Sistemas articulados que permitem fazer transformações geométricas

1. Pantógrafo de Scheiner

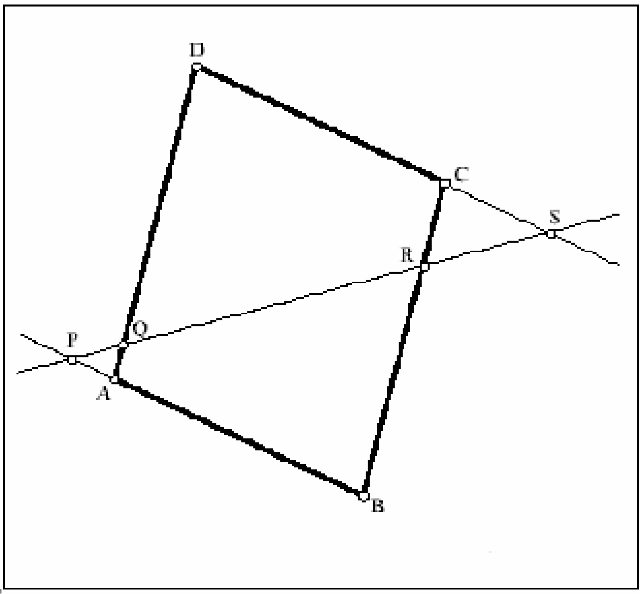

Figura 1 : Pantógrafo de Scheiner

Fixamos P sobre o prolongamento do lado AB, se Q descreve uma figura, R descreve uma figura homotética de centro P e razão $\frac{BR}{AQ}$.

2. Pantógrafo de Sylvester

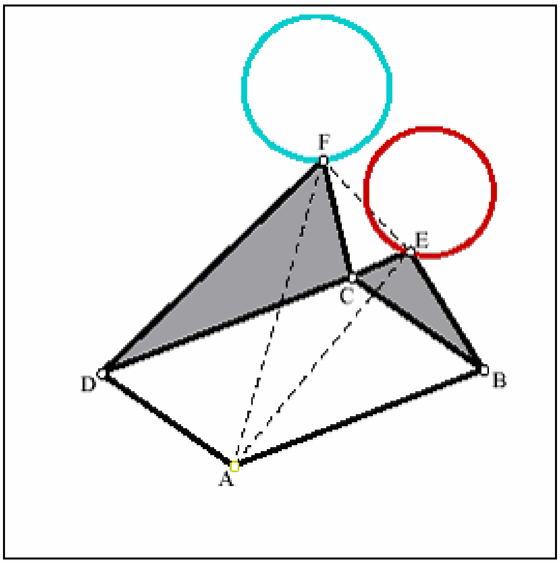

Figura 2 : Pantógrafo de Sylvester

Se o ponto E descreve uma figura, o ponto F descreve a figura homotética, que terá rodado um ângulo constante.

1. Translador de Kempe

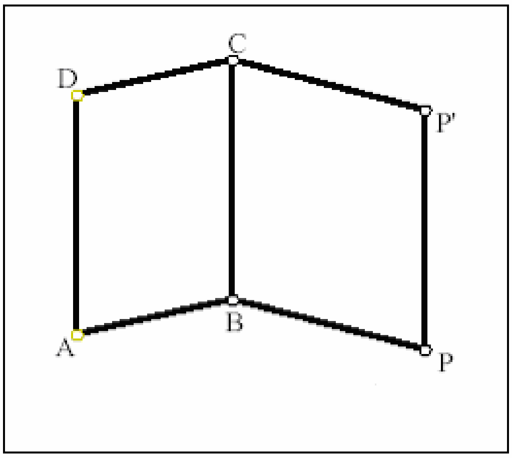

Figura 3 : Translador de Kempe

Este mecanismo articulado obtém-se considerando dois paralelogramos articulados ABCD e BPP'C que têm uma barra em comum, BC. Fixamos a barra AD e se fazemos descrever uma figura no ponto P, então é claro que o ponto P´ descreve uma figura que se deduz da precedente por uma simples translação do vector PP´=AD.

2. Reversor de Kempe

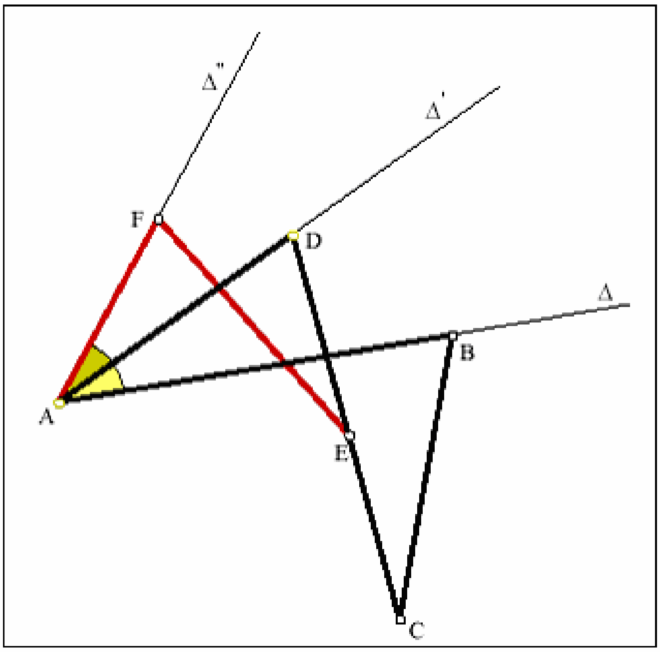

Figura 4 : Reversor de Kempe

O Reversor de Kempe permite-nos, dadas duas barras Δ, Δ' articuladas em A, guiar uma terceira Δ'', articulada também em A de modo a mantê-la simétrica de Δ relativamente a Δ'. Pode servir para realizar a simetria relativamente a uma recta Δ'. Suponhamos, com efeito que temos dois Reversores de Kempe: um permite-nos obter as barras Δ e Δ'' simétricas em relação a Δ'; o outro, as barras Δ_1 e Δ''_1 independentes das primeiras, que também se articulam em A e são simétricas relativamente a Δ'. É claro que podemos construir sobre Δ, Δ_1, duma parte, e Δ'', Δ''_1, da outra, dois paralelogramos articulados que se mantêm simétricos em relação ao eixo de simetria Δ'. Os pontos M, M' mantêm-se sempre simétricos.

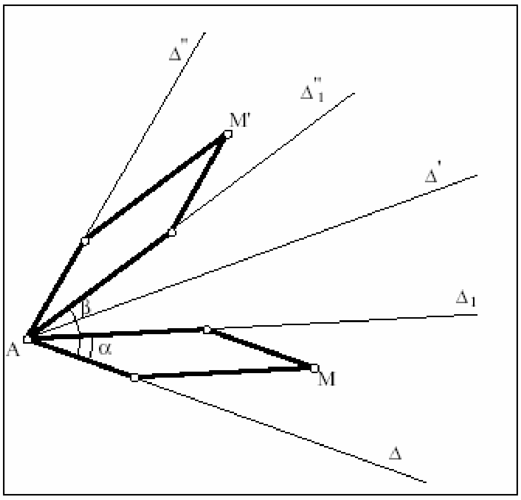

Figura 5 : "simetrissor " de Kempe

Os reversores permitem também obter a adição e subtracção de ângulos, bem como ser utilizado como duplicador de ângulos. Mas podemos ir mais longe; sobre o contra-paralelogramo ADEF construímos um segundo, AFGH, da mesma forma que construímos ADEF a partir de ABCD. Obtemos o pivot G sobre EF tal que $\frac{FG}{AF} = \frac{AF}{EF}$. A barra AH ou Δ''' faz com Δ um ângulo triplo do ângulo q de Δ'com Δ. A este sistema articulado chamamos trissector de Kempe.

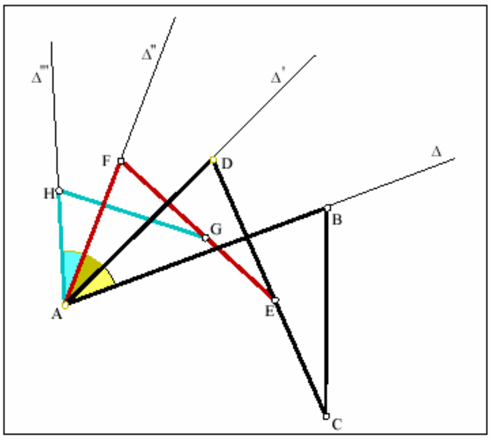

Figura 6 : trissector de Kempe

5. Inversor de Hart

Seja ABCD um contra-paralelogramo e P, Q, R, S quatro pontos fixos sobre as hastes AD, AB, CD e BC, respectivamente. Para uma certa posição do contra-paralelogramo, estes quatro pontos estão sobre uma recta paralela às diagonais AC e BD. Constatamos facilmente que esses pontos mantêm-se sempre sobre essa recta paralela às diagonais quando o paralelogramo sofre uma deformação.

Os triângulos semelhantes APQ, ADB, DPR e DAC dão-nos:

$$\frac{PQ}{AP} = \frac{BD}{AD}, \ \frac{PR}{PD} = \frac{AC}{AD}$$

donde

$$PQ \cdot PR = \frac{PA \cdot PD}{\overline{AD}^2} \cdot BD \cdot AC \ .$$

Agora, fazemos BI paralela a DA; a figura AIBD é um paralelogramo tal que BD=AI e IBC é um triângulo isósceles, de modo que a perpendicular por B a IC dá-nos o ponto médio, O, de IC. Então temos que:

$$BD \cdot AC = AI \cdot AC = (AO - OI)(AO + OI) = \overline{AO}^2 - \overline{OI}^2 \ ,$$

mas os triângulos rectângulos BAO e BIO dão-nos:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AO}^2 + \overline{OB}^2$$

$$\overline{BC}^2 = \overline{BI}^2 = \overline{OI}^2 = \overline{OB}^2$$

donde, por subtracção,

$$\overline{AB}^2 - \overline{BC}^2 = \overline{AO}^2 - \overline{OI}^2 = BD \cdot AC \ .$$

Temos então,

$$PQ \cdot PR = \frac{PA \cdot PD}{\overline{AD}^2}\left(\overline{AB}^2 - \overline{AD}^2\right).$$

Fica assim provado que o produto $PQ \cdot PR$ é constante. Se sujeitarmos a barra AD a rodar em torno do pivot P e se fazemos o ponto Q descrever uma figura, o ponto R descreverá uma figura inversa da primeira.

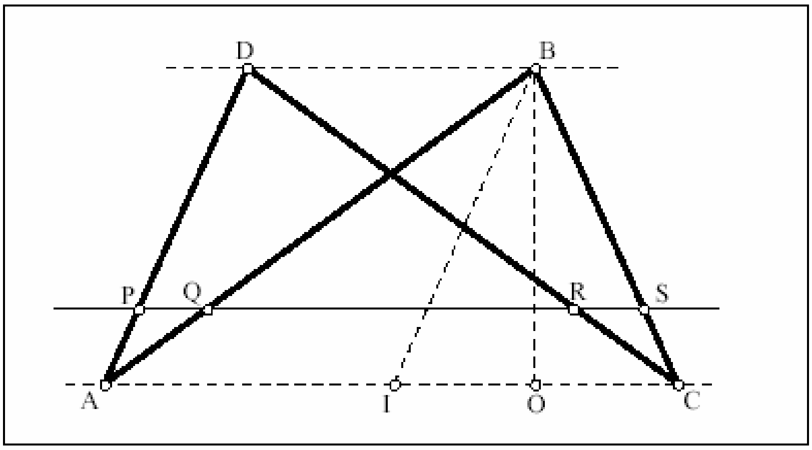

Figura 7 : Inversor de Hart

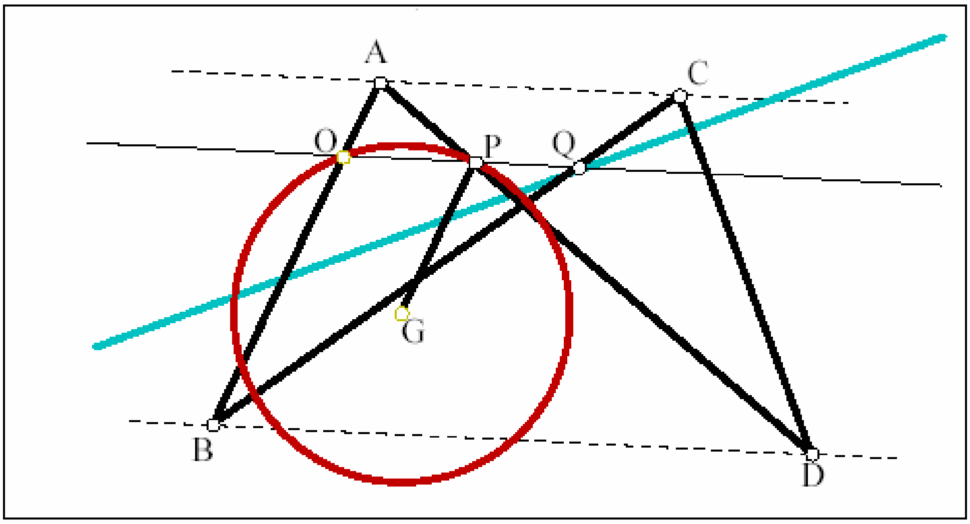

Figura 8 : recta como inversa da circunferência

6. Inversor de Peaucellier

O mecanismo articulado obtém-se acoplando dois rombóides semelhantes. Se considerarmos a circunferência de centro O e raio $OC' = OA$, a potência de A relativamente a essa circunferência vale:

$$AC' \cdot AC = \overline{AD}^2 - \overline{DC}^2 ;$$

Assim, ser C' descreve uma circunferência passando por A, C descreve a recta inversa dessa circunferência no inversor de polo A e potência $\overline{AD}^2 - \overline{DC}^2$.

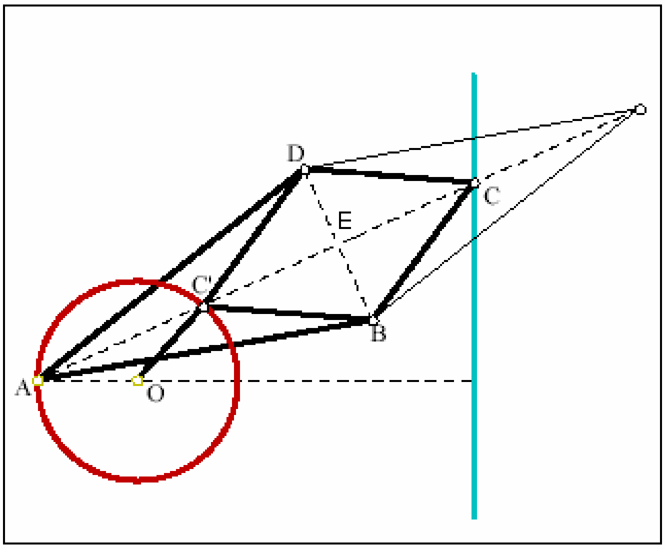

Figura 9 : Inversor de Peaucellier

Trabalho efectuado por:

Carlos Constante