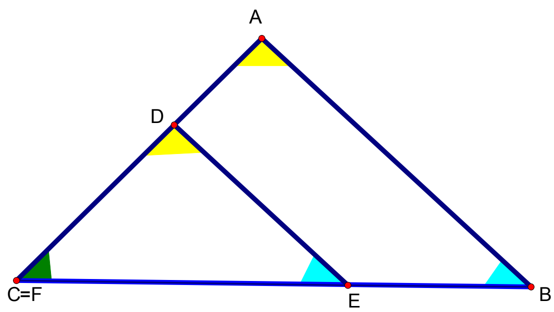
SEMELHANÇA DE TRIÂNGULOS

Dois triângulos ΔABC e ΔDEF dizem-se **semelhantes** (através da correspondência $A \mapsto D$, $B \mapsto E$, $C \mapsto F$), e escrevemos $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, se:

- os ângulos correspondentes forem congruentes (isto é, $\angle A \cong \angle D$, $\angle B \cong \angle E$, $\angle C \cong \angle F$)
- e os lados forem proporcionais (isto é , $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|CA|}{|FD|}$).

À razão entre lados correspondentes de triângulos semelhantes chamamos **razão de semelhança** desses triângulos; assim sendo, se $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, o quociente $\frac{|AB|}{|DE|}$ é a razão de semelhança entre ΔABC e ΔDEF. Tal como no caso das congruências de triângulos, convém assinalar que $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ não significa o mesmo que $\Delta ABC \sim \Delta EFD$.

Critério AAA – (teorema fundamental da semelhança de triângulos): *Dois quaisquer triângulos com ângulos internos iguais são semelhantes: mais precisamente, se os triângulos ΔABC e ΔDEF forem tais que $\angle A \cong \angle D, \angle B \cong \angle E$ e $\angle C \cong \angle F$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$*



Demonstração: Quer-se mostrar que $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{|AC|}{|DF|}$. Seja $\lambda = \frac{|AB|}{|DE|}$; a demonstração vai depender da natureza do λ.

- 1º caso: $\lambda \in \aleph$ (demonstração por indução):

se for $\lambda = 1$; então $|AB| = |DE|, \angle A \cong \angle D$ e como $\angle B \cong \angle E$, *por ALA* $\Delta ABC \sim \Delta DEF$ *;* em particular $\frac{|AB|}{|DF|} = 1 = \frac{|BC|}{|EF|}$

passo por indução: suponho $\lambda \in \aleph \setminus \{1\}$ e que o resultado é válido para $\lambda - 1$(dois triângulos com ângulos congruentes em que a razão entre dois lados correspondentes seja $\lambda - 1$ são necessariamente semelhantes, isto é, a razão entre os restantes pares de lados correspondentes é também $\lambda - 1$).

Sei que ΔABC *e* ΔDEF têm os mesmos ângulos; seja $x \in \overline{AB}$ tal que $|AX| = |DE|$, $y \in \overline{AC}$, $z \in \overline{BC}$, xy//BC e xz//AC.

Por ALA. Temos $\Delta AXY \cong \Delta DEF$; além disso, ΔXBZ e ΔDEF têm os mesmos ângulos , mas $\frac{|XB|}{|DE|} = \lambda - 1$. Por hipótese de indução $\frac{|XZ|}{|DE|} = \lambda - 1$ e $\frac{|BZ|}{|EF|} = \lambda - 1$; assim sendo $|BC| = |BZ| + |ZC|$

$$= (\lambda - 1)|EF| + |EF|$$

$$= \lambda |EF|$$

e $|AC| = |AY| + |YC| = |DF| + (\lambda - 1)|DF| = \lambda |DF|$, o que completa a indução. Fica assim provado o resultado quando $\lambda \in \aleph$.

- 2º caso: $\lambda \in Q$

seja $\lambda = \frac{|AB|}{|DE|}$; fazendo $\lambda = \frac{p}{q}$, obtemos $p|DE| = q|AB|$. Consideramos ΔXYZ com os mesmos ângulos e tal que $|XY| = p|DE| = q|AB|$, pelo caso anterior, temos $\Delta XYZ \sim \Delta DEF$ *e* $\Delta XYZ \sim \Delta ABC$ e portanto se temos $\frac{|XY|}{|DE|} = \frac{|YZ|}{|EF|} = p$ e $\frac{|XZ|}{|AC|} = \frac{|YZ|}{|BC|} = q$ então $\frac{|AC|}{|DF|} = \frac{|BC|}{|EF|} = \frac{p}{q} = \lambda$ como queríamos.

- 3º caso: $\lambda \in \Re \setminus Q$

Seja $\frac{|AB|}{|DE|} = \lambda$. Vamos mostrar que, para qualquer número racional s tal que $s < \lambda$, se tem $\frac{|AC|}{|DF|} > s$, $\frac{|BC|}{|EF|} > s$.

Atendendo à densidade de Q em $\Re$, isso obriga a que se tenha $\frac{|AC|}{|DF|}, \frac{|BC|}{|EF|} \geq \lambda$

$s < \lambda \Leftrightarrow s < \frac{|AB|}{|DE|} \leftrightarrow s|DE| < |AB|$

seja $X \in \overline{AB}$ e $|AX| = s|DE|$ e $XY \,//\, BC$.

Pelo caso racional, também $|AY| = s|DF|$ e $|XY| = s|EF|$

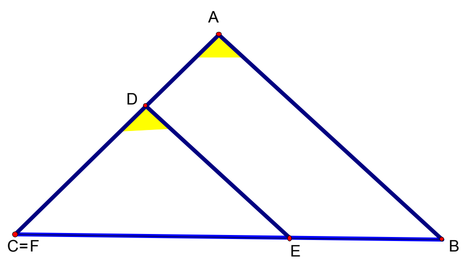
Logo $s|DF| = |AY| < |AC| \quad \Rightarrow \frac{|AC|}{|DF|} > s$

$s|EF| = |XY| < |BC| \quad \Rightarrow \frac{|BC|}{|EF|} > s$

o que conclui a demonstração.

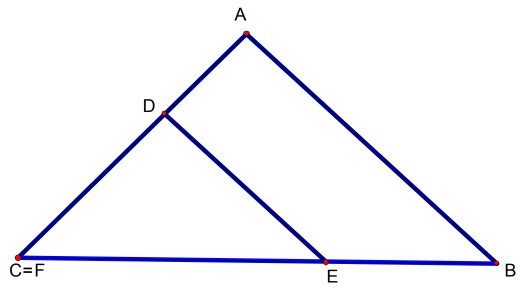
Critério LAL : *Se, em dois quaisquer triângulos, ângulos iguais subentenderem lados proporcionais, então esses triângulos são semelhantes.*

(por ex., se ΔABC e ΔDEF forem tais que $\angle A \cong \angle D$ e $\frac{|AB|}{|DE|} = \frac{|AC|}{|DF|}$, então $\Delta ABC \sim \Delta DEF$).



Demonstração: A ideia é combinar o critério anterior com o critério de congruência apropriado. Consideramos o triângulo ΔAZY tal que $|AZ| = |DE|$, e em que ZY//BC, $Z \in AB$ e $Y \in AC$. Pelo critério anterior, temos $\Delta ABC \sim \Delta AZY$ e portanto $|AY| = |DF|$; e pelo critério de congruência LAL, temos $\Delta AZY \cong \Delta DEF$, e portanto $\Delta AZY \sim \Delta DEF$.

Critério LLL: *Dois quaisquer triângulos com lados proporcionais são semelhantes.*
(por ex.,se tivermos $\frac{|AB|}{|DE|}=\frac{|AC|}{|DF|}=\frac{|BC|}{|EF|}$ *então* $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.



Demonstração: É análoga à do critério anterior. Definimos ΔAZY como antes, sendo $|AZ|=|DE|$ e $\Delta ABC \sim \Delta AZY$:pelo critério LLL de congruência, $\Delta AZY \cong \Delta DEF$, e portanto $\Delta ABC \sim \Delta DEF$.

Mais resultados importantes sobre semelhança de triângulos

Teorema de Pitágoras: *Se* ΔABC *for um triângulo rectângulo de hipotenusa* $\overline{BC}$ *, então* $a^2 = b^2 + c^2$.

Demonstração:

Pelo critério AA temos $\Delta ABC \sim \Delta DBA \sim \Delta DAC$ e destas semelhanças obtemos

$\frac{b}{a} = \frac{a-x}{b} \Rightarrow b^2 = a^2 - ax$ e $\frac{x}{c} = \frac{c}{a} \Rightarrow c^2 = ax$

Adicionando membro a membro resulta a igualdade pretendida: $a^2 = b^2 + c^2$.

Note-se que o recíproco deste teorema também é válido: se num ΔABC tivermos $a^2 = b^2 + c^2$, então esse triângulo é rectângulo de hipotenusa $\overline{BC}$. Para o demonstrarmos basta observar que podemos considerar um rectângulo de catetos de medida b e c :pelo teorema de Pitágoras, a hipotenusa desse triângulo mede $\sqrt{b^2 + c^2} = a$ e por LLL, esse triângulo é congruente a ΔABC, que portanto é também rectângulo.

Realizado por :Sílvia Rocha