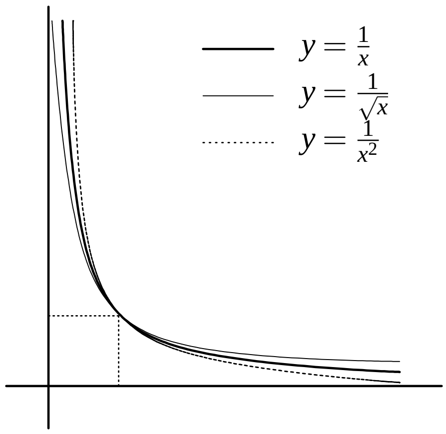
Tem-se uma definição análoga para o caso em que f é ilimitada perto de b.

Em qualquer destes casos, se o limite existe (e é finito), dizemos que o integral impróprio *converge*. Se o limite não existe, dizemos que o integral *diverge*. A sugestiva terminologia "*diverge para* $+\infty$" ou "*diverge para* $-\infty$" também é por vezes usada.

A figura a seguir, representando parte dos gráficos das funções

$$y = \frac{1}{x}, y = \frac{1}{x^2} \text{ e } y = \frac{1}{\sqrt{x}},$$

serve de apoio aos exemplos que se seguem.



Exemplo 3.6.1 *Encontre a área A da região abaixo da curva $y = \frac{1}{x^2}$, acima do eixo dos xx e à direita de* 1.

Solução. Pretendemos determinar $A = \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}$. Vem então

$$A = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{dx}{x^2} = \lim_{R\to+\infty} \left[-\frac{1}{x}\right]_1^R = \lim_{R\to+\infty} \left(-\frac{1}{R}+1\right) = 1. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 3.6.2 *Análogo ao exemplo anterior, agora considerando a curva $y = \frac{1}{x}$.*

Solução. Agora não temos uma área finita, pois

$$A = \lim_{R\to+\infty} \int_1^R \frac{dx}{x} = \lim_{R\to+\infty} [\ln x]_1^R = \lim_{R\to+\infty} \ln R = +\infty. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 3.6.3 *Mais um exemplo análogo, considerando agora $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$, entre $x = 0$ e $x = 1$.*

Solução.

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0^+} \int_c^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{c\to 0^+} \left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_c^1 = \lim_{c\to 0^+} (2-2\sqrt{c}) = 2.$$ ■

Exercício 3.6.4 *Mostre que*

(i) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ *diverge;*

(ii) $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x}$ *diverge;*

(iii) $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x}}$ *diverge.*

Proposição 3.6.5 *Sejam* $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$ *e sejam* f *e* g *funções integráveis no intervalo* $]a,b[$*, tais que* $0 \leq f(x) \leq g(x)$*, qualquer que seja* $x \in]a,b[$*. Se o integral* $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$ *converge, o mesmo acontece com* $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$*, tendo-se ainda* $\displaystyle 0 \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx$*.*

Equivalentemente, se $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ *diverge (para* $+\infty$*, já que* f *é não negativa), o mesmo acontece com* $\displaystyle\int_a^b g(x)\,dx$*.*

Exercício 3.6.6 *Escreva um enunciado análogo ao da proposição anterior para funções não positivas.*

Exemplo 3.6.7 *Mostre que* $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}\,dx$ *converge.*

Solução. Trata-se de um integral impróprio de dois tipos:

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}\,dx = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}\,dx + \int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}\,dx.$$

Em $]0,1]$ tem-se $\sqrt{x+x^4} > \sqrt{x}x$, logo

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}\,dx \leq \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}\,dx = 2.$$

Em $[1,+\infty[$ tem-se $\sqrt{x+x^4} > \sqrt{x^4} = x^2$, logo

$$\int_1^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}\,dx \leq \int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^2}\,dx = 1.$$

Tem-se então $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{\sqrt{x+x^4}}\,dx \leq 3$; em particular, o integral dado converge. ■

Capítulo 4

Técnicas de primitivação

Devido ao Teorema Fundamental do Cálculo, saber calcular primitivas é extremamente importante. Neste capítulo veremos algumas técnicas que nos permitem calcular primitivas de funções dadas por expressões razoavelmente complicadas.

4.1 Primitivação por substituição

O *método de substituição* é talvez a técnica mais importante para calcular primitivas que não conseguimos determinar por inspecção directa. Trata-se da versão integral da regra da cadeia:

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = f(g(x))\ (+C)$$

O formalismo seguinte pode ajudar a memorizar:

Seja $u = g(x)$. Então $\dfrac{du}{dx} = g'(x)$, ou, escrito na forma diferencial, $du = g'(x)\, dx$. Logo

$$\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f'(u)\, du = f(u)\ (+C) = f(g(x))\ (+C)$$

Exemplo 4.1.1 *Calcule*
(a) $\displaystyle\int \frac{x}{x^2+1}\, dx$; *(b)* $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}(3\ln x)}{x}\, dx.$

Solução. (a) Seja $u = x^2+1$. Vem $du = 2x\, dx$, donde $x\, dx = \frac{1}{2}\, du$. Então:

$$\int \frac{x}{x^2+1}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{du}{u} = \frac{1}{2}\ln|u| = \frac{1}{2}\ln(x^2+1) = \ln\sqrt{x^2+1}.$$

(b) Usando a substituição $u = 3\ln x$, vem $du = \frac{3}{x}\,dx$. Então:

$$\int \frac{\operatorname{sen}(3\ln x)}{x}\,dx = \frac{1}{3}\int \operatorname{sen} u\,du = -\frac{1}{3}\cos u = -\frac{1}{3}\cos(3\ln x). \qquad \blacksquare$$

Exercício 4.1.2 *Mostre que:*

1. $\displaystyle\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arcsen}\frac{x}{a} \quad (a>0)$;
2. $\displaystyle\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arctg}\frac{x}{a} \quad (a\neq 0)$.

Sugestão: *use a substituição* $u = \frac{x}{a}$.

As fórmulas dadas pelo exercício anterior serão utilizadas muitas vezes e devem ser memorizadas.

Normalmente a substituição $u = g(x)$ funciona bem se $g'(x)$ aparece como factor da função integranda. Em geral, substituições forçadas não levam a lado nenhum.

É por vezes conveniente fazer algumas manipulações algébricas antes de fazer qualquer substituição, como o exemplo seguinte ilustra.

Exemplo 4.1.3 *Calcule* $\displaystyle\int \frac{dx}{x^2+4x+5}$.

Solução. Começamos por fazer uma pequena manipulação algébrica no denominador:

$$\int \frac{dx}{x^2+4x+5} = \int \frac{dx}{(x+2)^2+1}.$$

Usando agora a substituição $u = x+2$, $du = dx$, vem

$$\int \frac{du}{u^2+1} = \operatorname{arctg} u = \operatorname{arctg}(x+2). \qquad \blacksquare$$

Por vezes é conveniente fazer substituições no integral definido. Neste caso é necessário ter em conta que os limites de integração podem precisar de ser alterados, como se afirma na seguinte proposição.

Proposição 4.1.4 *Suponhamos que g é derivável no intervalo $[a,b]$ e que f é contínua em $g([a,b])$. Então*

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du.$$

Exemplo 4.1.5 *Calcule* $\displaystyle\int_0^8 \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx.$

Solução. **1º processo:**

Fazendo $u=\sqrt{x+1}$, vem $du=\frac{dx}{2\sqrt{x+1}}$. Se $x=0$, vem $u=1$ e se $x=8$, vem $u=3$. Logo

$$\int_0^8 \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int_1^3 \cos u\,du = [2\operatorname{sen} u]_1^3 = 2\operatorname{sen}3 - 2\operatorname{sen}1.$$

2º processo

Começamos por calcular a primitiva geral (usando a mesma substituição). Tem-se:

$$\int \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx = 2\int \cos u\,du = 2\operatorname{sen} u = 2\operatorname{sen}\sqrt{x+1}.$$

Assim,

$$\int_0^8 \frac{\cos\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}\,dx = \left[2\operatorname{sen}\sqrt{x+1}\right]_0^8 = 2\operatorname{sen}3 - 2\operatorname{sen}1. \quad \blacksquare$$

4.1.1 Integrais trigonométricos

O modo de calcular um integral da forma

$$\int \operatorname{sen}^m x \cos^n x\,dx$$

depende da paridade de m e n.

Se m ou n é ímpar, deve usar-se a fórmula fundamental da trigonometria e uma substituição adequada, como é ilustrado pelo exemplo seguinte.

Exemplo 4.1.6 *Calcule* $\displaystyle\int \operatorname{sen}^3 x\cos^8 x\,dx.$

Solução. Tem-se:

$$\int \operatorname{sen}^3 x\cos^8 x\,dx = \int (1-\cos^2 x)\cdot\cos^8 x\cdot\operatorname{sen} x\,dx.$$

Fazendo a substituição $u=\cos x$, $du=-\operatorname{sen} x\,dx$, vem:

$$-\int (1-u^2)u^8\,du = \int (u^{10}-u^8)\,du = \frac{u^{11}}{11} - \frac{u^9}{9} = \frac{\cos^{11} x}{11} - \frac{\cos^9 x}{9}. \quad \blacksquare$$

Se m e n forem ambos pares, é conveniente usar alguma das fórmulas

$$\cos^2 x = \frac{1}{2}(1+\cos 2x) \ \text{ ou } \ \operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{2}(1-\cos 2x),$$

para reduzir os expoentes.

Exemplo 4.1.7 *Calcule:*
(a) $\int \cos^2 x\, dx$; *(b)* $\int \operatorname{sen}^4 x\, dx$.

Solução. (a)

$$\int \cos^2 x\, dx = \frac{1}{2}\int (1+\cos 2x)\, dx = \frac{x}{2}+\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}(x+\operatorname{sen} x\ \cos x).$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \operatorname{sen}^4 x\, dx &= \frac{1}{4}\int (1-\cos 2x)^2\, dx = \frac{1}{4}\int (1-2\cos 2x+\cos^2 2x)\, dx\\ &= \frac{x}{4}-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{8}\int (1+\cos 4x)\, dx = \frac{x}{4}-\frac{1}{4}\operatorname{sen} 2x+\frac{1}{32}\operatorname{sen} 4x.\end{aligned}$$

■

4.2 Primitivação por partes

Assim como o método de substituição pode de algum modo ser visto como "inverso" da regra da cadeia, a primitivação por partes pode ser encarada como "inversa" da regra da derivada do produto.

Suponhamos que $u(x)$ e $v(x)$ são funções deriváveis. Tem-se

$$\frac{d}{dx}(u(x)\cdot v(x)) = u(x)\cdot\frac{dv}{dx}+v(x)\cdot\frac{du}{dx}$$

Integrando, obtemos a fórmula da primitivação por partes:

$$\int u(x)\frac{dv}{dx}\, dx = u(x)v(x) - \int v(x)\frac{du}{dx}\, dx$$

ou, numa escrita simplificada muito conveniente para fácil memorização,

$$\int uv' = uv - \int vu'.$$

O que se faz neste método é considerar a função integranda como produto de outras duas, u e v', em que v' é uma função fácil de primitivar e $\int vu'$ é (em geral) mais fácil de calcular que o integral dado. Os exemplos seguintes são ilustrativos.

Exemplo 4.2.1 *Calcule* $\int x e^{2x}\, dx$.

Solução. Sejam $u = x$, $v' = e^{2x}$. Então $u' = 1$ e $v = \frac{1}{2}e^{2x}$. Logo

$$\int x e^{2x}\, dx = x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int \frac{1}{2}e^{2x}\, dx = \frac{x e^{2x}}{2} - \frac{1}{4}e^{2x}. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 4.2.2 *Calcule* $\int \ln x\, dx$

Solução. Considerando $u = \ln x$ e $v' = 1$, tem-se: $u' = \frac{1}{x}$ e $v = x$. Então:

$$\int 1 \cdot \ln x\, dx = x \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x}\, dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x. \qquad \blacksquare$$

Exemplo 4.2.3 *Calcule* $\int e^x \operatorname{sen} x\, dx$.

Solução. Fazendo $u = e^x$ e $v' = \operatorname{sen} x$, tem-se: $u' = e^x$ e $v = -\cos x$. Então:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\, e^x + \int \cos x\, e^x\, dx.$$

Este novo integral é idêntico ao primeiro. Integrando novamente por partes, considerando $u = e^x$ e $v' = \cos x$, tem-se $u' = e^x$ e $v = \operatorname{sen} x$, donde vem:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x\, e^x + \operatorname{sen} x\, e^x - \int e^x \operatorname{sen} x\, dx.$$

Este último integral é igual ao inicial. Considerando esta igualdade como uma equação cuja incógnita é o integral a calcular, obtém-se:

$$\int e^x \operatorname{sen} x\, dx = \frac{1}{2}(-e^x \cos x + e^x \operatorname{sen} x). \qquad \blacksquare$$

4.3 Primitivas de funções racionais

Para primitivar uma função racional (quando não conseguimos encontrar uma primitiva por observação directa), começamos por *decompô-la em fracções parciais*.

Proposição 4.3.1 *Uma função racional* $\frac{f(x)}{g(x)}$ *pode ser escrita como uma soma de funções racionais cujos denominadores envolvem potências de polinómios de grau não superior a* 2.

Vamos concretizar: se $f(x)$ e $g(x)$ são polinómios e o grau de $f(x)$ é menor que o grau de $g(x)$, então podemos escrever

$$\frac{f(x)}{g(x)} = F_1 + F_2 + \cdots F_r$$

onde cada F_k $(1 \leq k \leq r)$ tem uma das formas

$$\frac{A}{(ax+b)^n} \quad \text{ou} \quad \frac{Ax+B}{(ax^2+bx+c)^n},$$

para números reais A e B, n inteiro não negativo e ax^2+bx+c irredutível (isto é, não tem raízes reais, ou seja $b^2-4ac<0$). Os F_k dizem-se *fracções parciais*.

Vamos em seguida indicar algumas *regras* para decompor $\frac{f(x)}{g(x)}$ em fracções parciais.

Nota 4.3.2 *Podemos supor que o grau de $f(x)$ é menor que o de $g(x)$. Se assim não for, utilizamos o algoritmo da divisão de polinómios para escrever $f(x) = g(x)\cdot q(x)+r(x)$, onde o grau do resto $r(x)$ é inferior ao do divisor $g(x)$ e obtemos $\frac{f(x)}{g(x)} = q(x)+\frac{r(x)}{g(x)}$, estando $\frac{r(x)}{g(x)}$ nas condições pretendidas.*

1. Exprimimos $g(x)$ como produto de factores da forma $ax+b$ ou ax^2+bx+c em que $b^2-4ac<0$. Agrupando os factores repetidos, obtemos uma expressão de $g(x)$ como produto de factores da forma $(ax+b)^n$ e $(ax^2+bx+c)^n$.

2. (i) A contribuição de cada factor da forma $(ax+b)^n$, com $n \geq 1$, para a decomposição em fracções parciais é uma soma da forma

$$\frac{A_1}{ax+b} + \frac{A_2}{(ax+b)^2} + \cdots + \frac{A_n}{(ax+b)^n}$$

onde cada A_n é um número real.

(ii) Por cada factor da forma $(ax^2+bx+c)^n$ com $n \geq 1$ e ax^2+bx+c irredutível, a decomposição contém uma soma de fracções parciais da forma

$$\frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \cdots \frac{A_nx+B_n}{(ax^2+bx+c)^n}$$

onde os A_k e os B_k são números reais.

Exemplo 4.3.3 *Sabendo que $\frac{1}{2}$ é raiz do polinómio $2x^3-x^2+8x-4$, calcule*

$$I = \int \frac{2x^4-x^3+9x^2-5x-21}{2x^3-x^2+8x-4}\,dx.$$

Solução. Como o grau do numerador é maior que o do denominador, começamos por dividir.

$$
\begin{array}{rrrrr|l}
2x^4 & -\ x^3 & +\ 9x^2 & -\ 5x & -\ 21 & 2x^3 - x^2 + 8x - 4 \\
\cline{6-6}
-2x^4 & +\ x^3 & -\ 8x^2 & +\ 4x & & x \\
\cline{1-5}
 & & x^2 & -\ x & -\ 21 &
\end{array}
$$

Obtemos o quociente x e o resto x^2-x-21, logo

$$I=\int\left(x+\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}\right)dx=\int x\,dx+\int\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}\,dx.$$

Agora vamos factorizar o denominador. Para isso usamos o facto de conhecer uma das suas raízes e aplicamos a regra de Ruffini.

$$
\begin{array}{c|cccc}
 & 2 & -1 & 8 & -4 \\
\frac{1}{2} & & 1 & 0 & 4 \\
\hline
 & 2 & 0 & 8 & \boxed{0}
\end{array}
$$

Obtemos então: $2x^3-x^2+8x-4=(x-\frac{1}{2})(2x^2+8)=(2x-1)(x^2+4)$. Como x^2+4 é irredutível, tem-se:

$$\frac{x^2-x-21}{2x^3-x^2+8x-4}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{C}{2x-1},$$

donde

$$x^2-x-21=(Ax+B)(2x-1)+C(x^2+4).$$

Agora devemos determinar A, B e C. Desenvolvendo o membro da direita, obtemos

$$x^2-x-21=(2A+C)x^2+(-A+2B)x+(-B+4C).$$

Utilizando agora o facto de dois polinómios serem iguais se e só se os coeficientes dos termos dos mesmos graus forem iguais (*método dos coeficientes indeterminados*), temos

$$\left\{\begin{array}{rrrl} 2A & & +C & =1 \\ -A & +2B & & =-1 \\ & -B & +4C & =-21 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rr} A= & 3 \\ B= & 1 \\ C= & -5 \end{array}\right.$$

Temos então:

$$
\begin{aligned}
I &=\int x\,dx+\int\frac{3x}{x^2+4}\,dx+\int\frac{1}{x^2+4}\,dx-\int\frac{5}{2x-1}\,dx \\
&=\frac{x^2}{2}+\frac{3}{2}\ln|x^2+4|+\frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{x}{2}-\frac{5}{2}\ln|2x-1|
\end{aligned}
$$

■

Exercício 4.3.4 *Calcule*

$$I = \int \frac{3x^3 - 18x^2 + 29x - 4}{(x+1)(x-2)^3}\, dx.$$

Solução. $I = 2\ln|x+1| + \ln|x-2| + \dfrac{3}{x-2} - \dfrac{1}{(x-2)^2}.$

Apresentamos a seguir uma resolução do exercício onde apenas faltam pequenos detalhes. Tem-se

$$\frac{3x^3 - 18x^2 + 29x - 4}{(x+1)(x-2)^3} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-2} + \frac{C}{(x-2)^2} + \frac{D}{(x-2)^3}$$

Observamos que a melhor estratégia para calcular os coeficientes nem sempre é resolver um sistema. Tem-se

$$3x^3 - 18x^2 + 29x - 4 = A(x-2)^3 + B(x-2)^2(x+1) + C(x-2)(x+1) + D(x+1).$$

Fazendo $x = 2$, obtemos $24 - 72 + 58 - 4 = 3D$, donde $6 = 3D$ e $D = 2$.
Fazendo $x = -1$, obtemos $-54 = -27A$, donde $A = 2$.
O coeficiente de x^3 no segundo membro é $A + B$, logo $A + B = 3$, donde $B = 1$.
Comparando agora os termos constantes (que se obtêm fazendo $x = 0$), temos $-4 = -8A + 4B - 2C + D$, donde $-4 = -16 + 4 - 2C + 2$, logo $C = -3$. ∎

Capítulo 5

Aplicações dos integrais

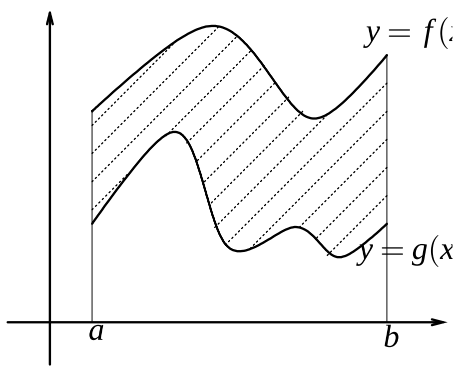
Neste capítulo apresentamos algumas aplicações dos integrais. Existem muitas outras, como se pode constatar consultando a bibliografia.

5.1 Áreas de regiões planas

O facto de os integrais simples serem adequados para calcular a área de certas regiões planas foi precisamente o que usámos como motivação para introduzir o conceito de integral. Assim, não é surpreendente que a primeira secção de um capítulo dedicado às aplicações dos integrais seja sobre o cálculo de áreas.

Suponhamos que pretendemos calcular a área da região limitada pelos gráficos de duas funções (integráveis) $y = f(x)$ e $y = g(x)$ e pela rectas $x = a$ e $x = b$. Essa área é a diferença entre as áreas $\int_a^b f(x)\,dx$ e $\int_a^b g(x)\,dx$, ou seja, a área que pretendemos calcular é dada por:

$$\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



Exemplo 5.1.1 *Determine a área da região limitada pelos gráficos de* $y = -x^2$ *e* $y = \sqrt{x}$*, entre* $x = 0$ *e* $x = 4$.

Solução. A área que pretendemos determinar é dada por:

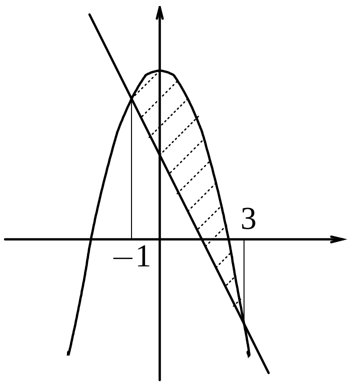
$$\int_0^4 (\sqrt{x} - (-x^2))\, dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = \frac{16}{3} + \frac{64}{3} = \frac{80}{3}$$

■

Exemplo 5.1.2 *Determine a área da região limitada pelos gráficos de* $y + x^2 = 6$ *e* $y + 2x - 3 = 0$.

Solução. Na figura seguinte vê-se um esboço da região em causa. A sua área é dada pelo integral da diferença das funções $y = 6 - x^2$ e $y = -2x + 3$, entre as abcissas dos dois pontos de intersecção dos dois gráficos.

Para determinar os limites de integração, resolvemos a equação $6 - x^2 = -2x + 3$, obtendo as soluções -1 e 3.



Assim, a área pretendida é:

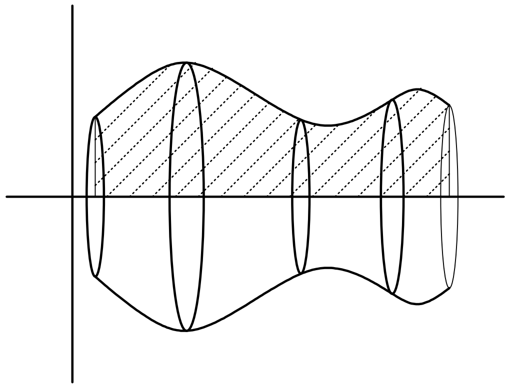
$$\begin{aligned}
\int_{-1}^{3} (6 - x^2 + 2x - 3)\, dx &= \int_{-1}^{3} (3 - x^2 + 2x)\, dx \\
&= \left[3x - \frac{x^3}{3} + x^2\right]_{-1}^{3} \\
&= (9 - 9 + 9) - \left(-3 + \frac{1}{3} + 1\right) = \frac{32}{3}.
\end{aligned}$$

■

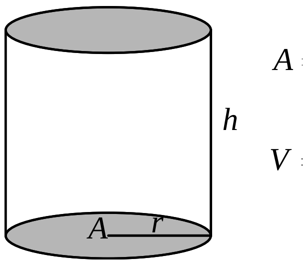
5.2 Volumes de sólidos de revolução

Os integrais simples podem também ser usados para calcular volumes de certos sólidos muito especiais: os sólidos de revolução.

Os *sólidos de revolução* são gerados rodando uma região plana em torno de um eixo.

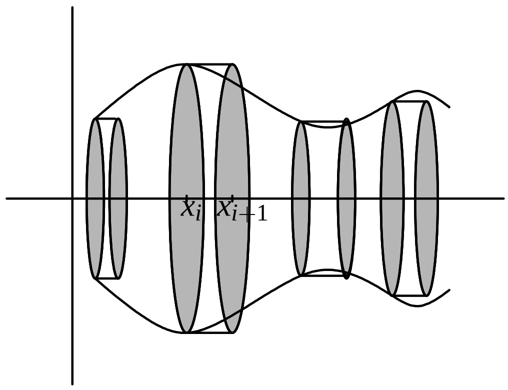


Sabemos calcular o volume de um cilindro (produto da área da base pela altura).



Esse conhecimento vai-nos permitir calcular volumes de sólidos de revolução.

Para tal, dividimos o sólido em "fatias" muito finas, as quais se aproximam de cilindros de altura muito pequena e somamos os volumes dessas fatias.



Seja R uma região limitada pelo gráfico de uma função contínua $y = f(x)$ e pelas rectas $y = 0$, $x = a$ e $x = b$. Rodando R em torno do eixo dos xx, obtemos um sólido de revolução. A área de cada secção do sólido perpendicular ao eixo dos xx no ponto x é $\pi(f(x))^2$ (pois essa secção é um círculo de raio $f(x)$). Assim, se considerarmos uma partição $P = \{x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ do intervalo $[a,b]$ e usarmos a notação $\Delta\, x_i = x_i - x_{i-1}$, temos que

$$\sum_{i=1}^{n} \pi(f(x_{i-1}))^2\, \Delta\, x_i$$

. é uma aproximação do volume do sólido. Fazendo n tender para $+\infty$, com $\Delta\, x_i \to 0$, obtemos

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\, dx$$

que se diz o *volume do sólido de revolução* gerado pela rotação da região R em torno do eixo dos xx.

Exemplo 5.2.1 *Determine o volume da esfera de raio a.*

Solução. A esfera pode ser gerada rodando o semicírculo $0 \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}$, $-a \leq x \leq a$, em torno do eixo dos xx. Então:

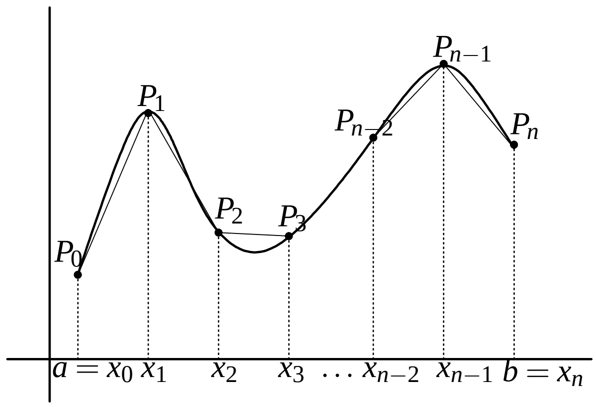
$$\begin{aligned} V &= \pi \int_{-a}^{a} \left(\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2 dx = 2\pi \int_0^a (a^2 - x^2)\, dx \\ &= 2\pi \left[a^2 x - \tfrac{x^3}{3}\right]_0^a = 2\pi\, (a^3 - \tfrac{a^3}{3}) = \tfrac{4}{3}\, \pi\, a^3 \text{ unidades de volume.} \end{aligned}$$

■

5.3 Comprimento do gráfico de uma função

Seja f uma função definida num intervalo $[a,b]$ onde tem derivada f' contínua (isto é, f é de classe C^1 em $[a,b]$).

Seja C o gráfico de f. Uma partição de $[a,b]$ fornece uma aproximação poligonal de C. De facto, para a partição $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$, e sendo P_i o ponto $(x_i, f(x_i))$, $(0 \leq i \leq n)$, $P_0 P_1 \cdots P_n$ é uma aproximação poligonal de C.



O comprimento da linha poligonal $P_0 P_1 \cdots P_n$ é

$$\begin{aligned} L_n &= \sum_{i=1}^{n} |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2} \\ &= \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + \left(\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}\right)^2} \cdot \Delta x_i \end{aligned}$$

onde $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Pelo teorema do valor médio, existe um número $c_i \in]x_{i-1}, x_i[$ tal que

$$\frac{f(x_i) - f(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}} = f'(c_i),$$

logo

$$L_n = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + (f'(c_i))^2}\, \Delta x_i.$$

Assim, L_n é como uma soma de Riemann para $\displaystyle\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$.

É então natural definir o *comprimento da curva* $y = f(x)$ (f de classe C^1) de $x = a$ a $x = b$ como sendo

$$s = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, dx$$

Exemplo 5.3.1 *Determine o comprimento da curva* $y = x^{\frac{2}{3}}$ *de* $x = 1$ *a* $x = 8$.

Solução. A derivada $y' = \frac{2}{3}\, x^{-\frac{1}{3}}$ é contínua em $[1, 8]$. Tem-se então

$$s = \int_1^8 \sqrt{1 + \frac{4}{9}\, x^{-\frac{2}{3}}}\, dx = \int_1^8 \frac{\sqrt{9\, x^{\frac{2}{3}} + 4}}{3\, x^{\frac{1}{3}}}\, dx.$$

Fazendo a substituição $u = 9\,x^{\frac{2}{3}} + 4,\quad du = 6\,x^{-\frac{1}{3}}\,dx$, vem:
$s = \dfrac{1}{18}\displaystyle\int_{13}^{40} u^{\frac{1}{2}}\,du = \dfrac{1}{27}\left[u^{\frac{3}{2}}\right]_{13}^{40} = \dfrac{40^{\frac{3}{2}} - 13^{\frac{3}{2}}}{27}$ unidades. ■

Exercício 5.3.2 *Determine o comprimento da curva* $y = x^4 + \frac{1}{32x^2}$ *de* $x = 1$ *a* $x = 2$.

Solução. $15 + \frac{3}{128}$ ■

5.4 Área de uma superfície de revolução

Mostra-se que se $f'(x)$ é contínua em $[a,b]$ e a curva $y = f(x)$ é rodada em torno do eixo dos xx, então a área da superfície de revolução assim gerada é

$$A = 2\pi \int_a^b |f(x)|\,\sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx.$$

Exemplo 5.4.1 *Determine a área da superfície de uma esfera de raio a.*

Solução. A esfera pode ser gerada rodando a semicircunferência $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ $(-a \le x \le a)$ em torno do eixo dos xx. Tem-se

$$y' = -\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{x}{y}.$$

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_{-a}^{a} y\,\sqrt{1 + \left(\frac{x}{y}\right)^2}\,dx = 4\pi \int_0^a \sqrt{y^2 + x^2}\,dx = 4\pi \int_0^a \sqrt{a^2}\,dx \\ &= 4\pi\,[ax]_0^a = 4\pi\,a^2 \text{ unidades de área.} \end{aligned}$$

■

Capítulo 6

Sucessões e séries numéricas

Este capítulo começa com uma breve revisão sobre sucessões de números reais. São depois introduzidas as séries e estudados diversos critérios de convergência.

6.1 Sucessões de números reais

Uma *sucessão* é uma função de $\mathbb{N}$ (ou $\mathbb{N}_0$) em $\mathbb{R}$. Em vez de se escrever

$$f: \begin{array}{ccc} \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ n & \longmapsto & a_n \end{array},$$

costuma usar-se a notação $(a_n)_{n\geq 1}$ ou simplesmente $(a_n)_n$ para denotar a sucessão de *termo geral* a_n.

Os modos mais comuns de definir uma sucessão são: dar o seu termo geral ou defini-la por *recorrência*. A sucessão do exemplo seguinte é dada pelo seu termo geral.

Exemplo 6.1.1 $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$.

A seguir temos uma sucessão definida por recorrência: são dados os primeiros termos e uma fórmula que permite calcular cada termo a partir dos termos anteriores. Trata-se da famosa *sucessão de Fibonacci*.

Exemplo 6.1.2 $a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_{n+2} = a_n + a_{n+1}$.

A sucessão $(b_n)_n$ diz-se uma *subsucessão* de $(a_n)_n$ se $b_n = a_{\varphi(n)}$, para alguma função $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ estritamente crescente.

Exemplo 6.1.3 *$(b_n)_n = (a_{2n})_n$ e $(c_n)_n = (a_{2n+1})_n$ são subsucessões de $(a_n)_n$.*
No caso da sucessão $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ do exemplo anterior, tem-se:

$$b_n = a_{2n} = 1 + \frac{1}{2n};$$

$$c_n = a_{2n+1} = -1 + \frac{1}{2n+1}$$

Exemplo 6.1.4 *Mostre que a sucessão $(a_n)_n$ de termo geral*

$$a_n = \frac{n}{n^2+1}$$

é decrescente.

Solução. Como $a_n = f(n)$ onde $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$ e $f(x)$ é decrescente em $[1, +\infty[$ (note-se que $f'(x) = \frac{1-x^2}{(1+x^2)^2} \leq 0, \forall x \geq 1$), tem-se que a sucessão dada é decrescente.
[Alternativamente, podiamos mostrar que, para qualquer $n \geq 1$, se tem $a_n \geq a_{n+1}$.] ■

Dizemos que $(a_n)_n$ *converge* para $\ell \in \mathbb{R}$ e escrevemos $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \ell$ ou simplesmente $\lim a_n = \ell$ se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ n \geq N \Rightarrow |a_n - \ell| < \varepsilon.$$

Quando não houver dúvidas sobre qual a variável a considerar, preferiremos a notação $\lim a_n = \ell$. A notação $a_n \to \ell$ também é por vezes usada.

Se uma sucessão não converge, dizemos que *diverge*. Por vezes é conveniente dizer que diverge para $+\infty$ ou $-\infty$. Define-se, por exemplo:

$$a_n \to +\infty \Leftrightarrow \forall R > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ n \geq N \Rightarrow a_n > R$$

Dizemos que a sucessão $(a_n)_n$ é *de Cauchy* se

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N \in \mathbb{N}:\ n, m \geq N\ \Rightarrow\ |a_n - a_m| < \varepsilon$$

O resultado seguinte pode provar-se ser equivalente à propriedade a que chamamos *completude dos números reais*.

Proposição 6.1.5 *Em $\mathbb{R}$ uma sucessão é de Cauchy se e só se for convergente.*

A proposição seguinte resume alguns resultados simples envolvendo sucessões.

Proposição 6.1.6 *1. Se $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ convergem para ℓ_1 e ℓ_2, respectivamente, então:*

(i) $(a_n + b_n)_n$ *converge para* $\ell_1 + \ell_2$;

(ii) $(a_n b_n)_n$ *converge para* $\ell_1 \ell_2$;

(iii) se $\ell_2 \neq 0$, $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)_n$ *converge para* $\frac{\ell_1}{\ell_2}$.

2. *Se* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \ell \in \mathbb{R}$ *e, para* $n \in \mathbb{N}$, $a_n = f(n)$, *então* $a_n \to \ell$.

3. *Se* $(a_n)_n$ *é convergente, então* $(a_n)_n$ *é limitada.*

4. *Se* $(a_n)_n$ *é convergente para* ℓ, *então toda a subsucessão de* $(a_n)_n$ *converge para* ℓ. *[Caso particular importante: Se* $(a_n)_n$ *é convergente para* ℓ, *então, para qualquer* $n_0 \in \mathbb{N}$, $(a_{n+n_0})_n$ *converge para* ℓ.*]*

5. $(|a_n|)_n \to 0 \;\Leftrightarrow\; (a_n)_n \to 0$.

6. *Qualquer sucessão real* $(a_n)_n$ *majorada (respectivamente minorada) e crescente (respectivamente decrescente) é convergente. A convergência dá-se para o supremo (respectivamente ínfimo) do conjunto dos termos da sucessão.*

Exercício 6.1.7 *Calcule* $\lim \sqrt[n]{n}$.
[Sugestão: comparare com o exercício 1.8.11.]

Exercício 6.1.8 *Calcule:*

1. $\lim \frac{n}{2^n}$

2. $\lim \frac{x^n}{n} \quad (x > 1)$.

Solução. 0 e $+\infty$, respectivamente. [Pode usar-se (2) da proposição anterior e a regra de L'Hôpital.] ■

6.2 Séries

Uma *série* é uma soma formal de uma infinidade de termos

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \cdots$$

A sucessão $(a_n)_n$ diz-se a *sucessão geradora* da série. Define-se a *sucessão das somas parciais* $(S_n)_n$ por:

$$\begin{array}{rcl} S_1 & = & a_1 \\ S_2 & = & a_1 + a_2 \\ S_3 & = & a_1 + a_2 + a_3 \\ & \cdots & \\ S_n & = & \sum_{k=1}^{n} a_k \end{array}$$

Dizemos que uma série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *converge* para $s \in \mathbb{R}$ e escrevemos $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ se se tiver $\lim S_n = s$.

Assim, uma série converge se e só se a sucessão das suas somas parciais convergir. O número para o qual converge esta sucessão diz-se a *soma da série*. Se a sucessão das somas parciais divergir, dizemos que a série *diverge*.

É claro que em vez de termos os índices a começar em 1, podemos tê-los a começar em qualquer outro número natural. Para $n_0 \in \mathbb{N}$, define-se

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n = a_{n_0} + a_{n_0+1} + \cdots$$

Proposição 6.2.1 *Sejam $n_0 \in \mathbb{N}$ e $(a_n)_n$ uma sucessão. Tem-se:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge } \Leftrightarrow \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

Proposição 6.2.2 *Se $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ convergem, então:*

(i) $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n)$ *converge e* $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

(ii) Para qualquer $c \in \mathbb{R}$, $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n$ *converge e tem-se* $\sum_{n=1}^{\infty} c\, a_n = c \sum_{n=1}^{\infty} a_n$.

Para $r \in \mathbb{R}$, a série $\sum_{n=1}^{\infty} r^n$ diz-se a *série geométrica* de razão r.

Exemplo 6.2.3 *Se $|r| < 1$, então a série geométrica de razão r converge para $\frac{r}{1-r}$. De facto:*

Seja $(S_n)_n$ a sucessão das somas parciais. Tem-se

$$\begin{array}{rcccccccccccc} S_n & = & r & + & r^2 & + & \cdots & + & r^{n-1} & + & r^n & & \\ rS_n & = & & & r^2 & + & r^3 & + & \cdots & + & r^n & + & r^{n+1} \end{array}$$

donde $(1-r)S_n = r - r^{n+1}$, ou seja, $S_n = \frac{r-r^{n+1}}{1-r}$.

Como $|r| < 1$, tem-se $\lim\limits_{n\to+\infty} r^{n+1} = 0$, logo $(S_n)_n$ converge para $\frac{r}{1-r}$.

Exemplo 6.2.4 *Mostre que série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge e tem soma 1.*

Solução. A sucessão das somas parciais tem termo geral

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Tem-se então $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n = 1$, logo $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ ∎

Proposição 6.2.5 *Se a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge, então $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.*

Demonstração. Seja $s = \lim\limits_{n\to+\infty} S_n$. Então também $\lim\limits_{n\to+\infty} S_{n+1} = s$, donde

$$\lim_{n\to+\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to+\infty} (S_{n+1} - S_n) = s - s = 0.$$

Logo $(a_n)_n$ converge para 0. ∎

Exemplo 6.2.6 *Se $|r| \geq 1$, a série geométrica de razão r não converge, pois $\lim\limits_{n\to+\infty} r^n \neq 0$.*

O recíproco da proposição anterior não é válido, como mostra o exemplo seguinte:

Exemplo 6.2.7 *A* série harmónica $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ *diverge (apesar de $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$).*

$$\begin{array}{cccccccccccc} & 1 & + & \frac{1}{2} & + & \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) & + & \left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right) & + & \left(\frac{1}{9}+\cdots+\frac{1}{16}\right) & + & \cdots \\ \geq & 1 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & + & \cdots, \end{array}$$

logo a sucessão das somas parciais não é limitada, pelo que a série não pode convergir.

6.2.1 Critérios de convergência para séries de termos positivos

Começamos por observar que os resultados enunciados para séries de termos positivos são de facto válidos para séries cujos termos são positivos, a partir de certa ordem. Para o caso de séries de termos negativos podem ser adaptados: basta estudar a série simétrica. Observamos ainda que uma série de termos positivos, quando diverge, diverge para $+\infty$.

Proposição 6.2.8 (1º critério de comparação) *Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sucessões de termos positivos. Suponhamos que, a partir de certa ordem n_0, se tem $0 \leq a_n \leq b_n$. Então*

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \text{ converge } \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \text{ converge.}$$

(Equivalentemente, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ diverge.)

Demonstração. Sejam $s_n = \sum_{k=n_0}^{n_0+n} a_k$ e $t_n = \sum_{k=n_0}^{n_0+n} b_k$.

Como $b_k \geq 0$, $(t_n)_n$ é crescente. Além disso, $(t_n)_n$ converge para $\sum_{n=n_0}^{\infty} b_n$, logo $(t_n)_n$ é majorada. Mas então, como $s_n \leq t_n$ e $a_k \geq 0$, conclui-se que $(s_n)_n$ é crescente e majorada, logo é convergente. ■

Exemplo 6.2.9 *Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ diverge.*

Solução. Como $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, resulta da Proposição 6.2.2 que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ também diverge. Como $\frac{1}{2n-1} \geq \frac{1}{2n}$ e a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ diverge, resulta do 1º critério de comparação que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ também diverge. ■

Exemplo 6.2.10 *A série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge.*

Solução. Vimos no Exemplo 6.2.4 que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ converge. Como $0 < \frac{1}{(n+1)^2} \leq \frac{1}{n(n+1)}$, resulta que $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$ converge, donde $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge e, portanto, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ converge. ■

Proposição 6.2.11 (2º critério de comparação) *Sejam $(a_n)_n$ e $(b_n)_n$ sucessões de termos positivos tais que $\lim_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c$. Então:*

(i) Se $c \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

(ii) Se $c = 0$, então $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

(iii) Se $c = +\infty$, então $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge $\Rightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Demonstração. (i) Suponhamos que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge e seja n_0 tal que

$$n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \frac{a_n}{b_n} < c+1.$$

Então $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; a_n < (c+1)b_n$.

Como $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge, $\sum_{n=1}^{\infty} (c+1)b_n$ converge, donde, pelo 1º critério, se conclui que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

[O recíproco é análogo; basta observar que $\lim_{n\to+\infty} \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{c}$ (note-se que $c \neq 0$).]

A demonstração das alíneas (ii) e (iii) fica como exercício. ■

Exemplo 6.2.12 *Mostre que a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^3}$ converge.*

Solução. Consideremos a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, que converge (Exemplo 6.2.10), e usemos o 2º critério de comparação. Tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{\ln n}{n^3}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0,$$

logo a série dada converge. ■

Proposição 6.2.13 (Critério da Razão) *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão de termos positivos e tal que* $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=L\in\mathbb{R}$.

Se $L<1$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *converge.*

Se $L>1$, então $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ *diverge.*

Demonstração. Se $L<1$, suponhamos $r\in]L,1[$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=L$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$n\geq n_0 \;\Rightarrow\; \frac{a_{n+1}}{a_n}<r$$

Então $a_{n_0+1}<r\,a_{n_0},\ \ldots,\ a_{n_0+k}<r^k\,a_{n_0}$. Como $r<1$, tem-se que a série $\sum\limits_{k=1}^{\infty}r^k\,a_{n_0}$ converge, já que se trata de uma série geométrica de razão menor que 1.

Usando o 1º critério de comparação, concluimos que $\sum\limits_{k=1}^{\infty}a_{n_0+k}$ converge, donde $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ converge.

Suponhamos agora que $L>1$ e seja $r\in]1,L[$. Como $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=L$, existe $n_0\in\mathbb{N}$ tal que

$$n\geq n_0 \;\Rightarrow\; \frac{a_{n+1}}{a_n}>r.$$

Então, para $k\in\mathbb{N}$, $a_{n_0+k}>r^k\,a_{n_0}$. Como $r>1$, tem-se $\lim\limits_{n\to+\infty}r^k\,a_{n_0}=+\infty$, logo $\lim\limits_{n\to+\infty}a_n=+\infty$ e $(a_n)_n$ não converge para 0, logo a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ diverge. ∎

Nota 6.2.14 *Usando a notação da proposição anterior tem-se o seguinte:*

- *Se $L=+\infty$, tem-se que $a_n\not\to 0$ logo a série diverge.*
- *Se $L=1$ nada se pode concluir.*
- *Se não existir $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$, também não se pode concluir nada.*

Exemplo 6.2.15 *Mostre que a série* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n!}$ *converge.*

Solução. Tem-se $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}}=\frac{1}{n+1}$. Logo $\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=0<1$ e, portanto, a série converge. ∎

Proposição 6.2.16 (Critério da Raiz) *Seja $(a_n)_n$ uma sucessão de termos positivos e seja $\lim\limits_{n\to+\infty} \sqrt[n]{a_n} = \ell$.*

Se $\ell < 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Se $\ell > 1$, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ diverge.

Demonstração. Se $\ell > 1$, $a_n \not\to 0$, logo a série diverge.

Se $\ell < 1$, para $0 < c < 1$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n \geq n_0 \;\Rightarrow\; \sqrt[n]{a_n} \leq c < 1$.

Mas $\sqrt[n]{a_n} \leq c \;\Leftrightarrow\; a_n \leq c^n$ e sendo $0 < c < 1$, a série geométrica $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c^n$ converge, logo, pelo 1º critério de comparação, a série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ∎

Exemplo 6.2.17 *Estude a convergência da série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,a^n$, com $a > 0$.*

Solução. Tem-se

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n\,a^n} = a \cdot \lim_{n\to+\infty} \sqrt[n]{n} = a$$

Assim, o critério da raiz permite-nos concluir que a série converge se $0 < a < 1$ e diverge se $a > 1$. No caso de $a = 1$ (em que o critério é inconclusivo), verifica-se que a série é gerada pela sucessão $(n)_n$, que não converge para 0, logo a série diverge. ∎

Nota 6.2.18 *Quando o limite existe, o critério da raiz resolve exactamente os mesmos problemas que o da razão, sendo este, em geral, mais fácil de aplicar.*

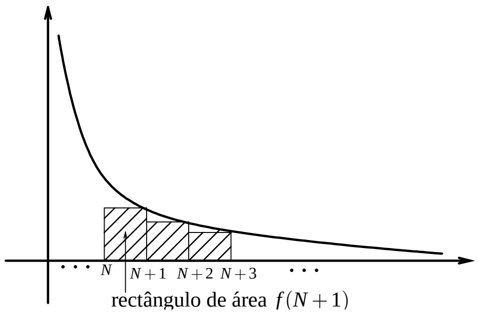
Quando o limite não existe, trabalha-se com o limite superior e o critério da raiz pode ser mais eficaz.

Proposição 6.2.19 (Critério do integral) *Consideremos a série de termos não negativos $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$. Suponhamos que $a_n = f(n)$, onde $f(x)$ é uma função contínua, positiva e não crescente num intervalo $[N, +\infty[$, para algum inteiro positivo N. Então: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ e $\int_N^{+\infty} f(x)\,dx$ são da mesma natureza (isto é, convergem ambos ou divergem ambos).*

Demonstração. Consideremos a soma parcial $s_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

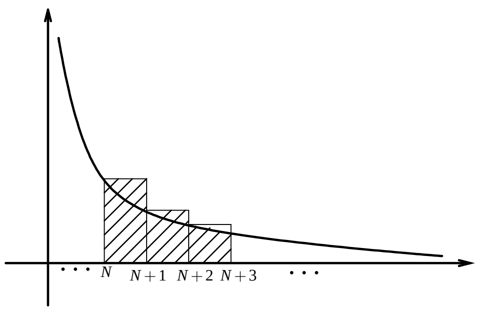
Se $n > N$, tem-se:

$$\begin{aligned} s_n &= s_N + a_{N+1} + a_{N+2} + \cdots + a_n \\ &= s_N + f(N+1) + f(N+2) + \cdots + f(n) \\ &\leq s_N + \int_N^{+\infty} f(x)\,dx \end{aligned}$$



Se o integral converge, então a sucessão $(s_n)_n$ é limitada superiormente. Como também é monótona crescente, converge, isto é, $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge.

Suponhamos agora que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge para s. Então $\int_N^{+\infty} f(x)\,dx$, que é igual à área da região do plano abaixo do gráfico de $y = f(x)$ e acima de $y = 0$, a partir de $x = N$, é menor ou igual à soma das áreas dos rectângulos da figura (cada um deles com base uma unidade), ou seja:



$$\int_N^{+\infty} f(x)\,dx \leq a_N + a_{N+1} + \cdots = s - s_{N-1}.$$

Assim, $\int_N^{+\infty} f(x)\,dx$ representa uma área finita. Resta mostrar que $\lim_{R \to +\infty} \int_N^R f(x)\,dx$ existe, o que se consegue usando facto de $\mathbb{R}$ ser completo (ver a literatura). ∎

Exemplo 6.2.20 *Mostre que a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ *converge se* $p > 1$ *e diverge se* $p \leq 1$.

Solução. (i) Se $p \leq 0$, a sucessão $(\frac{1}{n^p})_n$ tem limite $+\infty$, logo a série diverge.

(ii) Se $p = 1$, trata-se da série harmónica, que já vimos que diverge.

(iii) Se $p > 0$ e $p \neq 1$, então $f(x) = \frac{1}{x^p} = x^{-p}$ é positiva, contínua e decrescente em $[1, +\infty[$. Apliquemos o critério do integral:

$$\int_1^{+\infty} x^{-p}\, dx = \lim_{R \to +\infty} \int_1^R x^{-p}\, dx = \lim_{R \to +\infty} \left[\frac{x^{-p+1}}{-p+1} \right]_1^R = \lim_{R \to +\infty} \frac{R^{-p+1} - 1}{-p+1}.$$

Este limite é igual a $\frac{-1}{-p+1}$ se $p > 1$ e a $+\infty$ se $0 < p < 1$. Donde se conclui que o integral converge no primeiro caso e diverge no segundo. ■

Nota 6.2.21 *O critério do integral não nos diz nada sobre a soma da série (quando converge), apenas garante a sua convergência. Pode em certos casos ser usado para estimar o valor da série, mas não entraremos nesses detalhes.*

6.2.2 Convergência absoluta e condicional

Consideraremos agora séries cujos termos são números reais quaisquer, não necessariamente positivos.

A série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ diz-se *absolutamente convergente* se a série dos módulos $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ converge.

Exemplos 6.2.22

1. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$ *é absolutamente convergente (a série dos módulos é* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$*, que converge).*

2. *A série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ *não é absolutamente convergente (a série dos módulos é a série harmónica, que diverge).*

O resultado seguinte é muito útil, como teremos oportunidade de nos aperceber quando estudarmos as séries de potências.

Proposição 6.2.23 *Uma série absolutamente convergente é convergente.*

Demonstração. Suponhamos que a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é absolutamente convergente e seja $b_n = a_n + |a_n|$, para todo o n.

Como $-|a_n| \leq a_n \leq |a_n|$, tem-se $0 \leq b_n \leq 2|a_n|$, para todo o n.

Usando o critério de comparação, conclui-se que $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ converge.

Como $a_n = b_n - |a_n|$, resulta que $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ converge. ∎

Os critérios aprendidos para séries de termos positivos podem ser usados para testar a convergência absoluta.

Exemplo 6.2.24 *Verifique se é absolutamente convergente a série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n\cos(n\pi)}{2^n}$.

Solução. Começamos por observar que $\cos(n\pi) = (-1)^n$. Usamos o critério da razão para a série dos módulos:

$$\lim_{n\to+\infty} \left| \frac{\frac{(n+1)\cos((n+1)\pi)}{2^{n+1}}}{\frac{n\cos(n\pi)}{2^n}} \right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n+1}{2n} = \frac{1}{2} < 1.$$

Então a série dos módulos converge, isto é a série dada é absolutamente convergente. ∎

Exemplo 6.2.25 *Estude a convergência absoluta da série* $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$.

Solução. Usamos o 2º critério de comparação, comparando a série dos módulos com a série harmónica:

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{1}{2n-1}}{\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

Como a série harmónica diverge, também a série $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1}$ diverge, logo a série dada não converge absolutamente. ∎

6.2.3 Séries alternadas

Uma *série alternada* é uma série da forma $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$, com $a_n \geq 0$.

A série

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\cdots$$

diz-se a *série harmónica alternada*.

Se a série $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ é convergente, mas não absolutamente convergente, diz-se *condicionalmente convergente*. O resultado seguinte também é conhecido por *teste da série alternada*.

Proposição 6.2.26 (Critério de Leibniz) *Suponhamos que a sucessão* $(a_n)_n$ *é positiva, decrescente e convergente para* 0. *Então a série alternada*

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n = a_1-a_2+a_3-a_4+\cdots$$

converge.

Demonstração. Como a sucessão é decrescente, $a_{2n+1} \geq a_{2n+2}$, logo, para todo o $n \in \mathbb{N}$, tem-se

$$s_{2n+2} = s_{2n}+a_{2n+1}-a_{2n+2} \geq s_{2n}$$

Então a subsucessão dos termos de ordem par da sucessão das somas parciais, $(s_{2n})_n$, é crescente.

De modo análogo se verifica que a subsucessão dos termos de ordem ímpar, $(s_{2n-1})_n$, é decrescente.

Como $s_{2n} = s_{2n-1}-a_{2n} \leq s_{2n-1}$, tem-se, para qualquer $n \geq 1$,

$$s_2 \leq s_4 \leq \cdots \leq s_{2n} \leq s_{2n-1} \leq \cdots \leq s_3 \leq s_1$$

Assim, s_2 é um minorante da sucessão decrescente $(s_{2n-1})_n$ e s_1 é majorante da sucessão crescente $(s_{2n})_n$. Pela alínea 6 da Proposição 6.1.6, ambas as sucessões convergem, digamos para ℓ_1 e ℓ_2, respectivamente.

Atendendo a que $a_{2n} = s_{2n-1}-s_{2n}$ e $\lim_{n\to+\infty} a_{2n} = \lim_{n\to+\infty} a_n = 0$, tem-se $0 = \lim_{n\to+\infty}(s_{2n-1}-s_{2n}) = \ell_1-\ell_2$, donde $\ell_1 = \ell_2 = s$. Logo, como toda a soma parcial da série é de uma das formas s_{2n-1} ou s_{2n}, a sucessão $(s_n)_n$ converge para s e, portanto, a série $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}a_n$ é convergente. ∎

Exemplo 6.2.27 *A série harmónica alternada é convergente, visto que a sucessão* $(\frac{1}{n})_n$ *é positiva, decrescente e convergente para* 0*. Como não converge absolutamente, é condicionalmente convergente.*

Exemplo 6.2.28 *Estude a convergência da série* $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$*:*

Solução. Como $\cos(n\pi) = (-1)^n$, vem que $\dfrac{\cos(n\pi)}{\ln n} = \dfrac{(-1)^n}{\ln n}$.

- A série não converge absolutamente:
  Para $n \geq 2$ tem-se $\left|\dfrac{\cos(n\pi)}{\ln n}\right| = \dfrac{1}{\ln n} \geq \dfrac{1}{n} > 0$ e a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge, logo, pelo 1º critério de comparação, a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \left|\frac{\cos(n\pi)}{\ln n}\right|$ também diverge.

- A série converge (logo, é condicionalmente convergente):
  De facto, a sucessão $\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)_{n\geq 2}$ é positiva, decrescente e convergente para 0, logo, pelo critério de Leibniz, a série $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos(n\pi)}{\ln n}$ é convergente.

■

Exemplo 6.2.29 *Estude a convergência da série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$*.*

Solução. A sucessão $\left(\dfrac{n+1}{n}\right)_n$ não converge para 0, logo não é aplicável aqui o critério de Leibniz. Resulta ainda que a sucessão $\left((-1)^{n-1}\dfrac{n+1}{n}\right)_n$ também não converge para 0 (aliás, nem sequer converge), logo a série é divergente, pela Proposição 6.2.5. ■

Proposição 6.2.30 *Seja* $(a_n)_n$ *uma sucessão positiva, decrescente e convergente para* 0 *(isto é, satisfazendo as condições do critério de Leibniz). Suponhamos que a série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$ *(ou* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$*) converge para s.*

Então, para $n \geq 1$*, a n-ésima soma parcial* s_n *da série satisfaz*

$$|s - s_n| \leq |a_{n+1}|$$

Demonstração. A demonstração resulta facilmente da demonstração do critério para as séries alternadas, onde se mostra que qualquer soma parcial par é maior ou igual a s e qualquer soma parcial ímpar é menor ou igual a s. ■

Resulta da proposição anterior que se usarmos s_n como uma aproximação de s estamos a cometer um erro não superior ao valor absoluto do primeiro termo omitido.

Exemplo 6.2.31 *Quantos termos da série* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+2^n}$ *são necessários para calcular a soma da série com erro não superior a* $0,001$*?*

Solução. A sucessão $\displaystyle\left(\frac{1}{1+2^n}\right)_n$ é positiva, decrescente e convergente para 0, logo a série $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+2^n}$ é convergente para um certo $s \in \mathbb{R}$. Tomando s_n como valor aproximado de s, o erro cometido é e tal que:

$$|e| \leq \left|\frac{(-1)^{n+1}}{1+2^{n+1}}\right| = \frac{1}{1+2^{n+1}}.$$

Para obter a precisão pretendida, deve ser $\frac{1}{1+2^{n+1}} \leq 0,001$, ou seja, $1+2^{n+1} \geq 1000$. Como $2^{10} = 1024$, basta tomar $n = 9$, isto é, a soma dos primeiros nove termos. ■

Podemos perguntar-nos o que se passa quanto à convergência e para que valor quando reordenamos os termos de uma série. A proposição seguinte dá-nos a resposta.

Proposição 6.2.32 *(a) Se uma série converge absolutamente, podemos reordenar os seus termos de modo a somá-los por qualquer ordem, obtendo sempre a mesma soma.*

(b) Se uma série for condicionalmente convergente e L for um número real, então os termos da série podem ser reordenados de modo que a nova série convirja para L. Os termos também podem ser reordenados de modo que a nova série divirja para $+\infty$ *ou* $-\infty$*, ou simplesmente divirja.*

Exemplo 6.2.33 *Consideremos a série harmónica alternada* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$*, que é condicionalmente convergentepara um certo* $s \in \mathbb{R}$ *(é conhecido o valor de s, que é* $\ln 2$*, como veremos na página* **??***). Tem-se, então:*

$$s = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \cdots$$

$$\frac{s}{2} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n} = 0 + \frac{1}{2} + 0 - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} + 0 - \frac{1}{8} + \cdots$$

Somando termo a termo as duas séries, que são convergentes, obtém-se:

$$\frac{3s}{2} = 1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \cdots$$

Os termos desta última série, cuja soma é $\frac{3s}{2}$*, são os mesmos da série inicial, cuja soma é* s*, apenas por uma ordem diferente.*

Parte II

Álgebra Linear

Capítulo 7

Sistemas de equações lineares e matrizes

Neste capítulo introduzimos a notação matricial que nos vai permitir sistematizar a resolução de sistemas de equações lineares. Introduzimos depois algumas operações com matrizes e também o conceito de determinante. Este conceito será também usado para resolver sistemas de equações lineares.

7.1 Generalidades; o método de Gauss

Já contactámos diversas vezes com sistemas de equações lineares, por isso o recordar de definições básicas será muito breve.

Uma *equação linear* é uma equação da forma

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n = b \tag{7.1}$$

onde $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots a_nx_n$ é uma expressão polinomial do primeiro grau nas variáveis $x_1, x_2, \ldots, x_n$ e coeficientes (que suporemos reais) $a_1, a_2, \ldots, a_n$. A letra b que aparece no segundo membro representa uma constante que se diz o *termo independente*. Às variáveis é usual chamar-se *incógnitas*.

A lista $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ de números (reais) diz-se uma *solução* da equação (7.1) se

$$a_1r_1 + a_2r_2 + \cdots a_nr_n = b.$$

Se tivermos um certo número de equações lineares que devem ser satisfeitas simultaneamente dizemos que temos um *sistema de equações lineares*.

Exemplo 7.1.1 *Sendo p e n inteiros positivos, um sistema de p equações lineares a n incógnitas pode representar-se da seguinte forma:*

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \cdots & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \cdots & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & & & \cdots & & & & \\ a_{p1}x_1 & + & a_{p2}x_2 & + & \cdots & + & a_{pn}x_n & = & b_p \end{cases}$$

Um sistema de equações lineares diz-se *possível* se tiver alguma solução. Neste caso diz-se *determinado* se tiver exactamente uma solução e *indeterminado* se tiver mais que uma solução. Caso o sistema não tenha qualquer solução diz-se *impossível.*

Dois sistemas dizem-se *equivalentes* quando têm as mesmas soluções.

Tendo em vista encontrar as soluções de um sistema, o nosso problema será então passar de um sistema a outro equivalente ao primeiro relativamente ao qual consigamos facilmente reconhecer as soluções. Vamos ver que no caso de sistemas de equações lineares isto pode sempre ser feito.

Teorema 7.1.2 *(Princípios de equivalência de sistemas de equações lineares) Suponhamos dado um sistema de equações lineares. Se realizarmos uma qualquer das manipulações indicadas a seguir obtemos um sistema equivalente ao sistema dado:*
(a) trocar a ordem das equações;
(b) trocar a ordem das incógnitas;
(c) multiplicar ambos os membros de uma equação por uma constante diferente de 0*;*
(d) somar a uma equação, membro a membro, uma outra eventualmente multiplicada por uma constante qualquer.

Demonstração. (a) e (b) resultam imediatamente das definições.

(c) Como só é afectada uma das equações do sistema, basta analisar o que se passa com essa equação. Suponhamos queuma das equações do sistema é:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b. \tag{7.2}$$

Devemos mostrar que se c for uma constante não nula, as soluções da equação (7.2) são precisamente as soluções da equação

$$ca_1x_1 + ca_2x_2 + \cdots + ca_nx_n = cb. \tag{7.3}$$

Suponhamos que a lista $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ é solução da equação (7.2). Então $ca_1r_1 + ca_2r_2 + \cdots ca_nr_n = c(a_1r_1 + a_2r_2 + \cdots a_nr_n) = cb$, logo $(r_1, r_2, \ldots, r_n)$ também é solução de (7.3). Reciprocamente, se $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ é solução de (7.3), então, uma vez que $c \neq 0$, $a_1s_1 + a_2s_2 + \cdots a_ns_n = \frac{1}{c}(ca_1s_1 + ca_2s_2 + \cdots ca_ns_n) = \frac{1}{c}(cb) = b$, logo $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ é solução de (7.2).

(d) Faça a demonstração desta alínea como exercício. ■

Por vezes usaremos a notação $\ell_k + c\ell_t$ para significar que à linha k é adicionada a linha t multiplicada pela constante c, na passagem de um sistema a outro equivalente.

Exemplos 7.1.3 *1.*

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x + y = 4 \end{cases} \rightarrow_{l_1+l_2} \begin{cases} x - y = 0 \\ 2x = 4 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases}$$

Este sistema é possível e determinado. A sua única solução é $(2,2)$.

2.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 7 \end{cases} \rightarrow_{-2l_1+l_2} \begin{cases} x + y = 3 \\ 0 = 1 \end{cases}$$

Este sistema é impossível, pois não se pode ter $0 = 1$.

3.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ 2x + 2y = 6 \end{cases} \rightarrow_{-2l_1+l_2} \begin{cases} x + y = 3 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

Este sistema é possível e indeterminado: tem-se $x = 3 - y$, *com* y *arbitrário. Exemplos de soluções são* $(2,1)$, $(3-\sqrt{2},\sqrt{2})$.

É imediato reconhecer que as operações descritas no Teorema 7.1.2 apenas afectam os coeficientes. Destacá-los poderá ajudar-nos a simplificar os procedimentos. É o que vamos procurar fazer a seguir.

Consideremos o sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n = b_p \end{cases}$$

Ao quadro

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{pmatrix}$$

chama-se *matriz* (*simples*) do sistema dado. Por vezes também se usa a designação de *matriz dos coeficientes*. De uma forma geral, um quadro deste tipo é designado por *matriz*. Ao quadro

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ & & \cdots & & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} & b_p \end{array}\right)$$

chama-se *matriz completa* ou *matriz ampliada* do sistema dado.

Nota 7.1.4 1. *É frequente serem usados parêntesis rectos para representar matrizes e é essa a notação adoptada neste texto*

2. *Seja a_{ij} um elemento (que por vezes se diz* entrada*) de uma matriz. O primeiro índice, i, é o* índice de linha *e o segundo índice, j, é o* índice de coluna*. "Linha" e "coluna" têm aqui os significados óbvios.*

Como falar em sistemas de equações lineares ou em matrizes (completas) é apenas uma questão de linguagem, o Teorema 7.1.2 pode ser enunciado do seguinte modo:

Teorema 7.1.5 *(Princípios de equivalência de sistemas de equações lineares) Suponhamos dado um sistema de equações lineares. Se realizarmos uma qualquer das manipulações indicadas a seguir obtemos um sistema equivalente ao sistema dado:*
(a) trocar a ordem das linhas da matriz completa;
(b) trocar a ordem das colunas da matriz (simples);
(c) multiplicar uma linha da matriz completa por uma constante não nula;
(d) somar a uma linha da matriz completa uma outra linha eventualmente multiplicada por uma constante.

Note-se que quando se usam matrizes para fazer as manipulações necessárias e se quer passar de novo ao sistema é preciso ter em conta se houve trocas de colunas, já que estas trocas correspondem a trocar a ordem das incógnitas. No Exemplo 7.1.10 indicamos uma possível estratégia para evitar enganos.

Usando os princípios de equivalência enunciados é fácil mostrar o seguinte teorema, o qual nos dará uma forma suficientemente simples do sistema para que as soluções, se as houver, possam ser encontradas.

Teorema 7.1.6 *Dada uma matriz completa correspondente a um sistema de p equações e n incógnitas, é possível, usando os princípios de equivalência dados pelo Teorema 7.1.5, chegar a uma matriz com a seguinte forma:*

$$\left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1n} & b'_1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 & a'_{2,r+1} & \dots & a'_{2n} & b'_2 \\ & & \dots & & & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{rn} & b'_r \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_{r+1} \\ & & \dots & & & & \dots & & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b'_p \end{array}\right] \tag{7.4}$$

onde $0 \leq r \leq \min\{p,n\}$.

O número r que aparece no enunciado diz-se a *característica* da matriz do sistema.

Demonstração. Se todas as entradas da matriz simples forem 0, basta tomar $r = 0$.

Suponhamos agora que nem todas as entradas da matriz simples são nulas. Não perdemos generalidade se supusermos $a_{11} \neq 0$, já que usando trocas de linhas e colunas podemos chegar a essa situação. Podemos mesmo supor que $a_{11} = 1$, pois podemos dividir a primeira linha pelo a_{11} que estamos a supor ser não nulo.

Multiplicando a primeira linha por constantes adequadas e somando com as restantes obtemos uma matriz da forma:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ 0 & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} & \hat{b}_2 \\ & \dots & & & \dots \\ 0 & \hat{a}_{p2} & \dots & \hat{a}_{pn} & \hat{b}_p \end{array}\right] \tag{7.5}$$

Multiplicando a primeira linha por $\frac{1}{a_{11}}$, obtemos:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & \hat{a}_{12} & \dots & \hat{a}_{1n} & \hat{b}_1 \\ 0 & \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} & \hat{b}_2 \\ & \dots & & & \dots \\ 0 & \hat{a}_{p2} & \dots & \hat{a}_{pn} & \hat{b}_p \end{array}\right] \tag{7.6}$$

Consideramos seguidamente a submatriz completa

$$\left[\begin{array}{ccc|c} \hat{a}_{22} & \dots & \hat{a}_{2n} & \hat{b}_2 \\ & \dots & & \dots \\ \hat{a}_{p2} & \dots & \hat{a}_{pn} & \hat{b}_p \end{array}\right]$$

Se todos as entradas desta matriz forem 0, o processo termina com $r = 1$. Caso contrário, podemos supor $\hat{a}_{22} \neq 0$. Tal como fizemos antes, utilizamos este elemento não nulo para anular todos os outros que se encontrem na mesma coluna da matriz (7.6). Depois dividimos a segunda linha da matriz (7.6) por $\hat{a}_{22}$.

O processo pode continuar até se obter uma matriz na forma pretendida. ■

O processo descrito na demonstração do teorema anterior diz-se *método de condensação* (ou *método de eliminação*) *de Gauss*. A matriz na forma (7.4) diz-se *condensada*.

Corolário 7.1.7 *O sistema de equações representado pela matriz (7.4) do teorema anterior é:*

1. *possível determinado se e só se* $b'_{r+1} = \cdots = b'_p = 0$ *e* $r = n$*;*

2. *possível indeterminado se e só se* $b'_{r+1} = \cdots = b'_p = 0$ *e* $r < n$*;*

3. *impossível se e só se* $r < p$ *e* $b'_k \neq 0$ *para algum* $k > r$*.*

Um sistema de equações lineares em que todos termos independentes são nulos diz-se *homogéneo*. Note-se que um sistema homogéneo é sempre possível.

Exemplo 7.1.8 *Consideremos o sistema de equações:*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & + & w & = & 1 \\ -x & & & + & z & - & 5w & = & 2 \\ 2x & + & 3y & - & z & + & w & = & 0 \end{array}\right.$$

A matriz completa do sistema é: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$.

Façamos agora algumas operações sobre linhas, de acordo com Teorema 7.1.5.

Relembramos que a notação $\ell_k + c\ell_t$ é usada para significar que à linha k é adicionada a linha t multiplicada pela constante c. A notação $\ell_k \leftrightarrow \ell_t$ significará que as linhas k e t são trocadas entre si e $c\ell_k$ indicará que todas as entradas da linha k foram multiplicadas pela constante c.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -5 & 2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right] \overset{\ell_2+\ell_1\,;\,\ell_3-2\ell_1}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\overset{\ell_2\leftrightarrow\ell_3}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & 3 \end{array}\right] \overset{\ell_3+2\ell_2}{\longrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -6 & -1 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 7 & -1 & -3 \\ 0 & 1 & -5 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 8 & -6 & -1 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & \frac{17}{4} & -\frac{17}{8} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{11}{4} & \frac{11}{8} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{8} \end{array}\right]$$

O sistema dado é indeterminado e equivalente a:

$$\left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{17}{4}w - \frac{17}{8} \\ y & = & \frac{11}{4}w + \frac{11}{8} \\ z & = & \frac{3}{4}w - \frac{1}{8} \end{array}\right.$$

Na prática, opta-se muitas vezes por combinar o método de condensação com outros métodos. Por exemplo, depois de obter a matriz

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 8 & -6 & -1 \end{array}\right],$$

que nos mostra que o sistema dado é equivalente a

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcr} x & + & 2y & - & 3z & + & w & = & 1 \\ & & -y & + & 5z & - & w & = & -2 \\ & & & & 8z & - & 6w & = & -1 \end{array}\right. ,$$

podemos prosseguir por substituição:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcrcl} x & + & 2y & - & 3z & + & w & = & 1 \\ & & -y & & & + & \frac{11}{4}w & = & -2+\frac{5}{8} \\ & & & & z & & & = & \frac{3}{4}w-\frac{1}{8} \end{array}\right. \rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -\frac{17}{4}w-\frac{17}{8} \\ y & = & \frac{11}{4}w+\frac{11}{8} \\ z & = & \frac{3}{4}w-\frac{1}{8} \end{array}\right.$$

Como w é qualquer, concluímos que o sistema é indeterminado.

Exemplo 7.1.9 *Resolva o sistema seguinte (em $\mathbb{R}$):*

$$\left\{\begin{array}{lcrcrcr} 3x & + & y & + & 7z & = & 1 \\ x & & & + & 2z & = & 1 \\ 4x & + & 2y & & & = & 0 \\ x & + & 3y & + & 2z & = & 4 \end{array}\right.$$

Solução. $$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 7 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 7 & 1 \\ 4 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\ell_2-3\ell_1\,;\,\ell_3-4\ell_1\,;\,\ell_4-\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & -8 & -4 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_2 \leftrightarrow \ell_4} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -8 & -4 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{\ell_2/3\,;\,\ell_3-2/3\ell_2\,;\,\ell_4-\ell/3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -8 & -6 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -30 \end{array}\right]$$

Concluímos assim que o sistema dado é impossível. ■

Note-se que, tal como aconteceu no exemplo anterior, podemos concluir que um sistema é impossível antes de ter a matriz na forma condensada.

Exemplo 7.1.10 *Resolva o sistema seguinte (em $\mathbb{R}$):*

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 7x & + & 2y & + & 6z & = & 1 \\ 2x & + & 5y & & & = & 2 \\ 3x & + & 4y & + & 2z & = & 3 \end{array}\right.$$

Solução. Neste exemplo vamos também usar usar trocas de colunas. Para evitar enganos devidos a essas trocas, acrescentamos uma linha à matriz do sistema.

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} x & y & z & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 7 & 2 & 6 & 1 \\ 2 & 5 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & 3 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{c_1 \leftrightarrow c_3} \begin{array}{c} \begin{matrix} z & y & x & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 6 & 2 & 7 & 1 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right] \end{array} \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_3} \begin{array}{c} \begin{matrix} z & y & x & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 6 & 2 & 7 & 1 \end{array}\right] \end{array}$$

$$\xrightarrow{\ell_3 - 3\ell_1} \begin{array}{c} \begin{matrix} z & y & x & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & -10 & -2 & -8 \end{array}\right] \end{array} \longrightarrow \begin{array}{c} \begin{matrix} z & y & x & \end{matrix} \\ \left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 3 & 3 \\ 0 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{array}\right] \end{array}$$

Obtemos então: $\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 6z & + & 2y & + & 7x & = & 1 \\ & & 5y & - & 4 & = & 2 \\ & & & & x & = & -2 \end{array}\right. \quad \left\{\begin{array}{ccccc} z & & & = & \frac{53}{30} \\ & y & & = & \frac{6}{5} \\ & & x & = & -2 \end{array}\right.$ ■

7.2 Álgebra das matrizes; matrizes invertíveis

Denotamos por $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ o conjunto das matrizes de tipo $p\times n$ (p linhas e n colunas) com entradas em $\mathbb{R}$. Uma matriz com o mesmo número de linhas e de colunas diz-se *quadrada*. Para denotar o conjunto das matrizes quadradas de tipo $n\times n$ escrevemos geralmente $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ em vez de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$.

Muitas vezes representaremos uma matriz

$$\left[\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \cdots & \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{array}\right]$$

abreviadamente por $\left[a_{ij}\right]$ $(i=1,\ldots,p;\ j=i,\ldots,n)$.

Vejamos agora algumas definições.

Definição. Sejam $A=\left[a_{ij}\right]$ e $B=\left[b_{ij}\right]$, $(i=1,\ldots,p; j=1,\ldots,n)$ elementos de $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$. Então $A+B$, que se diz a *soma das matrizes* A e B, é também uma matriz de $\mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$ e é definida por:

$$A+B=\left[a_{ij}+b_{ij}\right] \quad (i=1,\ldots,p; j=1,\ldots,n).$$

Uma entrada da matriz $A+B$ é a soma das entradas homólogas de A e de B, isto é, a entrada da linha i, coluna j de $A+B$ é a soma das entradas que estão nas linhas i e colunas j de A e de B.

Definição. Seja $A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$, $A = \left[a_{ij}\right] \quad (i = 1,\ldots,p; j = 1,\ldots,n)$ e seja $\alpha \in \mathbb{R}$. (Diz-se que α é um *escalar*).

A matriz $\alpha A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$, dita o *produto* de α por A, é definida por

$$\alpha A = \left[\alpha a_{ij}\right] \quad (i = 1,\ldots,p; j = 1,\ldots,n).$$

Cada entrada de αA é o produto de α pela correspondente entrada de A.

Exemplo 7.2.1 *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Tem-se $3A+B = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 9 \\ 3 & 3 & 15 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 7 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 14 \\ 10 & 4 & 17 \end{bmatrix}$.

Sejam $A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$ duas matrizes do tipo $1\times n$ (dita *matriz linha*) e $n\times 1$ (dita *matriz coluna*) respectivamente.

O *produto* destas matrizes é uma matriz do tipo 1×1 definida por

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & \ldots & a_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n \end{bmatrix}.$$

Definição. Sejam $A \in \mathcal{M}_{q\times p}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$, com $A = \left[a_{ij}\right]$ e $B = \left[b_{jk}\right]$ $(i = 1,\ldots,q; j = 1,\ldots,p; k = 1,\ldots,n)$.

Define-se o *produto* $AB \in \mathcal{M}_{q\times n}(\mathbb{R})$, como sendo a matriz que se obtém multiplicando cada linha de A por cada coluna de B, como definido anteriormente (e identificando a matriz 1×1 que se obtém com a sua única entrada), isto é,

$$AB = [c_{ik}] \quad (i = 1,\ldots,q; k = 1,\ldots,n) \text{ onde } c_{ik} = \sum_{j=1}^{p} a_{ij}b_{jk}.$$

No que toca a produto de matrizes, convém notar o seguinte:

1. O número de colunas do primeiro factor é igual ao número de linhas do segundo.

2. O número de linhas da matriz produto é o número de linhas do primeiro factor; o número de colunas é o número de colunas do segundo factor.

Exemplo 7.2.2 *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ *e* $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Tem-se $AB = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1+3 & 2+2 \\ -2+1 & 4+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ -1 & 7 \end{bmatrix}$.

Seja A uma matriz do tipo $p \times n$. A *matriz transposta* de A é a matriz cujas linhas são as colunas de A e *vice-versa*. A matriz transposta de A, que é uma matriz do tipo $n \times p$, representa-se por A^T.

Exemplo 7.2.3 *Sejam* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$ *e* $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

Tem-se: $A^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$, $B^T = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix}$ *e* $C^T = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

7.2.1 Matrizes invertíveis

Seja n um número natural. A matriz quadrada

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$$

diz-se a *matriz identidade* de ordem n.

Exercício 7.2.4 *Observe que, para qualquer matriz* $A \in \mathcal{M}_{p\times n}(\mathbb{R})$*, se tem*

$$I_p A = A = A\, I_n.$$

Exemplo 7.2.5 *Consideremos a matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}(\mathbb{R})$. *Tem-se*

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Definição. Uma matriz A diz-se *invertível* se existirem um inteiro positivo n e uma matriz A' tal que $AA' = A'A = I_n$.

Mostra-se que a matriz A', quando existe, é única. Podemos então usar uma notação especial para a representar: A^{-1}, e chamar-lhe *inversa* de A.

Note-se que AA' tem tantas linhas quantas as linhas de A, logo A tem n linhas. Usando $A'A$, pode de modo análogo concluir-se que A tem n colunas. Temos então a seguinte:

Observação 7.2.6 *Uma matriz invertível é necessariamente quadrada.*

Outra observação útil é a seguinte:

Observação 7.2.7 *Mostra-se também que se A for uma matriz de tipo $n \times n$, e B for uma matriz tal que $AB = I_n$, então $B = A^{-1}$.*

Exemplo 7.2.8 *Mostre que a matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ *é invertível.*

Solução. De facto, fazendo $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x & y \\ z & t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, obtemos o sistema $\begin{cases} x + z = 1 \\ y + t = 0 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases}$ o qual é equivalente a $\begin{cases} x = 1 \\ y = -1 \\ z = 0 \\ t = 1 \end{cases}$. Usando agora a observação anterior concluimos que $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ é a inversa de $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. ■

Exercício 7.2.9 *Calcule* $\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Uma matriz quadrada $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ diz-se *ortogonal* se $AA^T = I_n = A^T A$. Note-se que uma matriz ortogonal é automaticamente invertível, tendo-se $A^{-1} = A^T$.

Exemplo 7.2.10 *Verifique que a matriz* $\frac{1}{3} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -2 \\ 2 & \sqrt{5} \end{bmatrix}$ *é ortogonal.*

Solução. De facto,

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -2 \\ 2 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 2 \\ -2 & \sqrt{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5+4 & 2\sqrt{5}-2\sqrt{5} \\ 2\sqrt{5}-2\sqrt{5} & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e

$$\frac{1}{9} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & 2 \\ -2 & \sqrt{5} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{5} & -2 \\ 2 & \sqrt{5} \end{bmatrix} = \frac{1}{9} \begin{bmatrix} 5+4 & -2\sqrt{5}+2\sqrt{5} \\ -2\sqrt{5}+2\sqrt{5} & 4+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

■

Exemplo 7.2.11 *Não existem números reais x e y para os quais a matriz* $\begin{bmatrix} -2 & x \\ y & 2 \end{bmatrix}$ *seja ortogonal. De facto,*

$$\begin{bmatrix} -2 & x \\ y & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2 & y \\ x & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+x^2 & -2y+2x \\ -2y+2x & y^2+4 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \forall x, y \in \mathbb{R}.$$

Note-se que $4+x^2 \neq 1, \forall x \in \mathbb{R}$.

Exercício 7.2.12 *Mostre que não existe nenhum número real k para o qual a matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & k \\ 0 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *seja ortogonal.*

Seguidamente vamos dar um algoritmo para a determinação da inversa de uma matriz A quadrada de ordem n. Em face da Observação 7.2.7, o que pretendemos fazer é determinar uma matriz B tal que $AB = I_n$.

Algoritmo 7.2.13 (Determinação da inversa de uma matriz)

1. *Considera-se a matriz A ampliada com a matriz* I_n*:* $\left[\begin{array}{c|c} A & I_n \end{array}\right]$.

2. *Condensa-se a matriz usando o método de Gauss, sem trocar colunas. (Note-se que quando a matriz é invertível, isto é sempre possível.)*

3. *Obtém-se a matriz* $\left[\begin{array}{c|c} I_n & B \end{array}\right]$*, onde B é a matriz inversa de A.*

Note-se que quando a matriz é invertível, o passo 2 pode ser feito. A matriz ampliada surge do seguinte modo:

- Procedemos coluna por coluna: o produto da matriz A pela coluna j de B deve dar a coluna j da matriz identidade;

- obtemos assim n sistemas, todos com a mesma matriz dos coeficientes, para resolver;

- sendo a mesma a matriz simples dos diversos sistemas, podemos resolvê-los simultaneamente.

Exemplo 7.2.14 *Mostre que a matriz* $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ *é invertível e determine a sua inversa.*

Solução.
$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_3-\ell_1} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\ell_3+\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{\frac{1}{2}\ell_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right]$$
$$\xrightarrow{\ell_2-\ell_3} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_1-\ell_2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right].$$

Concluímos assim que a inversa da matriz dada é

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}.$$ ■

7.3 Determinantes

Seja $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ uma matriz quadrada de tipo 2×2. O *determinante* de A representa-se por $|A|$ ou por $\det A$ e é dado por

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Um esquema sugestivo é o seguinte:

$$\begin{array}{c} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \\ - \quad\quad + \end{array} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

O produto dos elementos da diagonal principal aparece com sinal $+$ e o dos elementos da diagonal secundária com sinal $-$.

Seja agora A uma matriz de tipo 3×3. O *determinante* de A define-se de forma análoga:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}. \end{array}$$

Na prática, para calcular um determinante de ordem 3 costuma usar-se a *regra de Sarrus* que se pode enunciar como está esquematizado a seguir:

$$\begin{array}{c}\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \\ \begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ - & & + \end{array}\end{array} \begin{array}{l} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} \\ \quad -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{32}a_{11} - a_{33}a_{12}a_{21}. \end{array}$$

(Repetem-se as duas primeiras linhas e seguidamente formam-se diagonais.)

Outro esquema muito usado no cálculo de determinantes de ordem 3 é o seguinte:

$$\left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array}\right|$$

Consideram-se triângulos como esquematizado. Aqueles que têm uma base paralela à diagonal principal fornecem parcelas com sinal "+". Os outros, que têm uma base paralela à diagonal secundária, fornecem parcelas com sinal "-".

Exercício 7.3.1 *Escreva alguns determinantes de ordem* 2 *e de ordem* 3 *e calcule-os.*

Não vamos definir determinante de uma matriz quadrada de tipo $n \times n$ em geral. Para um determinante assim obtinhamos $n!$ parcelas, metade das quais afectadas do sinal "+" e as restantes do sinal "-". Vamos, no entanto, enunciar algumas propriedades também aplicáveis a determinantes de ordens superiores.

Teorema 7.3.2 (Propriedades dos determinantes) *Seja $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ uma matriz quadrada de ordem n.*

1. *Se multiplicarmos uma linha (ou uma coluna) de A por uma constante α, o valor do determinante da matriz resultante é $\alpha|A|$.*

2. *Se A tem uma linha (ou uma coluna) de zeros, então $|A| = 0$.*

3. *Se trocarmos entre si duas linhas (ou duas colunas) de A, o determinante da matriz obtida passa ao simétrico.*

4. *Se A tem duas linhas (ou duas colunas) proporcionais, então $|A| = 0$.*

5. *Suponhamos que as entradas $a_{i_0 j}$ ($j = 1, \ldots, n$) de uma linha de A se podem considerar somas $a_{i_0 j} = a'_{i_0 j} + a''_{i_0 j}$. Sejam A' e A'' as matrizes que se obtêm de A substituindo $a_{i_0 j}$ por $a'_{i_0 j}$ e $a''_{i_0 j}$ respectivamente. Então $|A| = |A'| + |A''|$.*
   (Tem-se um enunciado análogo para colunas.)

6. *O valor do determinante de A não se altera se a uma linha (resp. coluna) somarmos uma outra eventualmente multiplicada por uma constante.*

Exercício 7.3.3 *Verifique para alguns casos particulares algumas das alíneas do teorema anterior.*

Nota 7.3.4 *A última alínea do resultado anterior demonstra-se facilmente a partir das restantes:*

Seja $A = \begin{bmatrix} L_1 \\ L_2 \\ \vdots \\ L_n \end{bmatrix}$ *onde* L_j $(j = 1, \ldots, n)$ *designa a linha* j *da matriz* A*. Tem-se*

$$\begin{vmatrix} \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_t + cL_k \\ \vdots \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ L_t \\ \vdots \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vdots \\ L_k \\ \vdots \\ cL_k \\ \vdots \end{vmatrix} = |A| + 0 = |A|.$$

O resultado seguinte vai ser usado adiante. Verifique a sua validade para matrizes de ordens 2 e 3.

Proposição 7.3.5 *Seja A uma matriz quadrada. Tem-se:* $|A| = |A^T|$.

Definição. Chama-se *matriz triangular superior* a uma matriz quadrada em que todas as entradas abaixo da diagonal principal são nulas: a matriz

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

é triangular superior (note-se que $a_{ij} = 0$, sempre que $i > j$).

Matriz triangular inferior define-se de modo análogo.

Quando não houver necessidade de especificar se se trata de uma matriz triangular superior ou inferior, diremos apenas *matriz triangular*.

Quando nos referirmos a uma matriz quadrada A e não dissermos nada em contrário, tomaremos $A = [a_{ij}]$, com $i = 1, \ldots, n\,; j = 1, \ldots, n$.

O resultado seguinte, juntamente com as propriedades enunciadas antes, vai-nos permitir calcular também determinantes de ordem superior a 3. Designamos o método daí resultante por *método de Gauss*.

Teorema 7.3.6 *O determinante de uma matriz triangular é igual ao produto dos elementos ($a_{ii}, i = 1, \ldots, n$) da diagonal principal.*

Exercício 7.3.7 *Verifique o resultado anterior para matrizes quadradas de ordens* 2 *e* 3.

Exemplo 7.3.8 *Calcule o determinante da matriz* $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

Solução. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{vmatrix}$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = -(1)(-1)(-2)(-2) = 4. \qquad \blacksquare$$

O Teorema de Laplace (que enunciaremos a seguir) dá-nos também um método para calcular determinantes de ordem superior. Designaremos o método daí resultante por *método de Laplace*.

Para já, precisamos de alguma terminologia...

Dada uma matriz quadrada A, chama-se *determinante complementar* de uma das suas entradas a_{ij} ao determinante que resulta de A por eliminação da linha i e da coluna j. O determinante complementar de a_{ij} representa-se por C_{ij}.

Exemplo 7.3.9 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$. *Tem-se*

$$C_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 8 - 14 = -6 \text{ e } C_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} = 9 - 21 = -12.$$

Dada uma matriz quadrada A, chama-se *complemento algébrico* de uma das suas entradas a_{ij} ao número $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} C_{ij}$.

Note-se que $\Delta_{ij} = \begin{cases} C_{ij} & \text{se } i+j \text{ é par} \\ -C_{ij} & \text{se } i+j \text{ é ímpar} \end{cases}$.

Exemplo 7.3.10 *Seja* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$, *como no exemplo anterior.*

Tem-se $\Delta_{23} = 6$ *e* $\Delta_{22} = -12$.

Teorema 7.3.11 (Laplace) *O determinante de uma matriz é igual à soma dos produtos das entradas de uma certa linha ou de uma certa coluna da matriz dada pelos respectivos complementos algébricos:*

$$|A| = a_{i1}\Delta_{i1} + a_{i2}\Delta_{i2} + \cdots + a_{in}\Delta_{in} = a_{1j}\Delta_{1j} + a_{2j}\Delta_{2j} + \cdots + a_{nj}\Delta_{nj}.$$

Exemplo 7.3.12 $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{vmatrix} = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} +$ $(-1)^{1+3} \cdot 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 + 0 = -3$

É claro que ao escolher uma linha (ou coluna) contendo zeros para fazer o desenvolvimento, reduzimos a quantidade de cálculos a fazer. Resulta que em geral há vantagem em usar um método misto: procurar fazer aparecer zeros (método de Gauss) conjuntamente com o método de Laplace.

Exemplo 7.3.13 *Calcule* $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

Solução. $\Delta = -\begin{vmatrix} -1 & 3 & 4 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -(6+8+$ $3-(-12-1+2)) - (8+4-2-(16+2-2)) + 2(4+3+6-(12-6-1)) =$ $-18+6+2\cdot 8 = 4$ ■

Exercício 7.3.14 *Calcule os determinantes de ordem* 3 *que aparecem no exemplo anterior usando o Teorema de Laplace.*

Foi visto um processo para determinar a inversa de uma matriz que se apoia no método de Gauss antes dado para a resolução de sistemas. Existe um que se apoia no Teorema de Laplace, do qual damos conta a seguir.

Seja $A = [a_{ij}]$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ uma matriz quadrada. A matriz $\tilde{A} = [\Delta_{ij}]$ $(i, j = 1, \ldots, n)$ diz-se a matriz *complementar* de A. A sua transposta $\tilde{A}^T$ diz-se a *adjunta* de A.

Observação 7.3.15 *Seja A uma matriz quadrada. Mostra-se que:*

1. *A é invertível se e só se* $|A| \neq 0$.

2. $A\tilde{A}^T = \tilde{A}^T A = |A|\, I_n$;

Assim, se $|A| \neq 0$, tem-se $A\frac{\tilde{A}^T}{|A|} = \frac{\tilde{A}^T}{|A|}A = I_n$, donde

$$A^{-1} = \frac{\tilde{A}^T}{|A|}.$$

Exemplo 7.3.16 *Determine, caso exista, a inversa da matriz* $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \end{bmatrix}$.

Solução. $|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = -2 - 1 + 0 = -3$

Como $|A| = -3 \neq 0$, a matriz A é invertível.

$$\tilde{A} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 4 \\ -2 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Tem-se $\tilde{A}^T = \begin{bmatrix} -2 & -2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & -2 \end{bmatrix}$, logo $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{bmatrix}$ ■

Observação 7.3.17 *Mostra-se que se A e B são matrizes quadradas se tem* $|AB| = |A||B|$.

Exercício 7.3.18 *Verifique a afirmação anterior para matrizes quadradas de ordem* 2.

Proposição 7.3.19 *Seja A uma matriz invertível de ordem n. Tem-se* $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

Demonstração. De $AA^{-1} = I_n$ resulta que $|AA^{-1}| = |I_n| = 1$. Como $|AA^{-1}| = |A||A^{-1}|$ e $|A| \neq 0$, tem-se $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$. ■

Exemplo 7.3.20 *Determine* $\left|(5A)^{-1}\right|$, *onde* $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Solução. Como A é triangular, é imediato que $|A| = 3$. Observando agora que $5A$ se obtém de A multiplicando as entradas de 3 linhas por 5, tem-se $|5A| = 5^3|A| = 5^3 \cdot 3$. Logo, $\left|(5A)^{-1}\right| = \frac{1}{|5A|} = \frac{1}{3 \cdot 5^3}$. ■

7.3.1 A regra de Cramer

Nota 7.3.21 *Muitas vezes é conveniente representar um sistema de equações lineares na forma $BX = C$, em que B é a matriz dos coeficientes, $X = [x_1, \ldots, x_n]^T$ e C é a matriz dos termos independentes.*

Definição. Um sistema $BX = C$ diz-se de *Cramer* se B for uma matriz quadrada, com $|B| \neq 0$. Antes de enunciar a regra de Cramer com toda a generalidade, vejamos um exemplo.

Exemplo 7.3.22 *Consideremos a matriz* $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *e suponhamos que* $a_{11} \neq 0$ *e que* $|A| \neq 0$.

Vamos procurar resolver o sistema $\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{cases}$ *usando o método de Gauss.*

$$\left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & -\frac{a_{21}}{a_{11}}a_{12}+a_{22} & -\frac{a_{21}}{a_{11}}b_1+b_2 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ 0 & \frac{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}{a_{11}} & \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & \frac{a_{12}}{a_{11}} & \frac{b_1}{a_{11}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{b_1}{a_{11}} - \frac{a_{12}}{a_{11}} \times \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \\ 0 & 1 & \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{a_{11}}\left[\frac{b_1(a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12})-a_{12}(a_{11}b_2-a_{21}b_1)}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}\right] \\ 0 & 1 & \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{a_{11}}\left[\frac{b_1(a_{11}a_{22})-a_{12}(a_{11}b_2)}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}}\right] \\ 0 & 1 & \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}} \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{|A|} \\ 0 & 1 & \frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{|A|} \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{|A|} \\ 0 & 1 & \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{|A|} \end{array}\right]$$

Concluímos assim que o sistema $\begin{cases} a_{11}x & + & a_{12}y & = & b_1 \\ a_{21}x & + & a_{22}y & = & b_2 \end{cases}$, *em que o deter-*

minante da matriz $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ *é não nulo, tem solução:*

$$\begin{cases} x = \dfrac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \\ y = \dfrac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \end{cases}$$

Um sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \cdots \quad \cdots \quad \cdots \\ a_{n1}x_1 + \cdots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$ de Cramer tem solução única, tendo-se

$$x_j = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,j-1} & b_1 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,j-1} & b_2 & a_{1,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{n,j-1} & b_n & a_{1,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}}{|A|} \qquad (j = 1, \ldots, n),$$

onde A é a matriz dos coeficientes do sistema.

Note-se que a j-ésima coluna é substituída pela coluna dos termos independentes.

Exemplo 7.3.23 *Mostre que o sistema* $\begin{cases} 2x + z = 1 \\ 3x + y + z = 2 \\ x + y + z = 3 \end{cases}$ *é de Cramer e resolva-o.*

Solução. $\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \overset{c_3-c_2}{=} \begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 2$, logo o sistema é de Cramer.

(Foi usada a expansão de Laplace, desenvolvendo pela 3ª coluna.)

Temos então:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{-1}{2};\ y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{2} = \frac{3}{2};\ z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}}{2} = 2. \qquad \blacksquare$$

7.3.2 Característica de uma matriz

Recordamos que usando operações elementares sobre matrizes (isto é, as operações dadas pelos princípios de equivalência) uma matriz qualquer pode ser transformada numa matriz da forma:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & a'_{1,r+1} & \dots & a'_{1n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & a'_{2,r+1} & \dots & a'_{2n} \\ & & \dots & & & & \dots & \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{1} & \mathbf{0} & a'_{r-1,r+1} & \dots & a'_{r-1,n} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{1} & a'_{r,r+1} & \dots & a'_{rn} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & & \dots & & & & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix},$$

dizendo-se r a *característica* da matriz.

O Teorema 7.1.6 diz-nos que um sistema é possível se e só se a característica da matriz dos coeficientes do sistema é igual à característica da matriz ampliada desse sistema. Além disso, quando possível, o sistema é determinado se e só se a característica da matriz do sistema coincidir com o número de incógnitas.

Nota 7.3.24
- *Para definir característica bastaria exigir que se tivessem números reais diferentes de* 0 *na diagonal do bloco superior esquerdo destacado. Além disso, bastaria que a submatriz que constitui esse bloco superior esquerdo fosse triangular.*
- *Uma matriz quadrada A de ordem n tem característica n se e só se $|A| \neq 0$, isto é, se e só se A for invertível.*

7.3.3 Discussão de sistemas

Discutir um sistema significa investigar se o sistema é possível determinado, possível indeterminado ou se é impossível.

Exemplo 7.3.25 *Discuta o seguinte sistema de equações lineares em função dos parâmetros a e b:* $\begin{cases} ax + by - z = a \\ ax - z = -1 \\ x + y + z = 2 \end{cases}$

Solução. $\left[\begin{array}{ccc|c} a & b & -1 & a \\ a & 0 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{\ell_1 \leftrightarrow \ell_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ a & 0 & -1 & -1 \\ a & b & -1 & a \end{array}\right]$

$$\xrightarrow{\ell_2-a\ell_1;\ell_3-a\ell_1}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x & y & z & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -a & -1-a & -1-2a\\ 0 & b-a & -1-a & -a \end{array}\right]\end{array}$$

Agora é conveniente proceder à troca de colunas.

$$\xrightarrow{c_2\leftrightarrow c_3}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x & z & y & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1-a & -a & -1-2a\\ 0 & -1-a & b-a & -a \end{array}\right]\end{array}\xrightarrow{\ell_3-\ell_2}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x & z & y & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1-a & -a & -1-2a\\ 0 & 0 & b & 1+a \end{array}\right]\end{array}$$

Para $b=0$ e $a=-1$ obtemos: $\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} x & z & y & \end{array}\\ \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]\end{array}$.

Pensemos agora na característica das matrizes. A matriz $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ tem característica 2, sendo também 2 a característica da matriz ampliada. Como o número de incógnitas é 3, o sistema é possível e indeterminado.

Outro modo de ver que o sistema é indeterminado é observar que o sistema que se obtém fazendo $b=0$ e $a=-1$ é equivalente a $\begin{cases} x+y+z=2\\ y=1\\ 0=0 \end{cases}\Leftrightarrow$ $\begin{cases} x=1-z\\ y=1\\ z\ \text{qualquer} \end{cases}$

Então, o sistema é indeterminado, com grau de indeterminação 1.

Para $b=0$ e $a\neq-1$ obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & -1-a & -a & -1-2a\\ 0 & 0 & 0 & 1+a \end{array}\right]$.

Como $1+a\neq 0$, a característica da matriz do sistema é 2, enquanto que a característica da matriz ampliada é 3. O sistema é impossível.

Para $b\neq0$ e $a=-1$ obtemos: $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & b & 0 \end{array}\right]\xrightarrow{\ell_3\leftrightarrow\ell_2}\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]\xrightarrow{\ell_3-\frac{1}{b}\ell_2}$ $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2\\ 0 & 0 & b & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$, logo o sistema é impossível.

Para $b\neq0$ e $a\neq-1$, a característica das matrizes é 3, assim como o número de incógnitas. Logo o sistema é possível, determinado. ■

Bibliografia

[1] Adams, R. “Calculus: a complete course”, Addison Wesley.

[2] Chaves, G. “Cálculo Infinitesimal”, (apontamentos disponibilizados para os alunos).

[3] Lima, E. L. “Curso de Análise”, Volume I, Projecto Euclides, IMPA.

[4] Spivak, M. “Calculus”, Addison Wesley.

[5] Swokowski, E. “Cálculo com Geometria Analítica” Volumes I e II, Makron Books.

[6] A. Monteiro, “Álgebra linear e Geometria Analítica”, McGrawHill.

[7] E.Giraldes, V. H. Fernandes e M. P. Marques Smith, “Álgebra linear e Geometria Analítica”, McGrawHill.

Índice de notações

Índice