Matemáticas

na vida quotidiana

Sumário

Onde está a matemática?

Nos livros inacessíveis? Nas salas de aula? Nos produtos de alta tecnologia da grande indústria? De forma nenhuma: há matemática por trás das nossas antenas de televisão, nos nossos cartões bancários, nas carroçarias das nossas viaturas...

É esta matemática do quotidiano que este folheto e a exposição que ele acompanha vos propõem descobrir. Esta iniciativa da Sociedade matemática europeia inscreve-se no quadro do Ano mundial da matemática, e beneficia do apoio da Comissão europeia. Ela visa evidenciar o impacto da investigação matemática na vida e na sociedade contemporânea e mostrar a riqueza e a natureza das suas intervenções.

Os doze temas descritos, entre muitos outros, evocam a utilidade da matemática quer na representação dos fenómenos naturais quer nos tratamentos médicos, na regulação dos transportes, na colocação de mosaicos ou nos entretenimentos. Lúdicos, surpreendentes ou vitais, alguns antigos outros muito recentes, eles estão todos ligados aos desenvolvimentos actuais e às investigações em curso.

Esperamos que eles estimulem a vossa curiosidade para esta matemática escondida no fabrico e na utilização de objectos que nos são familiares e, porque não, que eles suscitem novas vocações.

Mireille Chaleyat-Maurel – Jean Brette – Michel Darche – Catherine Goldstein – Maurice Mashaal – Gérard Tronel

Códigos secretos tornados públicos?

Graças aos códigos de chave publica, podereis, em breve e sem riscos, fazer compras na internet e transmitir as vossas referências bancárias. O método: o código é tornado público mas a mensagem só pode ser decifrada pelo destinatário autorizado porque o processo de descodificação mantém-se secreto! Isto é verdade, por exemplo, para o método RSA, concebido em 1978 por Rivest, Shamir e Adleman.

A astúcia? Se um número é o produto de outros dois, pode ser muito difícil determinar os dois números que o compõem, sobretudo se os números são muito grandes. O código, que é público, utiliza unicamente o número produto: os dois números que o compõem permanecem secretos. São necessários para descodificar. É por isto que a investigação matemática se interessa pelos grandes números primos, de várias centenas de algarismos.

GRANDES NÚMEROS PRIMOS

Alguns matemáticos procuram – e por vezes encontram – algoritmos de factorização suficientemente rápidos para constituírem uma ameaça à segurança do código RSA; isso obriga, com o tempo, a aumentar a ordem de grandeza dos números primos utilizados.

As pesquisas matemáticas muito "puras", envolvendo os números primos e a factorização dos grandes números, tornaram-se de uma importância crucial para a criptografia. E os números primos não são os únicos objectos matemáticos interessantes para a criptografia.

Alguns especialistas elaboram, também, métodos de codificação baseados nas propriedades aritméticas das curvas elípticas, outros procuram processos envolvendo leis estranhas da física quântica, etc.

Disse “aifargotpirC”?

Para comunicar ao abrigo dos indiscretos, é preciso codificar as mensagens.
E, para inventar métodos de codificação e de descodificação, é melhor ser matemático...

Desde há muito que militares e políticos usam diversos estratagemas para que o campo contrário não possa aceder às suas mensagens confidenciais e adivinhar as suas intenções. Pensa-se que Júlio César comunicava com Cícero com a ajuda de um código secreto, que consistia em deslocar as letras do alfabeto três lugares. O A tornava-se D, o B tornava-se E, o C tornava-se F, etc., e retomava-se o alfabeto desde o princípio para as últimas letras. Segundo este processo, GARE AU GORILLE ficava JDUH DX JRULOOH. Quando o valor do deslocamento é conhecido (aqui, 3), a descodificação de uma mensagem assim codificada é muito simples: basta aplicar o deslocamento no sentido inverso.

Demasiado simples, este exemplo? Sem dúvida, porque o inimigo ao interceptar esta troca de mensagens poderia, em pouco tempo, adivinhar o método utilizado, encontrar o deslocamento e decifrar. Mas ele resume o objectivo da criptografia, que é a determinação de bons processos de codificação e de descodificação. Durante o século XX, este domínio passou da época artesanal à época científica. Ao mesmo tempo, os seus utilizadores multiplicaram-se: ao mundo militar e diplomático juntou-se o mundo da banca ou das finanças, o do crime organizado, o da internet e do comércio electrónico, etc. Com o progresso das telecomunicações, a criptografia tornou-se uma parada capital para a sociedade civil.

O que vêm os matemáticos fazer aqui? Antes de mais, é bem mais simples manipular letras traduzindo-as primeiro em números, o que permite transformá-las à custa de operações aritméticas. É cada vez mais verdade nos nossos dias: a informática e as telecomunicações modernas tratam a informação representada sob forma numérica (em geral sequências de bites, isto é, sequências de “0” ou “1”). Estando a mensagem traduzida numa sequência de números, a criptografia dispõe, então, ao jogar com procedimentos aritméticos, de uma grande variedade de métodos de codificação possíveis. Sendo os mais simples também os mais vulneráveis aos esforços de descodificação pelo inimigo, vê-se que a matemática pode ajudar a conceber métodos de codificação (ou de descodificação...) sofisticados mais eficazes e que ela permite avaliar a sua eficácia.

Diferenciam-se dois tipos de códigos. O primeiro, mais clássico, é o dos métodos de chave secreta. Os dois correspondentes, Alice e Bernardo, para assentar ideias, estabelecem um método de codificação das suas mensagens e escolhem uma chave, isto é, um ou vários números que determinam completamente o processo de codificação. No exemplo referido mais acima, o método de codificação é o deslocamento das letras e a chave é o número 3. Neste tipo de método, a chave serve tanto para codificar como para descodificar e só deve ser conhecida pela Alice e pelo Bernardo: é uma chave secreta que, acima de tudo, não deve cair nas mãos do inimigo, chamemos-lhe Emílio. Se o número de chaves possíveis é muito grande, o Emílio terá dificuldade, na ausência da chave, em decifrar as mensagens interceptadas, e isto mesmo que conheça bem o método utilizado (porque teria que experimentar todas as chaves). O DES (Data Encryption Standard), método publicado em 1975 e adoptado como standard pelos Estados Unidos desde 1977, é a codificação de chave secreta mais utilizada nos nossos dias. O algoritmo DES envolve uma chave de 56 bites, isto é, um número que se escreve com 56 algarismos binários e, portanto, a priori existem 2^{56} chaves possíveis. Este número é grande (da ordem de 10^{17}), mas o progresso dos computadores e dos “caçadores de códigos” fazem com que o DES seja actualmente considerado como pouco seguro: ele será dentro em breve substituído por um standard mais eficaz.

O outro tipo de codificação é o dos códigos de chave pública. O seu início data de 1976. Nestes métodos, o conhecimento da chave que serve para codificar não permite deduzir facilmente a chave de descodificação. A chave de codificação pode, então, ser pública, não secreta, enquanto que a chave de descodificação só é conhecida pelo destinatário da mensagem secreta: a Alice comunica publicamente ao Bernardo uma chave de codificação de que o Bernardo se serve para enviar uma mensagem secreta a Alice, que a descodifica com a ajuda da sua chave secreta. Muitas vezes faz-se apelo à codificação de chave pública a fim de modificar uma chave secreta que servirá para as restantes comunicações, sendo, em geral, os métodos de chave secreta menos ávidos em termos de cálculos. O mais conhecido e mais utilizado dos métodos de chave pública é o sistema RSA, concebido em 1978 no MIT (Estados Unidos) por Ronald Rivest, Adi Shamir e Leonard Adleman. Este sistema muito seguro serve também para procedimentos de assinatura electrónica e autenticação, por exemplo, para o comércio electrónico e a segurança dos cartões bancários. O algoritmo RSA (ver caixa) utiliza o facto de ser fácil encontrar dois grandes números primos p e q e calcular o seu produto N = p q, mas ser extremamente difícil decompor N se não se conhecem previamente p ou q. Por outro lado, certos matemáticos procuram (e por vezes encontram) algoritmos de factorização suficientemente rápidos para constituírem uma ameaça à segurança do RSA; isto obriga a, com os anos, aumentar a ordem de grandeza dos números primos p e q utilizados.

Foi assim que as pesquisas matemáticas muito “puras”, sobre os números primos e a factorização dos grandes números, se tornaram de uma importância crucial para a criptografia — ainda que pouca gente, há algumas dezenas de anos, imaginasse que a teoria de números tivesse um dia aplicações. E os números primos não são os únicos objectos matemáticos interessantes para a criptografia: alguns especialistas elaboram, também, métodos de codificação baseados nas propriedades aritméticas das curvas elípticas, outros concebem processos que envolvem leis estranhas da física quântica, etc.

O método RSA

O Bernardo quer enviar uma mensagem secreta à Alice. A Alice deve enviar-lhe previamente uma chave de codificação, que não necessita de ser confidencial:

1) A Alice escolhe dois grandes números primos p e q, calcula N = pq e escolhe um inteiro positivo e menor do que N, sem factores comuns com o produto (p-1)(q-1).

Actualmente, p e q devem ser números com uma centena de algarismos cada um para que o inimigo não possa, num tempo razoável, factorizar N e, assim, determinar a chave de descodificação. Para simplificar, aqui tomaremos, a título de exemplo, p = 3, q = 11, donde N = 33, e e = 3 (que não tem factores comuns com $2 \times 10 = 20$).

2) A Alice comunica ao Bernardo unicamente os inteiros N e e (33 e 3, no nosso exemplo), que constituem a chave pública (de codificação).

3) O Bernardo converte a sua mensagem numa sequência de inteiros m inferiores a N. Para escrever cada m, ele calcula o resto c da divisão de m^e por N e envia a Alice a sequência dos c.

A operação de codificação deriva do elevar a uma mesma potência (e) os números (m) que representam as letras da mensagem, sem ter em conta os múltiplos de N. No nosso exemplo, para codificar o G, representado pelo número m = 7 (a ordem de G no alfabeto), calcula-se 7^3 = 343, cujo resto da divisão por N = 33 vale c = 13. O G é, pois, representado, codificado, pelo número 13, que corresponde à letra M.

4) Por outro lado, a Alice calculou o inteiro positivo d inferior a N cujo resto da divisão de ed por (p-1)(q-1) é igual a 1. No nosso exemplo, d = 7.

Este número é indispensável para inverter a operação de codificação (etapa nº 3). Note-se que d depende não apenas de N mas também dos factores primos p e q que compõem N. É por isso que a Alice deve manter secretos os números p, q e d (3, 11 e 7) e não os comunicar a ninguém. Se N é suficientemente grande, o inimigo só muito dificilmente poderá encontrá-los.

5) A Alice decifra cada c que lhe enviou o Bernardo calculando o resto da divisão de c^d por N: demonstra-se que esse resto é igual a m, isto é, à mensagem inicial.

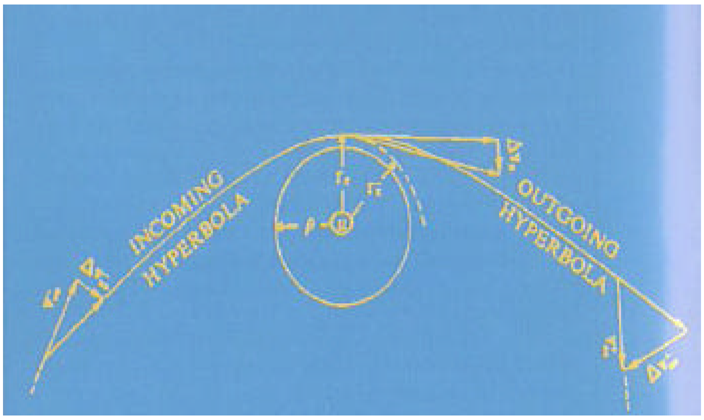
No nosso exemplo, se a Alice recebe c = 13 (ou a letra M), calcula $c^d = 13^7$, cujo resto da divisão por N = 33 vale 7, que corresponde à letra G. A codificação e a descodificação de GARE AU GORILLE esquematiza-se, então, assim:

G	A	R	E	A	U	G	O	R	I	L	L	E
7	1	18	5	1	21	7	15	18	9	12	12	5

Codificação	Descodificação
(c = resto da divisão de m^e por 33)	(m = resto da divisão de c^d por 33)
13 1 24 26 1 21 13 9 24 3 12 12 26	7 1 18 5 1 21 7 15 18 9 12 12 5
M A X Z A U M I X C L L Z	G A R E A U G O R I L L E

Dos satélites aos telefones portáteis

Telecomunicações, navegação, meteorologia..., telefones celulares, GPS, Internet..., tantas razões para se enviarem satélites à volta da Terra.
Os projectos são cada vez mais numerosos. Necessitam do envio de engenhos espaciais ao menor custo.
Por isso, os matemáticos seleccionam e optimizam as trajectórias e as órbitas dos engenhos espaciais, melhoram a economia de combustível... Utilizam ferramentas desenvolvidas há muito tempo, o método de Lagrange (1755), de Gauss (1801) ..., mas também resultados recentes que têm em conta a teoria da relatividade.



UMA AJUDA GRAVITACIONAL
Para determinar a melhor trajectória do engenho espacial e explorar ao máximo a atracção de um corpo celeste, é preciso que a velocidade do veículo varie o menos possível ao passar perto do corpo. Para isso, pode agir-se sobre três parâmetros: a velocidade de aproximação, a velocidade de saída e a distância de sobrevoo.

Odisseias no espaço: o menor custo

O sector espacial é um grande consumidor de cálculos e de matemática – quer para lançar e manter em órbita um satélite quer para determinar a melhor trajectória de uma sonda interplanetária.

Telecomunicações, televisão, espionagem, meteorologia, astronomia, oceanografia, geofísica, etc.: em numerosos domínios, os satélites tornaram-se totalmente indispensáveis e omnipresentes. Mas, lançar um satélite, colocá-lo numa boa órbita e mantê-lo aí, orientá-lo convenientemente, tudo isto não é simples de fazer. A precisão necessária pode ser impressionante, por exemplo quando a posição de um satélite deve ser controlada com aproximação ao centímetro embora ele se encontre a várias centenas de quilómetros de altitude!

Os problemas de ordem matemática que se colocam aos cientistas e engenheiros da área espacial são múltiplos e muito variados. Uma boa parte de entre eles envolvem a teoria de optimização e mais especificamente o que se chama a teoria do controle optimal. (ver caixa). A palavra "optimização" quer dizer que é preciso minimizar ou maximizar uma certa grandeza.

De modo geral, um problema de controle optimal consiste na determinação da sequência de operações que permitem passar de um estado inicial a um estado final predeterminado, optimizando qualquer coisa. Assim, quando se envia uma sonda espacial para explorar planetas longínquos, é preciso prever uma trajectória que utilize ao máximo a atracção gravitacional dos diversos astros, a fim de fazer funcionar o menos possível os motores da sonda: a quantidade de combustível que ela pode levar é pequena.

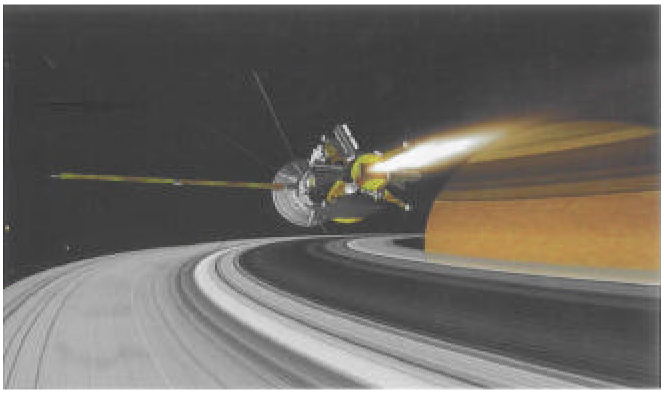
Um outro exemplo importante é a manutenção de um satélite na sua órbita, e aí também é necessário determinar as manobras que fazem isso e que consomem o mínimo de combustível. As soluções dependem nitidamente das características dos motores. O problema não é matematicamente do mesmo tipo para os motores que funcionam por impulsos fortes e breves (situação actual) e para os motores de impulsos fracos mas capazes de funcionar em contínuo; o último sistema, pouco divulgado hoje em dia, deverá generalizar-se nos anos vindouros porque os estudos de controle optimal indicam que é vantajoso em termos de economia de combustível.

Os especialistas do espaço fazem igualmente apelo a uma disciplina mais clássica, que data do século XVIII, mas sempre em actividade: a mecânica celeste, que estuda o movimento dos corpos (planetas, satélites, etc.) sob o efeito das forças gravitacionais. O problema de duas massas pontuais que se atraem mutuamente é relativamente simples e foi resolvido por Newton: as trajectórias são elipses, parábolas ou hipérboles. Mas, a partir de três corpos em interacção gravitacional, o problema torna-se de uma dificuldade considerável e continua a ser tema de investigação. Foi ao atacá-lo que Henri Poincaré, grande matemático dos anos 1900, colocou as bases do que hoje em dia se chama a teoria do "caos determinístico" e dos "sistemas dinâmicos". Mais geralmente, a mecânica celeste faz apelo a teorias matemáticas elaboradas (mecânica analítica, geometria simplética) que, ao reformularem o problema em termos muito gerais, permitem analisá-lo de forma teórica, destacar certas propriedades e facilitar a sua resolução concreta por métodos numéricos.

No contexto espacial, os métodos da mecânica celeste servem, por exemplo, para calcular a trajectória, dita mínima, de um satélite. É a trajectória que resulta unicamente das forças gravitacionais; não completamente elíptica por causa do achatamento da Terra nos polos, pela influência da Lua, etc.; é necessário determiná-la para em seguida ter em conta efeitos perturbadores mais ténues, como o atrito com a alta atmosfera ou a influência das radiações electromagnéticas. Um outro exemplo onde a mecânica celeste é utilizada: o estudo da evolução ao longo do tempo, ao fim de vários anos, das trajectórias de um conjunto de vários satélites que partilham uma tarefa, tais como os enxames de satélites destinados ao posicionamento (como o sistema GPS) ou às telecomunicações.

Enfim, é preciso sublinhar que todos os métodos matemáticos referidos aqui não evitam o recurso, com vista ao seu tratamento, a cálculos numéricos muito volumosos. Estes, sem dúvida efectuados por computador, são necessários para se obterem os valores concretos das soluções (as posições sucessivas do satélite em função do tempo, por exemplo).

Ainda é necessário saber fazê-lo eficazmente e obter a certeza de que os resultados dos cálculos são uma boa aproximação das "verdadeiras" soluções. Este trabalho, que não é nada simples, constitui em si mesmo uma outra área da matemática: "a análise numérica"...



Controle optimal: um exemplo simples

Um dos exemplos mais elementar de problemas de controle que pode imaginar-se consiste em considerar um veículo munido de um motor a jacto em cada uma das suas duas extremidades e limitado a deslocar-se ao longo de uma recta, digamos o eixo Ox. Sabendo que, no instante inicial, o veículo tem uma posição x_0 e uma velocidade v_0, pode tentar determinar-se como devem os motores ser accionados para que o veículo chegue ao seu ponto de encontro, por exemplo a origem do eixo Ox, com uma velocidade nula.

A formulação matemática do problema é bastante simples: denotemos por x(t) a posição do veículo no instante t e por F(t) o valor algébrico da força exercida pelos motores sobre o veículo no instante t. O movimento deste é regido pela segunda lei de Newton (força = produto da massa e da aceleração); se m é a massa do veículo, isto escreve-se, na ausência de atritos ou de outras forças exteriores:

$$md^2x/dt^2 = F(t)$$

O problema reside, então, na determinação de uma "função-controlo" adequada, F(t), tal que:

$$x(T) = 0 \ \text{ e } \ v(T) = dx/dt\,|_{t=T} = 0$$

para um certo valor T do tempo, sujeita às condições iniciais x(0) = x_0 e v(0) = v_0.

Pensando um pouco, vemos que, se não há qualquer restrição sobre a força F exercida pelos motores nem sobre o valor de T, existirá uma infinidade de soluções possíveis, isto é, uma infinidade de manobras possíveis F e de valores para o instante T que permitem atingir o ponto de encontro e parar aí.

Na prática, as funções F(t) possíveis estão sujeitas a condições a priori, tendo, por exemplo, os motores reais uma potência máxima. Além disso, procura-se, quase sempre, efectuar a tarefa optimizando qualquer coisa: por exemplo, pretende-se que o trajecto dure o menor tempo possível, ou que o consumo de combustível seja mínimo. Ao impor uma tal condição de optimização, o problema de controle inicial torna-se um problema de "controle optimal"; o conjunto das soluções possíveis é, então, muito mais restrito (por vezes, não existe mesmo qualquer solução para o problema proposto).

A teoria de controle optimal analisa tais problemas, em toda a sua generalidade, e tem por fim a determinação de teoremas ou de métodos que permitam resolvê-los. É um ramo relativamente recente da matemática aplicada; nasceu por volta dos anos 1940-1950, nomeadamente para responder às necessidades da indústria aeroespacial. Um dos seus resultados mais célebres e mais fortes é o "Princípio do máximo de Pontrygin", obtido por investigadores soviéticos (um dos quais Lev Pontrygin) por volta de 1960; este problema estabelece condições necessárias que toda a solução de um problema de controle optimal deve verificar e é de uma ajuda preciosa na procura efectiva de soluções.

Imagens sem “ruído” !!!

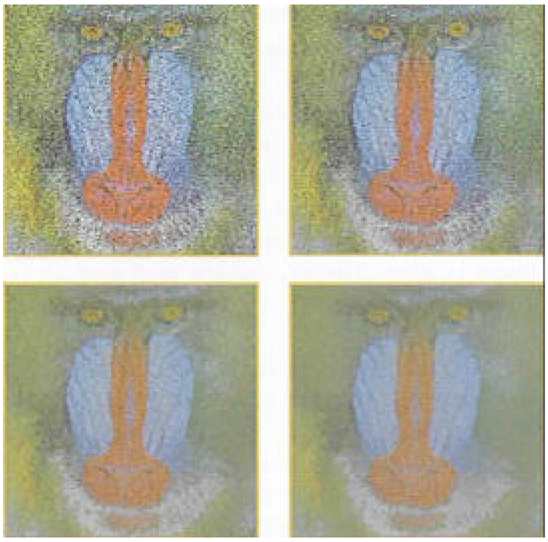
As imagens numéricas apresentam sempre imperfeições, designadas por ruído, que são devidas, por exemplo, aos receptores. Antes de ser possível analisar estas imagens, uma das primeiras etapas da visão por computador é suprimir esse ruído, isto é, obter uma imagem tão regular quanto possível a partir da imagem em bruto.
Isso pode ser feito graças a um algoritmo onde cada nível de cinzento da imagem é codificado de uma forma numérica
Este algoritmo estende-se, sem dificuldade, às imagens a cores.

DO ESBATIDO AO NÍTIDO
Para realizar esta operação, utilizam-se equações às derivadas parciais. A mais comum é a equação do calor. Para uma imagem a preto e branco, isso consiste em considerar que o nível de cinzento de cada ponto é uma média ponderada dos níveis de cinzento dos pontos vizinhos. Isso tem como inconveniente o tornar esbatidos os bordos dos objectos. Remedeia-se isso, utilizando técnicas que não envolvem todos os pontos vizinhos.

Equações para imagens bem nítidas

Daqui para o futuro, vivemos na época da imagem, do numérico e das telecomunicações. Mas, sem tratamento matemático apropriado, uma grande parte das imagens reproduzidas ou retransmitidas seriam de péssima qualidade.

A prima afastada de Johnny Napalliday casou com o avançado centro da equipa nacional de futebol. Um repórter fotográfico do Paris-Tchatche foi destacado para o lugar a fim de imortalizar este feliz acontecimento, de uma importância capital para o futuro da humanidade. Armado com o seu aparelho de registo de imagens numéricas, ele metralhou o casal, em seguida enviou as imagens para a redacção da revista via o seu telefone portátil último grito.



A iconógrafa que deve escolher a fotografia a publicar está perplexa: todas as fotografias estão pouco nítidas e salpicadas de pequenas manchas. Falta de jeito do fotógrafo, poeiras na objectiva, imperfeições nos captores electrónicos, má qualidade das transmissões radio ou da sua recepção? Pouco importa. Em vez de retocar ela mesmo as fotografias, tarefa demorada, a iconógrafa acciona, no seu computador, o programa lógico "PhotoMiracle" comprado à Micromou Inc. Alguns segundos mais tarde, ela recupera imagens nítidas e sem parasitas. O vestido da noiva aparece, por fim, mais branco do que o branco...

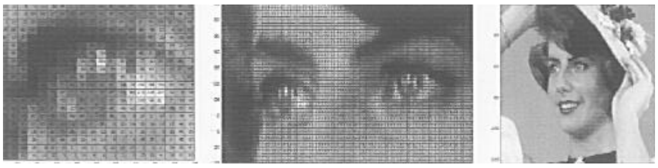
Limpar uma fotografia e melhorar a sua nitidez é uma das operações que o tratamento numérico de imagens tem em vista. É uma área de investigação cuja importância não cessa de crescer: diz-lhe claramente respeito a transmissão e reprodução de fotografias, o restauro de fotografias e filmes antigos, a análise de fotografias aéreas ou de satélite, a produção de imagens médicas, a visão robótica, o reconhecimento automático da escrita, a detecção de defeitos nos componentes industriais, etc.

Retornemos à clarificação das imagens. Como fazê-la? Um dos passos mais eficazes e mais prometedores, desenvolvido especialmente na universidade de Paris-Dauphine, utiliza "equações às derivadas parciais", isto é, equações diferenciais onde as funções a determinar dependem de várias variáveis. Antes de mais, considera-se a imagem a tratar como uma função u_0 que, a cada ponto (x, y) da imagem, associa o seu nível de cinzento u_0(x, y) (isso para uma imagem a preto e branco; para uma imagem a cores, o princípio é o mesmo, processa-se separadamente cada cor de base). Trata-se, então, de construir a partir da função conhecida u_0 uma nova imagem, mais nítida, representada por uma nova função u.

Para o fazer, supõe-se, em primeiro lugar, que u depende de três variáveis: x e y (como u_0), e uma terceira variável t que vai corresponder a uma espécie de "grau" de nitidez. No início, isto é, para t = 0, u deve corresponder a uma imagem inicial com ruído, condição que se escreve:
$u(x, y, t = 0) = u_0(x, y)$ para todos os x e y.

Em seguida, tenta determinar-se uma equação que a função u (x, y, t) deve verificar, de forma a que a solução desta equação (isto é, u) corresponda a uma imagem mais nítida. A procura de uma tal equação é, evidentemente, a etapa mais difícil, mais do que a sua resolução efectiva.

Uma das primeiras ideias foi estabelecer uma analogia com um fenómeno físico, a difusão do calor. Da mesma forma que, num material, o calor se difunde de um ponto a outro, de vizinho em vizinho, e tende, assim, a repartir-se uniformemente à medida que o tempo se escoa, pode imaginar-se fazer "difundir" de vizinho em vizinho os níveis de cinzento numa imagem. Assim, as asperezas dos níveis de cinzento diminuirão e determinar-se-á um nível de cinzento mais uniforme: apagar-se-ão, de alguma forma, as pequenas manchas.

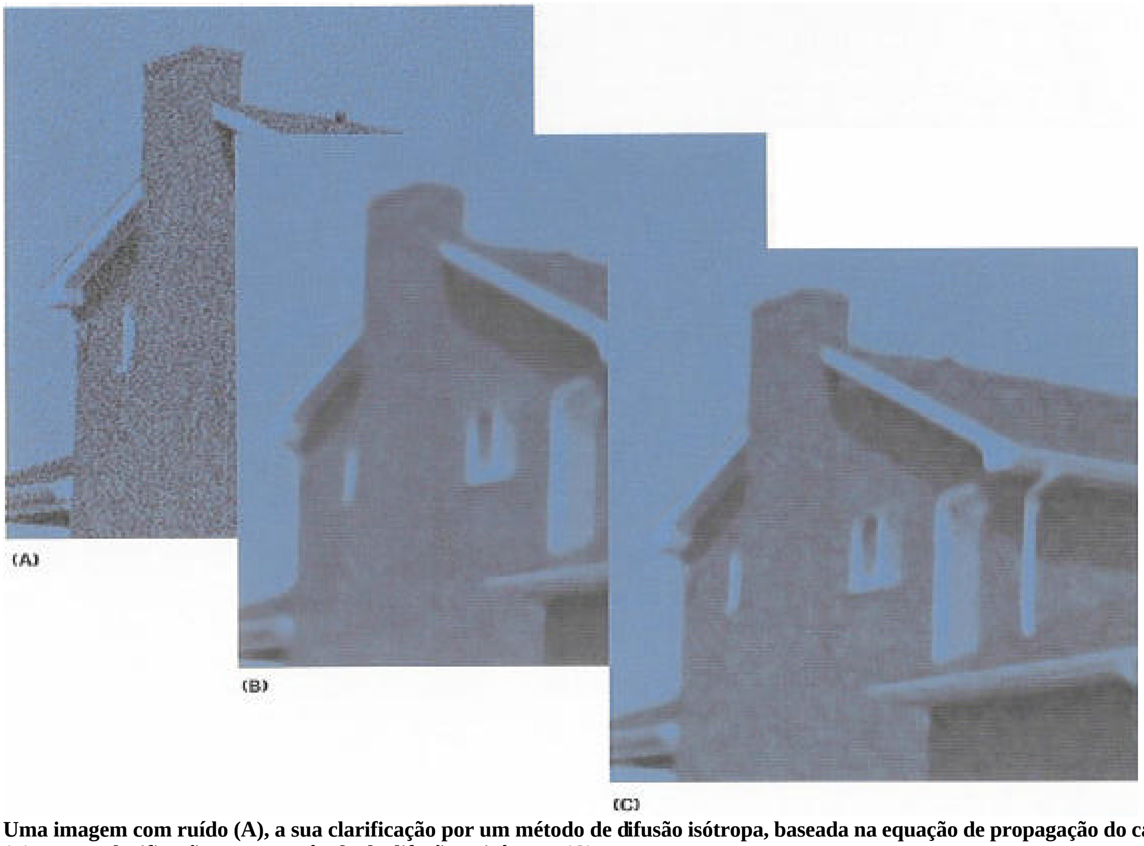


Um método de clarificação consistiria, então, em impor à função u(x, y, t), definida mais acima, que obedeça à mesma equação que descreve a propagação do calor. Esta é bem conhecida desde o século XIX — foi o matemático e físico Joseph Fourier quem a estabeleceu e estudou. A função u deveria, assim, verificar a seguinte equação às derivadas parciais: $\partial u/\partial t = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$, com a condição inicial $u(x, y, t = 0) = u_0(x, y)$ para todos os x e y.
Nesta escrita, uma "derivada parcial" como $\partial u/\partial t$ designa simplesmente a derivada de u em ordem a t, considerando as outras variáveis (aqui, x e y) como fixas. A variável t interpreta-se como sendo o tempo.

Suponhamos que se resolveu a equação, logo calculou-se u(x, y, t). Se se escolheu t demasiado pequeno, os níveis de cinzento não terão tido tempo de se difundir e u corresponderá a uma imagem insuficientemente nítida (ver-se-á ainda "ruído" na imagem). Se se considera t demasiado grande, os níveis de cinzento estarão completamente difusos e toda imagem será de um cinzento uniforme: toda a informação estará perdida. É preciso, portanto, escolher um valor razoável de t, nem demasiado pequeno, nem demasiado grande.

Mas este método de clarificação, fielmente decalcado sobre a difusão do calor, coloca alguns problemas. Em particular, a difusão dos níveis de cinzento aplica-se também aos bordos dos objectos representados na imagem, o que torna os contornos mais esbatidos. (ver a ilustração).

Que fazer? Modificar a equação imposta a u de forma a que a difusão não se efectue ao nível dos contornos. Do ponto de vista matemático, um contorno é reconhecível: ele corresponde a uma região da imagem onde o nível de cinzento varia fortemente, portanto a norma do gradiente de u tem valores elevados (o gradiente de u é um vector cujas componentes são as derivadas parciais de u em relação às variáveis x e y; mede o grau de variação de u e a sua direcção). Os matemáticos modificaram, portanto, a equação satisfeita por u, substituíram o seu membro da direita por uma expressão mais complicada, fazendo intervir, entre outros, o gradiente de u. Há diversas maneiras de o fazer e isso exige, em seguida, outros estudos matemáticos, por exemplo para provar a existência e a unicidade da solução da equação, ou para determinar um método de resolução (numérico) eficaz e rápido.
Qualquer que seja, o resultado procurado é uma difusão anisótropa, isto é, que não se efectua da mesma forma em todas as direcções e o menos possível perpendicularmente aos contornos. E os exemplos de clarificação da imagem que nos mostram os matemáticos (ver abaixo) procedendo assim, têm um ar bastante convincente!



Uma imagem com ruído (A), a sua clarificação por um método de difusão isótropa, baseada na equação de propagação do calor (B) e a sua clarificação por um método de difusão anisótropo (C).

A bolsa sem risco?

Como fazer uma operação na bolsa sem correr riscos? Basta fazer um seguro por um preço e para um período fixados antecipadamente.
O exemplo mais antigo é o dos mercadores genovêses: quando fretavam um barco, compravam uma opção para um segundo navio. Se o primeiro chegasse a bom porto, a opção não se concretizava e perdia-se o seu valor; se ele fosse ao fundo, o seguro permitia comprar a carga do segundo a um preço fixado antes. Uma fórmula encontrada por Black e Scholes (prémio Nobel de economia em 1997), permite, actualmente, fixar antecipadamente o preço da opção.
O desenvolvimento considerável dos mercados financeiros leva hoje a uma oferta crescente de produtos, chamados derivados, que cobrem riscos cada vez mais complexos.

GUARDAR OS DÓLARES?
- *Eu acabo de fazer uma viagem em que usei Dólares!*
- *Se os trocar por Euros o risco que corro é nulo, mas porque não guardá-los, esperando que o Dólar suba?*
- *Pronto, eu guardo-os, mas ... e se o Dólar baixa?!?*

Estou perplexo!!!
Posso ...
Resposta: sim, é possível ...
Mas não é de borla!!!
O banco pode dar-lhe garantias de vender os seus Dólares ao melhor preço durante os próximos 6 meses. Terá a certeza que não ficará a perder muito!!!
Mas ... não é de graça, claro.
É preciso que o banco tenha, também, lucro com isso.
Quanto terá de pagar por isso?
A resposta está na fórmula de Black e Scholes!
Conclusão: fazer matemática, também pode dar garantias.

A Matemática, é dinheiro!

Os funcionários das finanças compram ou vendem toda a espécie de produtos não materiais como acções ou opções. Para fixar os seus preços é preciso ter em conta riscos e flutuações das cotações; o que não é simples!

Os bancos e as finanças quem recrutam? Banqueiros e financeiros? Não, matemáticos. Para fazer adições e multiplicações? Não, isso faz o computador muito melhor do que eles... Se o mundo financeiro e bancário precisa cada vez mais de matemáticos é certamente para ajudar a fixar preços dos diversos produtos que oferece (contratos a prazo, opções,, etc.), a avaliar os riscos financeiros, a gerar capital com o mínimo risco de perda de dinheiro. Tudo num mercado cada vez mais vasto (a globalização a isso obriga), complexo e diversificado.

Entre a grande quantidade de produtos financeiros doravante acessíveis a toda a gente, ou a quase toda, estão as opções, das quais há, aliás, numerosas variantes. O que é uma opção de compra? Imaginemos que um fabricante de gelado de baunilha (o verdadeiro, com pelo menos uma vagem de baunilha por litro de leite!) quer ter garantias quanto ao risco dum grande aumento do preço desta orquídea, na sequência de, por exemplo, condições climatéricas desfavoráveis ou complicações sócio económicas nas regiões produtoras. Os mercados financeiros poderiam oferecer ao nosso fabricante a possibilidade de "optar" por uma compra casual, ao preço actual e com um prazo fixo, duma certa quantidade de vagens de baunilha. Noutros termos, o nosso fabricante de gelados reserva-se o direito de comprar, digamos dentro de seis meses, uma tonelada de vagens. Passados os seis meses, ele decide ou não exercer esse direito, de acordo com o estado do mercado; se os preços tiverem aumentado, ele tem interesse em efectuar a opção; se baixarem, ele renuncia e compra pelas vias usuais. A escolha da opção é, pois, uma espécie de contrato de garantia contra o aumento das cotações.

$$C = S \times N(d_1) - K \times e^{-rt} N(d_2)$$

Contudo, tudo se paga, quer os contratos de seguros que as opções. É aí que está a questão. Como fixar o preço da opção?

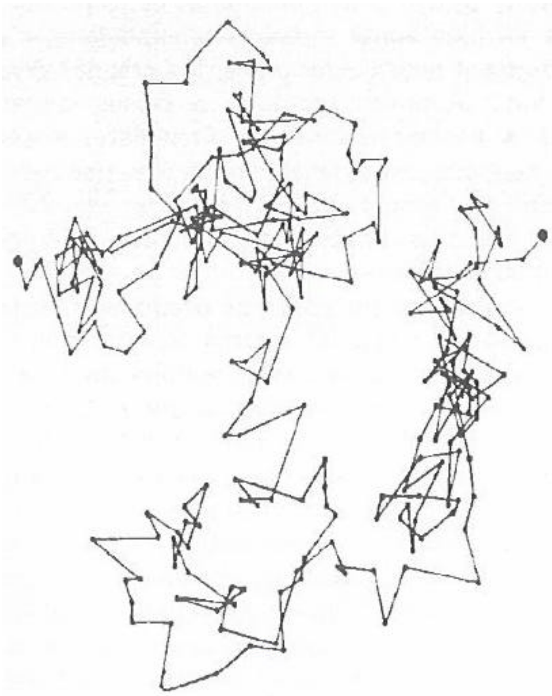
Em domínios como a economia, as finanças, ou as seguradoras, o imprevisto e o acaso desempenham um papel fundamental. A evolução, com o tempo, do preço de um produto, da cotação de uma acção, depende dum grande número de factores imprevisíveis; na prática, constata-se que o mercado flutua de um modo bastante aleatório. É, pois, preciso ter em conta este aspecto aleatório e os riscos financeiros que isso implica, para determinar o preço da opção. Do ponto de vista matemático é a teoria das probabilidades – em particular a dos processos estocásticos – que permite modelar este tipo de problemas e obter respostas precisas. Trata-se de matemática de ponta, que ultrapassa largamente conceitos e técnicas relativamente elementares, permitindo, por exemplo, calcular a probabilidade de ter uma combinação ganhadora no Loto (no Loto, ao contrário das situações financeiras, o número de possibilidades é finito, e as leis de probabilidade subjacentes são simples e perfeitamente conhecidas: a probabilidade, digamos, de tirar a bola com o número 13 do conjunto das bolas de 1 a 49 é 1/49).

As primeiras aplicações das probabilidades aos aparelhos financeiros como as cauções remontam a 1900, com os trabalhos, ignorados durante muito tempo, do matemático francês Louis Bachelier. Uma etapa importante foi alcançada pelos anos 1970 graças aos americanos Paul Samuelson, Robert Merton, Fischer Black e Myron Scholes e conduziu a uma fórmula que permite fixar o preço "certo" das opções.

A "fórmula de Black-Scholes", hoje célebre e muito utilizada

pelos estabelecimentos financeiros, foi obtida com a ajuda de ferramentas matemáticas (em particular o "cálculo estocástico" criado por volta de 1944-46 pelo japonês Kiyosi Itô) desenvolvidas em relação com o movimento browniano. Este tipo de movimento, estudado por Einstein mesmo no começo do século XX, e por outros físicos ou matemáticos até aos nossos dias, foi descoberto pelo botânico escocês Robert Brown em 1827: quando observamos ao microscópio gãos de pólen imersos num líquido vemos os grãos moverem-se de modo errático e descreverem trajectórias bastante extremamente irregulares (ver figura). O movimento brouniano dos grãos de pólen resulta de minúsculos mas inumeráveis choques com as moléculas do líquido, também elas sujeitas a uma agitação térmica desordenada. Os crescimentos financeiros como o preço de uma acção cotada na Bolsa flutuam de modo semelhante ao movimento brouniano, sob o efeito acumulado das compras e vendas realizadas no mercado por numerosos operadores.

Mas, embora representativo de muitos processos aleatórios, o movimento brouniano não é o único que temos que enfrentar. Os matemáticos das finanças procuram modelos e fórmulas mais satisfatórias que as do tipo Black-Scholes, por exemplo partindo de hipóteses de base mais fieis às realidades do mercado que as leis de probabilidade subjacentes ao movimento brouniano.



Uma trajectória brouniana num plano
As trajectórias descritas num movimento brouniano têm certas particularidades matemáticas. Por exemplo, uma trajectória rigorosamente brouniana é contínua mas de tal forma irregular que não tem tangente em nenhum dos seus pontos. A matemática que foi desenvolvida para analisar o movimento brouniano – uma sub-disciplina da teoria das probabilidades que se interessa pelos processos aleatórios que evoluem continuamente com o tempo, e não em instantes sucessivos instantes sucessivos e separados serve, também, para produzir produtos financeiros como as cauções de compra e venda.

Cálculo estocástico e modelo de Black-Scoles

Suponhamos que se quer fixar o preço de uma opção relativa a um determinado produto ou de uma acção financeira cuja cotação no instante *t* é S_t. O modelo de Black-Scholes para avaliar o preço da opção parte da hipótese que, entre o instante *t* e o instante $t + dt$, a cotação S_t sofreu uma variação relativa $(S_{t+dt} - S_t) / S_t$ igual à soma de dois termos: um, mdt, é um acréscimo não aleatório representando a "tendência" geral do mercado; o outro, $s(B_{t+dt} - B_t)$, correspondendo a uma flutuação aleatória e imprevisível do tipo brouniano (B_t representa um processo brouniano, isto é, uma grandeza análoga à de posição, no instante *t*, duma partícula que efectua um movimento brouniano ao longo de uma recta).

Isto escreve-se na forma condensada: $dS_t / S_t = mdt + sdB_t$, onde m e s são constantes. Tomando *dt* infinitamente pequeno, esta expressão assemelha-se a uma equação diferencial cuja "incógnita" é a cotação S_t. Com efeito, trata-se de uma "equação diferencial estocástica" pois põe em jogo um processo aleatório estocástico. Se a equação acima envolvesse funções ordinárias, *S(t)* e *B(t)*, a sua resolução faria intervir o integral $\int_0^T S(t)dB(t)$ definido como o limite da soma

$$S(0)\left[B(t_1) - B(0)\right] + S(t_1)\left[B(t_2) - B(t_1)\right] + S(t_2)\left[B(t_3) - B(t_2)\right] + \ldots + S(t_{n-1})\left[B(T) - B(t_{N-1})\right]$$

quando a subdivisão do intervalo [0, T] em N subintervalos (especificados por $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_{N-1} < T$) é cada vez mais fina ($N \to \infty$).

Mas se B_t representar um processo brouniano, demonstra-se que o limite desta soma não existe no sentido usual (pois as variações $B_{t'} - B_t$ podem ser suficientemente grandes para levar a um resultado infinito). Uma parte da teoria do cálculo estocástico consiste, portanto, em definir de modo conveniente uma expressão do tipo $\int_0^T S_t dB_t$ chamada integral estocástico. Mais geralmente, o cálculo estocástico consiste em construir, por processos estocásticos, um equivalente do cálculo diferencial e integral usuais. Ele permite, pois, tratar equações como a que apresentámos acima, cuja resolução é uma das etapas do modelo de Black-Scholes.

Um fenómeno turbulento!

Quer se trate do nascimento e da trajectória de uma tempestade, da estrutura geométrica de uma nuvem e do seu papel na absorção dos raios solares e telúricos, da assimilação optimal de medidas heterogéneas e dispersas (estações meteorológicas, satélites, aviões, barcos, ...) num modelo numérico de previsão do tempo, ...: a modelação matemática está omnipresente na meteorologia moderna; ela serve para descrever e compreender os mecanismos, analisar e prever o tempo ou o clima.

TURBULÊNCIAS ATMOSFÉRICAS

Os fluxos turbulentos e os movimentos da atmosfera podem ser modelados pelas equações de Navier-Stokes que não sabemos resolver.

Os meteorologistas recorrem, por isso, à simulação numérica, utilizando os computadores mais potentes e os esquemas numéricos mais sofisticados. Usam, também, a teoria matemática dos sistemas dinâmicos.

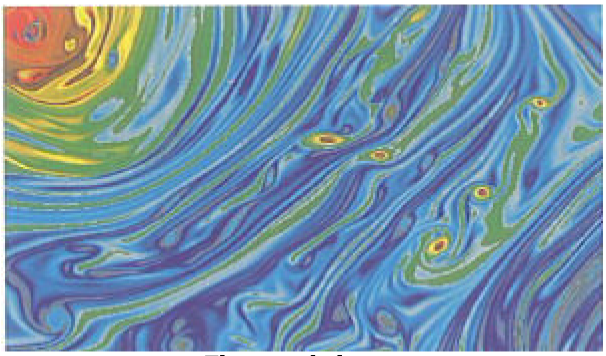
Foi um meteorologista, E. N. Lorenz, quem evidenciou, em 1963, o carácter caótico das trajectórias de um sistema dinâmico simples e a sua sensibilidade às condições iniciais, evocando o efeito, no futuro, do bater das asas de uma borboleta no fluxo atmosférico.

Prever o tempo, um grande desafio

Para obter previsões meteorológicas ou climáticas é preciso dispor de equações que descrevam a evolução das condições atmosféricas. Em seguida, resolvê-las, coisa que o computador não consegue fazer sozinho!

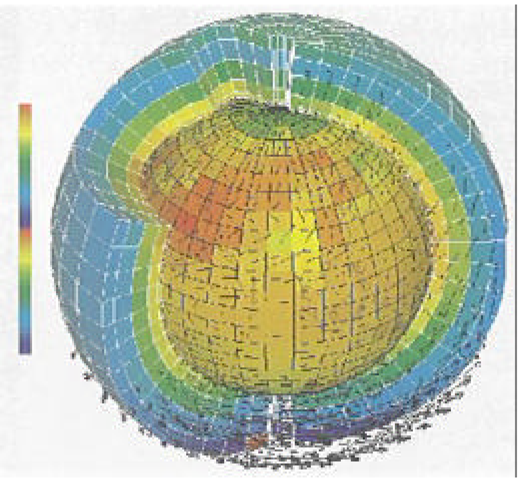
As previsões meteorológicas progrediram muito no decorrer as últimas décadas. Mas acontece, por vezes, que as previsões têm apenas uma pequena relação com o tempo que estará no dia seguinte. Devemos, neste caso, culpar a pessoa que apresentou o boletim meteorológico? Os meteorologistas? Os seus computadores? Os caprichos da natureza? Na verdade, a previsão do tempo ou do clima é um grande desafio científico. O seu princípio, posto em 1904 pelo meteorologista norueguês Vilhelm Bjerknes, parece, contudo simples: conhecendo as leis de evolução do estado da atmosfera, podemos calcular o seu estado futuro no instante *t*, se conhecermos o seu estado inicial no instante 0. Mas, vendo melhor, as dificuldades são muitas.
Primeiro, as leis de evolução têm de incluir as leis fundamentais da mecânica e da termodinâmica para a água e o ar da atmosfera. Devem também integrar as especificidades do sistema climático, como a esfericidade da Terra, os raios solares, o papel do relevo, o dos oceanos, o da vegetação, etc. Tudo isto torna a maquinaria meteorológica um sistema extremamente complexo, fazendo intervir uma quantidade de fenómenos físicos, químicos e biológicos. Alguns são bem conhecidos e compreendidos, outros muito menos (como a turbulência ou influência das nuvens). Uma primeira dificuldade diz, portanto, respeito, à análise e modelação: é preciso identificar, quantificar, reter os fenómenos que têm importância e esquecer os outros. Esta tarefa, mesmo que não dependa do matemático, precisa de ferramentas matemáticas por vezes delicadas.
Passemos à frente.

Suponhamos que conseguimos um conjunto de leis pertinentes que regem a evolução das condições meteorológicas. Como se traduz um tal "modelo"? Por equações envolvendo funções desconhecidas que caracterizam a situação atmosférica e as suas variações. Essas funções são, por exemplo, a pressão $P(x,y,z,t)$ ou a velocidade do ar $v(x,y,z,t)$ no ponto de coordenadas (x,y,z) e no instante t, ou ainda, a humidade h, a temperatura T, etc. Mais precisamente, o modelo meteorológico ou climático traduz-se por um sistema de equações que faça intervir as funções P, v, h, T, etc. (que dependem de várias variáveis) e as suas derivadas em relação ao tempo t ou em relação a x, y ou z. É um sistema de "equações às derivadas parciais" (ver quadro).



Fluxos turbulentos

A resolução não se consegue, por várias razões. Uma resolução "analítica" exacta está fora de causa: não o conseguimos a não ser para raras equações simples. Por outro lado, quanto mais o modelo tente aproximar-se da realidade, mais o sistema de equações correspondente é maior e mais complicado. Os processos numéricos que visam dar uma boa aproximação dos valores da solução constituem o único recurso. Eles são muitos e variados, mas a ideia de base é "discretizar" as equações: cortamos o espaço e o tempo num número finito de pedaços, e consideramos a título de aproximação que cada uma das funções procuradas, a pressão $P(x,y,z,t)$ por exemplo, tem um valor uniforme no interior de cada pedaço.



Nos modelos matemáticos utilizados pelos meteorologistas ou pelos climatólogos, a atmosfera é cortada em pedaços, ou células, e considera-se que em cada uma das células as grandezas meteorológicas (pressão, velocidade do vento, temperatura, humidade, etc.) têm valores uniformes. Obtêm-se, assim, equações simplificadas em que o número de incógnitas é finito, que em seguida se resolvem numericamente.

Deste modo, conduzimos o número de incógnitas do problema (os valores das funções) para um número finito. As derivadas são, então, aproximadas por diferenças; por exemplo, se cortarmos o eixo dos *x* em pedaços de igual comprimento ? *x*, a derivada com respeito a *x*
duma função *f* no ponto x_0 pode ser aproximada pela razão
$[f(x_0 + Dx) + f(x_0)/Dx]$. Procedendo assim, transformamos o sistema de equações diferenciais inicial num sistema de equações algébricas em N incógnitas (onde N é muito grande).

A resolução deste novo sistema, ainda que mais simples, exige muitíssimos cálculos numéricos. E, quanto mais finamente cortarmos o espaço e o tempo (para se aproximar das equações originais, onde as funções variam a priori continuamente quando as suas variáveis mudam) mais os cálculos são volumosos. Foi por isso que os modelos de previsão numérica do tempo só apareceram por volta de 1940, com a invenção dos computadores. Foi, também, por isso que as previsões meteorológicas melhoraram paralelamente ao aumento de potência dos computadores.

Mas os computadores não fazem tudo. Por exemplo, eles não garantem que a solução do sistema discretizado seja semelhante à verdadeira solução, a do sistema inicial de equações às derivadas parciais. Há várias maneiras de discretizar equações, e os resultados obtidos não têm, por vezes nada a ver com a verdadeira solução, mesmo quando se corta o espaço e o tempo em bocados cada vez mais pequenos. Obter resultados certos não é tarefa fácil. Mas aperfeiçoa-se como os anos: uma disciplina matemática completa, a análise numérica, permite encontrar processos numéricos eficazes para avaliar rigorosamente a sua eficácia, procurar teoremas e critérios precisos que permitam dizer se este ou aquele método numérico aplicado a este ou àquele sistema de equações convergirá para uma solução, a que ritmo, e se essa solução é a esperada.

As "condições iniciais", isto é, o tempo que faz no instante 0, representam outra dificuldade. É preciso conhecê-los completamente para que as equações determinem o tempo que fará num instante futuro, *t*. Será necessário, para isso, medir a pressão atmosférica, a temperatura, a velocidade do vento, etc. em cada ponto da Terra, e nesse mesmo momento. É evidentemente impossível, e o nosso conhecimento das condições iniciais é apenas muito parcial. Como gerar esse défice de informação, como devem os modelos ter isso em conta, essa é ainda uma questão em que intervêm a matemática.

Lembremos, para terminar, o fenómeno do "caos determinístico", que os matemáticos dos *sistemas dinâmicos* estudam de perto: para certos sistemas, mesmo simples, a evolução é extremamente sensível no estado inicial. Noutros termos, mudando ligeiramente o estado inicial, o estado futuro pode vir profundamente modificado. Não sendo o estado inicial nunca conhecido com uma precisão total, a modelação numérica dum tal sistema "caótico" daria, no final, um resultado sem significado; mudando ligeiramente os dados do programa de cálculo, obteríamos um resultado completamente diferente. Sabendo que certos mecanismos meteorológicos ou climáticos são caóticos, os peritos pensam que, no futuro, nunca se poderá prever o tempo com precisão para mais de quinze dias (contra quatro ou cinco dias, actualmente). Para além disso, podemos, no entanto esperar fazer previsões climáticas, ou seja, prever por exemplo médias de temperaturas ou de precipitações. Duro ofício o de meteorologista ou climatólogo.

A equação de Navier-Stokes

Uma das principais equações da mecânica dos fluidos é a equação de Navier-Stokes, que intervem no estudo da turbulência, em meteorologia, em aerodinâmica, etc. Estabelecida no século XIX, ela é ainda objecto de numerosos estudos matemáticos, para determinar por exemplo em que condições a sua solução existe e é única. Esta equação traduz localmente, em cada ponto dum fluido em movimento, a lei fundamental da dinâmica (força = massa × aceleração), na aproximação onde o fluido é incompreensível. Na ausência de forças exteriores, e a duas dimensões, para simplificar, a equação de Navier-Stokes constitui um sistema de três equações às derivadas parciais ligando a velocidade à pressão. Elas escrevem-se assim:

$$r\partial v_x/\partial t + r\left(v_x\partial v_x/\partial x + v_y\partial v_x/\partial y\right) = -\partial P/\partial x + a\left(\partial^2 v_x/\partial x^2 + \partial^2 v_x/\partial y^2\right)$$

$$r\partial v_y/\partial t + r\left(v_x\partial v_y/\partial x + v_y\partial v_y/\partial y\right) = -\partial P/\partial y + a\left(\partial^2 v_y/\partial x^2 + \partial^2 v_y/\partial y^2\right)$$

$$\partial v_x/\partial x + \partial v_y/\partial y = 0$$

onde r é a densidade do fluido, a um coeficiente de viscosidade, $P(x,y,t)$ a pressão no ponto (x,y) e no instante *t*, $v_x(x,y,t)$ e $v_y(x,y,t)$ as componentes segundo O*x* e O*y*, respectivamente, do vector velocidade do fluido no ponto (x,y) e no instante t (a “derivada parcial” duma função $f(x,y,t)$ com respeito a *x*, ¶*f* /¶*x* , é a derivada de *f* com respeito a *x* considerando as outras variáveis fixas). À equação de Navier-Stokes, que apenas sabemos resolver numericamente, devemos juntar as “condições iniciais” ou “condições nos limites” sobre as funções incógnitas para que o problema fique matematicamente bem posto.

Prejuízo Zero!

Na indústria automóvel as simulações com computadores substituem cada vez mais as experiências reais. Para isso, os engenheiros desenvolvem modelos virtuais de viaturas descritos por equações cuja resolução recorre a métodos matemáticos avançados e computadores especiais. Pode-se, assim, testar o comportamento dos veículos pelo custo mínimo.

SIMULAÇÕES: DO REAL AO VIRTUAL
O protótipo virtual duma viatura requer a concepção dum modelo matemático global integrando as características do veículo, mas também as suas interacções com a estrada, com o ar, a descrição de eventuais obstáculos, etc. Daí resulta um sistema de equações que, depois de discretizado, se resolve num computador com métodos numéricos.
A complexidade destes modelos conduz a cálculos muito volumosos que requerem computadores sofisticados.

Quando a matemática quantifica o choque

Simular numericamente o choque dum acidente de viação e os danos corporais que daí resultam, é uma atitude cada vez mais utilizada pela indústria automóvel para melhorar a segurança dos veículos.

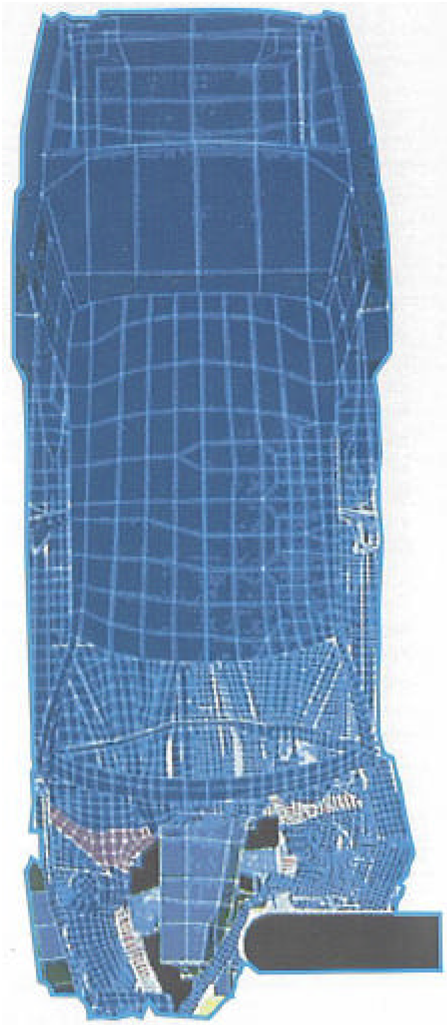
Na Europa, as estradas matam mais de 50 000 pessoas por ano e ferem mais de 1milhão e meio. Estes números são terríveis e, contudo, o número de óbitos é cerca de 2,5 vezes menor do que há vinte anos, enquanto o tráfego automóvel aumentou muito nesse período. O melhoramento da situação resulta, em parte, dos progressos feitos na concepção dos veículos. Os fabricantes esforçam-se por optimizar a arquitectura do habitáculo, os acessórios (cintos de segurança, airbags, ...) os materiais, etc., de modo a conseguir uma maior segurança para os ocupantes. É por isso que, por exemplo, a parte dianteira dos actuais veículos se deforma com relativa facilidade quando há choque, de modo que uma boa parte da energia do choque se dissipe nas estruturas deformadas antes de atingir os ocupantes.

A optimização da segurança numa viatura supõe previamente um estudo aprofundado do que se passa durante os milésimos de segundo que dura o choque: como reagem as estruturas do veículo, a que movimentos estão submetidos os passageiros, sobre que partes do corpo se exercem as pressões mecânicas, quais são as consequências nos diferentes orgãos e tecidos anatómicos. Um tal estudo é, frequentemente efectuado por meio de experiências reais, onde se substituem os ocupantes de carne e osso por manequins apropriados e equipados com sensores. O problema é que essas experiências além de longas e dispendiosas não são fáceis de pôr em prática pois é extremamente difícil construir manequins que reproduzam de modo satisfatório as características biomecânicas do corpo humano. Em particular, os manequins actuais são aceitáveis ao nível da cabeça, do pescoço e do tórax, mas deixam a desejar no que respeita a membros, articulações e reacções musculares.

Um outro método usado há vários anos e que tende a difundir-se consiste em simular numericamente o choque e as suas consequências. Isso significa calcular em cada instante o que acontece ao veículo e aos seus ocupantes a partir de um modelo matemático que descreva o sistema. Logo na fase de modelação, estabelecem-se leis físicas às quais obedecem todas as estruturas envolvidas (por exemplo, as leis que descrevem como se deforma um certo material em função das pressões mecânicas às quais está submetido) e especifica-se a geometria dos diversos elementos e os seus parâmetros físicos (por exemplo, a forma e densidade dos diferentes tecidos e orgãos internos, a rigidez dos ossos, o seu limite de fractura, a plasticidade e elasticidade do acolchoamento das cadeiras, etc.). Esta fase é complexa e obriga a ter em conta dados geométricos, físicos, biológicos e médicos. No estado actual, limitamo-nos frequentemente a modelar, não o sistema completo veículo-ocupantes, mas apenas uma parte, como a cabeça do condutor quando submetida a um choque de intensidade e direcção bem precisos.

A modelação conduz a um certo conjunto de equações que descrevem, pelo menos aproximadamente, a evolução do sistema estudado no tempo e no espaço. Para a conhecer é necessário resolver equações. Trata-se, em geral, de equações em derivadas parciais, isto é, equações diferenciais envolvendo funções que dependem de várias variáveis (um exemplo de equação em derivadas parciais é $\partial f / \partial x + f \partial f / \partial y = 0$, onde f é uma função – à partida desconhecida – de x e y, $\partial f / \partial x$ a sua derivada em ordem a x e $\partial f / \partial y$ a sua derivada em ordem a y).

Não se sabe determinar soluções analíticas – isto é, expressões matemáticas explícitas e compactas – para uma equação em derivadas parciais, a não ser em casos muito simples. Não se sabe calcular numericamente – e pelo computador – uma solução aproximada. O método mais poderoso para uma tal resolução numérica chama-se o "método dos elementos finitos" (ver quadro) e é bastante complexo, tanto nos seus aspectos teóricos como práticos; os conceitos subjacentes são do âmbito da *análise funcional* (ramo da matemática que nasceu no século XIX e que estuda os *espaços* cujos "pontos" são funções). Em todo o caso, é graças a ela que os que concebem as viaturas podem simular os comportamentos das estruturas de um veículo ou os traumatismos dos seus ocupantes em caso de acidente, simulações que ajudam também a testar novas ideias para proteger a vida dos automobilistas.



O método dos elementos finitos

Suponhamos que se quer resolver uma certa equação em derivadas parciais incidindo sobre uma função $f(x, y)$ de duas variáveis, sendo esta equação válida num certo domínio D do plano. Muito esquematicamente, o princípio do método dos elementos finitos traduz-se por duas operações fundamentais:

1) Decompõe-se o domínio D num grande número N de pequenos elementos de forma geométrica simples, em geral triângulos (Nesta operação o contorno de D é reproduzido apenas de forma aproximada, a menos que D seja poligonal). Se D for um volume, podemos usar como elementos, por exemplo, tetraedros ou pentaedros.

2) Considera-se que, no interior de cada um desses elementos, a função procurada é aproximada por uma expressão polinomial em *x* e *y*. Por exemplo, num dado elemento, suponhamos no de ordem *i*, considera-se *f* aproximadamente igual a $P_i(x, y) = a_i + b_i x + c_i y$, onde a_i, b_i, c_i são constantes a determinar (que à priori diferem de elemento para elemento).

Assim, em vez de procurar valores de *f* em todos os pontos (*x*, *y*), o problema reduz-se a determinar os valores dos coeficientes a_i, b_i, c_i para $i = 1, 2, ..., N$. Esses coeficientes obedecem às seguintes condições:

a) a função *f* deve ser suficientemente regular, o que obriga a que no segmento comum a dois elementos adjacentes *i* e *j*, os valores das funções P_i e P_j coincidam;

b) a função *f* deve obedecer à equação em derivadas parciais dada no início (mais precisamente, para poder admitir funções *f* definidas por pedaços não se espera que esta equação seja estritamente satisfeita, mas que o seja apenas num certo sentido dito 'fraco', que permite transformá-la e obter uma formulação mais cómoda para a resolução);

c) a função *f* deve verificar uma certa "condição na fronteira" que conste no enunciado do problema, por exemplo, a condição $f(x, y) = 0$ para todos os pontos na fronteira de D.

Escrevendo explicitamente estas três restrições em termos dos polinómios P_i, obtemos um sistema de equações algébricas cujas incógnitas são a_i, b_i e c_i .

As técnicas clássicas e a análise numérica entram então em jogo para resolver estas equações e determinar os valores de a_i, b_i e c_i .

Se pretendermos melhorar a aproximação de *f* definida por polinómios P_i, podemos repetir o processo decompondo o domínio D em elementos ainda mais pequenos e mais numerosos, ou utilizando polinómios P_i de grau mais elevado.

No encalço do genoma!

Nas últimas duas décadas, o aparecimento de novas técnicas (sequenciamento do ADN…) abriu perspectivas revolucionárias em Biologia. Estas técnicas geraram uma massa considerável de dados muito variados (sequências, imagens, textos, resultados de experiências, bibliografias…).
A matemática está no centro do seu tratamento e permite extrair deles informações pertinentes. Os domínios mais solicitados são o algorítmico (são precisos procedimentos eficazes para encontrar os factos entre a massa de dados) e a teoria das probabilidades e a estatística (a tomada de decisões assenta em modelos aleatórios).

ESTRUTURA DAS PROTEÍNAS

As proteínas são longas cadeias de amino-ácidos que se encontram enroladas no espaço. A actividade de uma proteína explica-se essencialmente pela sua forma após enrolamento. Para múltiplas aplicações (farmacologia, agricultura…), é preciso conhecer essa forma. O método mais seguro actualmente é utilizar os processos da cristalografia, mas isso é muito demorado. Isto explica que se faça apelo, massivamente, a métodos matemáticos e informáticos para "calcular" essa forma.

A genética no terror dos cálculos

O sequenciamento do genoma dos organismos vivos requer ferramentas informáticas e matemáticas. A gigantesca massa de dados produzidos pelo sequenciamento necessita, por seu lado, de outras ferramentas, a fim de a armazenar, gerir e analisar.

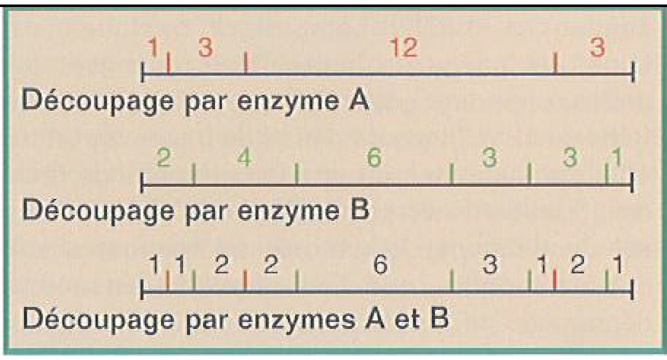
Depois da descoberta do ADN, molécula que contém a informação genética que caracteriza um organismo vivo, a genética tornou-se molecular e conheceu progressos fulgurantes. A determinação do encadeamento das "bases", essas moléculas de quatro tipos notadas A, C, G e T, de que a dupla hélice de ADN é constituída, tornou-se uma actividade de amplitude industrial e internacional. Dezenas de laboratórios públicos ou privados rivalizam e investem somas consideráveis para sequenciar o ADN de organismos de diversas espécies. Também desde já se sequenciou o genoma de várias dezenas de organismos, sobretudo bactérias, mas também a levedura da cerveja, o verme nemátode *Caenorhabditis elegans*, a famosa mosca drosófila que tão útil foi aos geneticistas, o arroz, etc.

Muito recentemente, o do homem foi igualmente sequenciado, graças a grandes esforços desenvolvidos ao longo de vários anos. A mais longo prazo, estes sequenciamentos têm implicações tão fundamentais (compreensão dos mecanismos da vida, dos parentescos entre espécies, etc.) como: medicinais (tratamento de doenças genéticas), agrícolas (aperfeiçoamento das plantas), fito-sanitárias (resistência às doenças), farmacêuticas ou industriais.

O sequenciamento de um genoma, e o trabalho que em seguida é necessário para compreender a significação biológica das sequências obtidas, não têm nada de evidente. Sem falar das técnicas bioquímicas, elas necessitam da invenção de métodos informáticos, estatísticos ou algorítmicos adaptados.

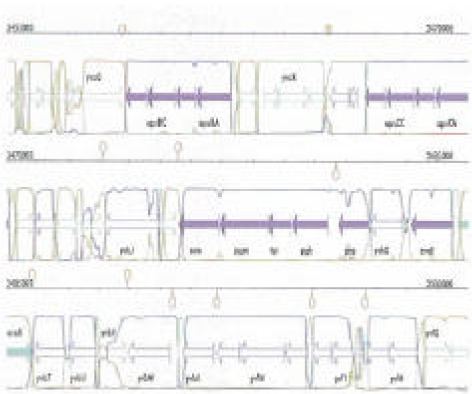
É útil uma colaboração estreita entre biólogos, informáticos e matemáticos. Tomemos o caso de um sequenciamento. Sabe-se, por meios físico-químicos, "ler" curtas sequências de ADN com algumas centenas de pares de bases. Mas como fazer para um genoma inteiro, como o da levedura (mais de 12 milhões de pares repartidos por 16 cromossomas) ou, pior ainda, o do homem (3 biliões de pares de bases)? A ideia é cortar o genoma em fragmentos suficientemente pequenos, que se sequenciam em seguida. Esse corte pode nomeadamente fazer-se com a ajuda de enzimas, ditas de restrição, que cortam o ADN em cada lugar em que aparece um certo encadeamento de bases - por exemplo, a enzima denominada EcoRI corta depois do G de cada vez que encontra o encadeamento GAATTC.

Fazendo agir enzimas de restrição diferentes, separadamente ou em conjunto, obtêm-se conjuntos de fragmentos de comprimentos diversos, comprimentos que se podem medir por electroforese (técnica que utiliza a migração das moléculas por efeito de um campo electromagnético). Um problema difícil, de natureza combinatória, é o de determinar o lugar de cada fragmento na porção inicial de ADN - ou seja, reconstituir a ordem de encadeamento dos fragmentos - conhecendo apenas os comprimentos dos fragmentos (ver ilustração da tabela anterior). Esta questão intervém em particular no estabelecimento dos chamados mapas físicos do genoma, estádio preliminar que consiste em colocar "estacas" no bocado de ADN estudado.



Suponhamos que uma enzima do tipo A corta um bocado de ADN em certos lugares, como no desenho de cima, que uma enzima do tipo B o corta como no desenho do meio (os números indicam os comprimentos dos segmentos). Fazendo agir simultaneamente as duas enzimas, tem-se o corte indicado pelo desenho de baixo.
O experimentador apenas tem acesso aos comprimentos dos fragmentos obtidos em cada um dos três casos, ou seja, ele apenas conhece os três conjuntos E_A = {1,3,3,12}, E_B = {1,2,3,3,4,6} e E_C = {1,1,1,1,2,2,2,3,6}.
Como reconstituir a ordem pela qual estes fragmentos se encadeiam? Um método "brutal" seria passar em revista todas as ordens possíveis para os cortes A e B, e reter aquela ou aquelas (há, em geral, várias soluções) que dão os valores certos dos comprimentos dos fragmentos obtidos com a combinação das enzimas A e B.
Se o corte A gerar p fragmentos e o corte B gerar q fragmentos, será necessário, com este método, explorar n = p!q! configurações possíveis, e rapidamente se atingem valores de n demasiado grandes para que o método seja realista.
Conceber um algoritmo eficaz de procura da ordem dos fragmentos conhecidos os seus comprimentos, é uma das questões de natureza matemática ou informática que se colocam em genética molecular.

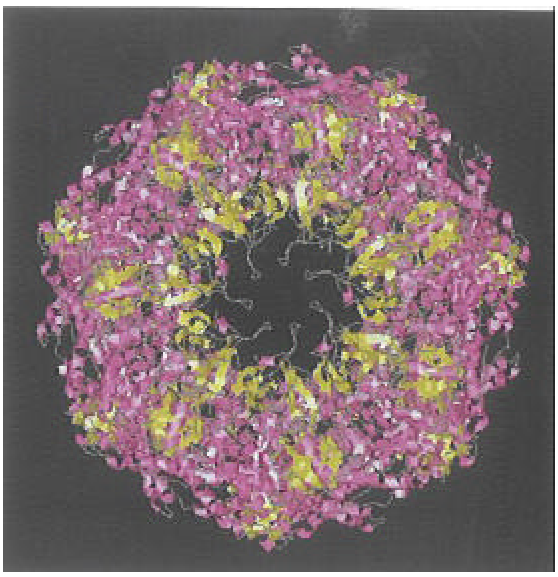
O sequenciamento de um genoma representa uma tarefa pesada e ingrata que não traz em si novos conhecimentos: o resultado é apenas um longo texto escrito com um alfabeto de quatro letras. Mas é uma etapa indispensável para passar às seguintes, onde entram em jogo simultaneamente os dados de experiências e os estudos teóricos.
É preciso identificar os genes (porções da molécula de ADN que comandam a síntese de uma proteína), determinar a sua função, compreender como a sua acção é regulada e como eles se influenciam uns aos outros, etc. Paralelamente, os biólogos desejam compreender como um genoma é globalmente organizado, quais são os seus diferentes elementos, onde se situam, quais são as suas relações, etc. Também se comparam genomas de organismos diferentes, com vista a compreender, por exemplo, o que faz a diferença entre um rato e um homem, a reconstituir, pelo menos parcialmente, a história da evolução dos seres vivos, a avaliar com precisão o parentesco de um grupo de espécies.



Sequência de ADN anotada

Assim, é interessante saber comparar uma sequência de ADN que se acaba de obter com todas aquelas já conhecidas e armazenadas nos bancos de dados genéticos. Esta comparação é chamada o problema do alinhamento: trata-se de avaliar em que medida uma dada sequência se parece com outra. Poder-se-á, assim, descobrir parentescos com um outro organismo, ou determinar se um gene acabado de sequenciar se parece com um gene cuja função é já conhecida. A dificuldade do problema do alinhamento provém simultaneamente do facto de a comparação ter de ser feita com numerosas sequências, e do facto de se tolerarem imperfeições no alinhamento (devidas a mutações que substituem, suprimem ou inserem bases na molécula de ADN inicial). Existem diversos algoritmos e, aqui também, as investigações prosseguem no sentido de se encontrarem outros mais eficientes. O mais corrente é o da "pontuação local": procura-se nas duas sequências a comparar regiões cujas "letras" possam ser postas aproximadamente em correspondência. Depois soma-se +1 se a letra é a mesma, $-m$ se as letras diferem e $-d$ se a correspondência é estabelecida por meio de uma inserção ou de uma supressão, sendo m e d números positivos previamente escolhidos. O total obtido é a "pontuação local" e constitui uma medida do grau de alinhamento. Para dizer se o alinhamento é significativo, é preciso comparar a sua pontuação às que poderiam ser obtidas com sequências aleatórias de letras - o que exige que se calculem as probabilidades de observar determinado alinhamento nas sequências aleatórias.

Um outro exemplo de estudos matemáticos do genoma diz respeito à análise estatística do encadeamento das bases. Pode medir-se a frequência de ocorrência de cada uma das quatro bases A, C, G, T, assim como as frequências dos pares de duas bases como AA, TC ou CG, etc. Os conjuntos dessas frequências de ocorrência variam de um organismo para outro, e podem, portanto, servir para caracterizar o "estilo" no qual é escrito o genoma do organismo em causa. Análises estatísticas apropriadas permitem então determinar se uma sequência contém bocados de "estilos" diferentes, o que sugeriria uma transferência de material genético entre espécies diferentes.



Proteína vista de cima

Da árvore à floresta!

Estudar os efeitos do clima sobre as árvores e as florestas requer modelos da sua evolução, tendo em conta tantos factores quanto possível, mas suficientemente simples para poderem serem estudados.
Isto exige uma estreita colaboração entre matemáticos e peritos em florestas.
As principais dificuldades são, em particular, a presença:
- de vários sistemas hierarquizados em jogo (floresta, árvore, folha, molécula…)
- de diferentes escalas de tempo que coexistem (centenas de anos para a duração de vida, alguns segundos para o metabolismo…)

A LUTA PELA LUZ

Enormes progressos foram registados nestes últimos anos. Um modelo dinâmico, baseado nos processos vitais e ambiente local das árvores, foi aplicado com sucesso à análise dos efeitos climatéricos e serve também para a gestão das florestas e o melhoramento da qualidade da madeira.
Novos modelos têm em conta o crescimento das árvores ao longo do ano e permitem, nomeadamente, prever a competição das espécies na luta pela luz.

As florestas vão desaparecer?

Qual é a influência do clima e das suas eventuais alterações no crescimento das árvores, como gerir melhor uma floresta: a modelação matemática é um dos meios utilizados para responder a estas questões.

A maior parte dos especialistas do clima estão persuadidos: a Terra está a aquecer devido aos gases lançados na atmosfera pela actividade humana, gases como o CO_2, que reforçam o efeito de estufa. Dois ou três graus a mais, em média, em meados do século XXI, e será certamente a catástrofe em certas regiões do globo: degelo de glaciares, secas definitivas, terras cobertas por água, etc. Outra sombra neste quadro: a camada de ozono da estratosfera, que nos protege dos raios ultravioletas, parece também sofrer com a emissão de gases pela indústria e os seus produtos.

A eventualidade destas alterações do clima e do meio ambiente coloca aos cientistas e aos gestores numerosas questões difíceis. Uma delas diz respeito às consequências sobre as árvores e as florestas, os pulmões da Terra. O crescimento das árvores será favorecido ou, pelo contrário, reduzido? As florestas de coníferas do norte da Europa vão regredir? Que se passará com as florestas tropicais, que abrigam uma fauna e uma flora ricas e mal conhecidas? Como se deverá ajustar a gestão florestal para atenuar os efeitos negativos das alterações climatéricas?

Uma das vias de investigação consiste em modelar os mecanismos do ecossistema florestal e depois, graças aos modelos assim concebidos, simular o seu comportamento. Uma tal modelação necessita de uma colaboração estreita entre matemáticos e especialistas florestais. Ela visa compreender e descrever quantitativamente as interacções entre os diversos componentes das florestas (a sombra das árvores, as diferentes espécies de árvores, a sua folhagem, etc.) e a influência dos factores ambientais (a irradiação solar, natureza do solo, precipitação, temperatura, etc.).

Sendo o ecossistema florestal muito complexo, uma modelação perfeitamente fiel à realidade é ilusória; em vez disso, parte-se de modelos simplificados, que tentam ter em conta os aspectos mais importantes, e depois de terem sido bem analisados e compreendidos, refinam-se pouco a pouco, integrando mecanismos negligenciados nas etapas precedentes.

Entre as principais ferramentas matemáticas utilizadas na modelação florestal figuram as “equações às derivadas parciais” e os “L-sistemas”. Uma equação às derivadas parciais é uma equação envolvendo uma função de várias variáveis - função desconhecida que se pretende determinar - e as suas derivadas; é o equivalente a uma equação diferencial ordinária, para as funções de várias variáveis. As equações às derivadas parciais servem para descrever uma grande quantidade de fenómenos físicos, químicos, biológicos ou outros, que variam simultaneamente no espaço e no tempo. No contexto das árvores e das florestas, elas permitem, por exemplo, modelar o consumo e o deslocamento das matérias nutritivas numa árvore individual, e os efeitos que daí resultam para o ciclo do carbono.

Uma vez estabelecidas estas equações e os valores dos parâmetros que nela intervêm (isso faz parte da modelação propriamente dita), é preciso resolvê-las para determinar o comportamento do sistema estudado. Para tal, faz-se geralmente apelo a métodos numéricos, no computador (as equações às derivadas parciais que se sabem resolver analiticamente são raras!).

Quanto aos L-sistemas, trata-se de algoritmos que permitem simular processos de crescimento por etapas sucessivas, por exemplo uma árvore em que nascem novos ramos à medida que cresce (ver a tabela seguinte).

A grande dificuldade com a qual são confrontados os modeladores da floresta é a intervenção simultânea de fenómenos correspondentes a escalas de tempo e de espaço muito diferentes. Assim, o crescimento de uma árvore depende do que se passa simultaneamente à escala da sua vizinhança, à da própria árvore, à dos seus órgãos (as folhas, por exemplo) ou à escala molecular (metabolismo, fotossíntese).

O mesmo se passa com as escalas de tempo: a vida de uma árvore conta-se em dezenas e mesmo em centenas de anos, enquanto que os tempos característicos do metabolismo se medem em segundos. É preciso, portanto, fazer a ligação entre elas, considerando vários modelos que correspondam, cada um, a uma certa escala de tempo ou de espaço, o que exige o desenvolvimento novos métodos matemáticos e informáticos.

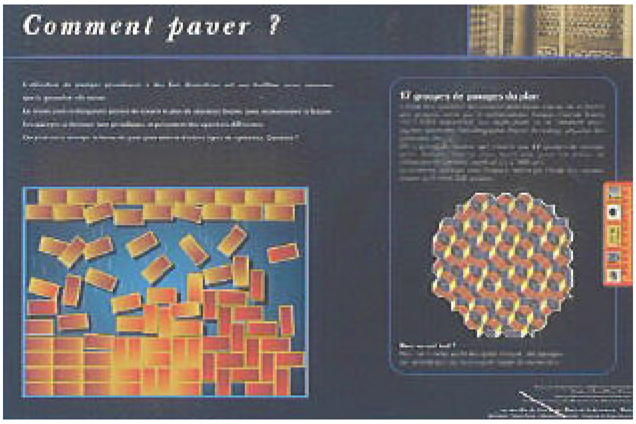
Os investigadores ultrapassam progressivamente os obstáculos. Graças a estas investigações, que fizeram muitos progressos nos últimos vinte anos, actualmente avalia-se melhor os efeitos de uma alteração climática, e dispõe-se de melhores planos de gestão florestal - por exemplo, para melhorar a qualidade da madeira ou para explorar de forma ecológica e durável as florestas tropicais.

Os L-sistemas

Introduzidos em 1968 pelo biólogo Aristid Lindenmayer (daí o nome) para representar os processos de crescimento ou de desenvolvimento, os L-sistemas são um formalismo que permite construir de maneira recursiva objectos cada vez mais complexos, a partir de regras de base simples. A ideia é fácil de compreender se se tomar para objectos cadeias de letras.
Partamos de uma cadeia de letras dada, por exemplo *aba*, constituída por duas letras: *a* e *b*. Fixam-se então regras determinando a transformação de cada letra: escolhamos, por exemplo, $a \rightarrow b$ e $b \rightarrow ab$. A cadeia inicial *aba* transforma-se então em *babb*; aplicando de novo as regras, obtém-se *abbabab*. E assim sucessivamente: aplicam-se as regras tantas vezes quantas quisermos. A cadeia inicial e as regras de transformação escolhidas constituem um exemplo simples de L-sistema.

Se considerarmos que as letras simbolizam objectos ou operações geométricas (por exemplo, *a* = definir um vector unitário, *b* = rodar de 30º no sentido directo, *c* = rodar de 30º no sentido dos ponteiros do relógio, etc.), então os L-sistemas podem representar objectos geométricos que se constroem por etapas sucessivas. Escolhendo adequadamente as regras de construção, podemos imitar com bastante semelhança a geometria de uma planta e a forma como ela cresce e se ramifica. Os L-sistemas são, aliás, muito usados para realizar imagens de síntese, porque se prestam muito naturalmente à programação informática.

Árvore de síntese realizada com os L-sistemas



Como pavimentar?

A utilização de pavimentações regulares com fins decorativos é uma tradição tão antiga como a própria geometria.
A mesma placa rectangular permite preencher o plano de várias formas, sem sobreposições nem lacunas.
As pavimentações acima são regulares e apresentam simetrias diferentes…
Pode-se, assim, mudar a forma da placa para obter outros tipos de simetrias. Quantas?

OS 17 GRUPOS DE PAVIMENTAÇÕES
O estudo das simetrias das pavimentações regulares assenta na teoria dos grupos, criada pelo matemático francês Evariste Galois (1811-1832). Actualmente as suas aplicações são incontáveis: álgebra, geometria, cristalografia, teoria dos códigos, física das partículas, etc.
Ela permitiu mostrar que existem apenas 17 grupos distintos de pavimentações do plano. Cada um deles figura já entre as decorações do Palácio de Alhambra de Granada, construído há 1000 anos. O problema análogo no espaço, motivado pelo estudo dos cristais, mostra que existem 230 grupos.

Então, sabe-se tudo? Não, porque existem também quasi-cristais, pavimentações não regulares que são ainda objecto de investigação.

Homenagem às pavimentações

Preencher o plano ou o espaço com elementos de formas bem determinadas: este foi um problema que se colocaram matemáticos, artistas ou cristalógrafos. E está longe de estar esgotado.

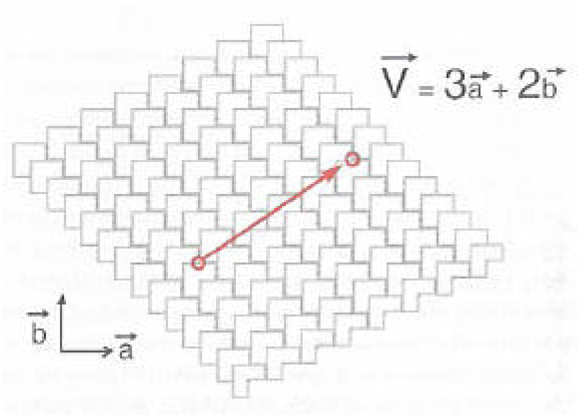
Quer testar o profissionalismo do seu ladrilhador? Peça-lhe que substitua o pavimento da sua casa de banho, composto por vulgares rectângulos verdes, todos idênticos, por mosaicos azuis com a forma de um pentágono regular (cinco lados iguais, cinco ângulos iguais). Se ele lhe responder “sim” sem pestanejar, deve preocupar-se! De facto, é impossível pavimentar o plano com tais mosaicos, sem deixar buracos. Para se convencer disto, basta tentar unir mais de três pentágonos num mesmo ponto.

Agora, quer zangar-se definitivamente com o ladrilhador? Diga-lhe que leu em algum lugar que se pode realizar uma pavimentação tendo globalmente o comportamento de um conjunto de pentágonos, com a condição de utilizar dois tipos de mosaicos em forma de losango (tendo o mesmo lado, mas uns em que o ângulo agudo mede 36º e outros em que o ângulo agudo mede 72º), e insista para que ele vos faça uma. A não ser que ele tenha um gosto acentuado pela matemática, pela originalidade ou pela dificuldade, tão cedo não o verá.

Em defesa do infeliz ladrilhador, deve dizer-se que a questão das diferentes maneiras de preencher um plano sem deixar buracos não é simples. O caso das pavimentações regulares, em que um mesmo motivo se repete indefinida e sistematicamente, apenas foi rigorosamente resolvido no fim do século XIX. Não sem motivo: a ferramenta necessária, a teoria de grupos, apenas fez a sua aparição com as investigações de Evariste Galois (1811-1832) sobre a solubilidade de equações algébricas (as equações de grau 2, 3, 4, etc., a uma incógnita).

Um grupo é um conjunto qualquer no qual está definida uma operação que permite combinar dois elementos para obter um terceiro e que verifica três propriedades simples (ver quadro). Apesar da sua aparente simplicidade, estes objectos matemáticos são extremamente difusos e variados, e o seu estudo aprofundado revela-se muito rico. Mas qual é a relação entre as pavimentações regulares e a teoria de grupos? Resposta: as simetrias.

A uma pavimentação regular está associada uma simetria evidente, a translação. No plano, por exemplo, o motivo de base repete-se regularmente segundo duas direcções diferentes; existem, então, dois vectores fixos **a** e **b** tais que, se se efectuar na pavimentação uma translação de vector $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$, com m e n inteiros, cai-se exactamente na mesma pavimentação (ver ilustração 1). Ora, é fácil verificar que o conjunto das translações de vector $m\mathbf{a} + n\mathbf{b}$, com m e n inteiros, constitui um grupo. Este grupo de translações faz parte das simetrias da pavimentação, a saber, as transformações geométricas do plano que deixam inalterado o conjunto da figura (o conjunto destas simetrias é um grupo).



1. Uma pavimentação regular no plano
Este desenho (estendido, em princípio, a todo o plano) sobrepõe-se exactamente a si próprio quando se faz uma translação do vector V = 3a + 2b, por exemplo. As translações de vector *m*a + *n*b, com *m* e *n* inteiros, formam um grupo: este constitui uma parte do grupo das simetrias da pavimentação.

Às translações acrescentam-se as eventuais simetrias do próprio motivo de base. Por exemplo, num ladrilhamento constituído de quadrados simples (sem desenho), cada mosaico é invariante por uma rotação de ângulo múltiplo de 90º, em torno do seu centro (todas estas rotações formam um grupo).

Para determinar todas as pavimentações regulares possíveis, é preciso verificar que as simetrias próprias do motivo de base sejam compatíveis com a simetria de translação associada à regularidade. Foi assim que se demonstrou que se pode pavimentar regularmente o plano unicamente com quadrados, triângulos, paralelogramos, hexágonos, mas não com pentágonos regulares.
Mais geralmente, estas análises permitiram classificar as pavimentações regulares, em função do seu grupo de simetrias. No caso do plano, demonstrou-se também que existem exactamente 17 grupos de simetrias possíveis, isto é, essencialmente 17 maneiras de pavimentar regularmente o plano (mesmo que se possa fazer variar infinitamente o desenho que existe em cada motivo de base). Coisa notável, estas 17 possibilidades estariam todas presentes nos ornamentos do Palácio de Alhambra, em Granada.

A estrutura de grupo

Um grupo G é um conjunto de elementos munido de uma operação * (cujo resultado também pertence a G), com as propriedades seguintes:

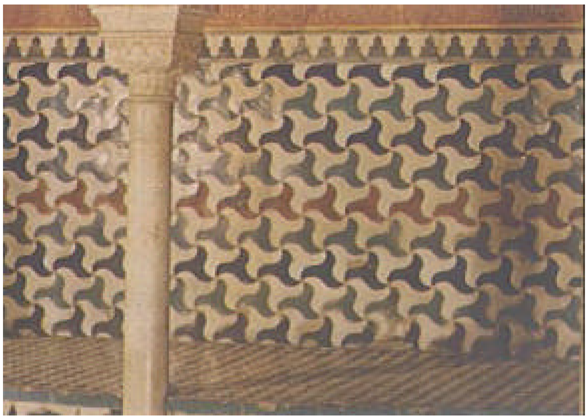
1) Associatividade:
Quaisquer que sejam os elementos **x**, **y**, **z** de G, tem-se
(**x** * **y**) * **z** = **x** *(**y** * **z**)

2) Existência de um elemento neutro: existe em G um elemento **e** tal que, para todo **x** de G se tem
x * **e** = **e** * **x** = **x**

3) Existência dos elementos inversos: para todo **x** em G existe um elemento **x**' em G tal que
x * **x**' = **x**' * **x** = **e**.

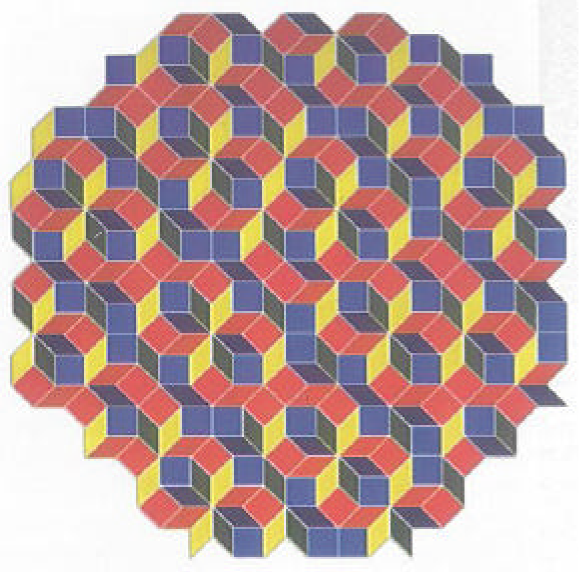
O conjunto dos inteiros (positivos e negativos), com a adição usual constitui um grupo (elemento neutro: 0).
Um outro exemplo é o conjunto das translações no plano, com a operação composição de aplicações (elemento neutro: a translação de vector nulo).
Um grupo não é forçosamente comutativo (isto é, **x** * **y** não é sempre igual a **y** * **x**); assim, no grupo constituído pelas rotações em torno de um ponto no espaço, o resultado da aplicação de duas rotações de eixos diferentes depende da ordem pela qual essas rotações são efectuadas.

O mesmo problema, mas desta vez no espaço, era o da cristalografia, visto que os cristais são caracterizados por uma estrutura atómica ou molecular regular. Aí, contaram-se 230 grupos de simetrias possíveis, isto é, 230 tipos de redes cristalinas possíveis (que os cristalógrafos classificam em catorze “redes de Bravais”). Os cristais que foram encontrados até agora na natureza realizam 227 deles…



Pavimentações de Alhambra

E se os libertarmos da obrigatoriedade de regularidade estrita? É ainda mais rico e complicado, e as investigações sobre o assunto prosseguem. Um exemplo célebre é constituído pelas pavimentações planas não regulares criadas por volta de 1974 pelo matemático britânico Roger Penrose (ver ilustração 2). Constituídos por dois tipos de losangos, estas pavimentações têm a particularidade de serem *quase* regulares e de apresentarem globalmente uma simetria pentagonal, que seria interdita numa pavimentação rigorosamente regular. Para surpresa geral, materiais apresentando estruturas análogas foram obtidos pela primeira vez em 1984: trata-se de quasi-cristais, cuja estrutura e propriedades físicas são objecto de numerosos estudos.



2. Uma pavimentação de Penrose
Existe uma infinidade não numerável de pavimentações de Penrose distintas, todas realizáveis com estas duas únicas peças em losango. Nenhuma delas é regular, mas uma tal pavimentação possui certas propriedades próximas da regularidade. Por exemplo, se a fizermos deslizar segundo o lado de um dos losangos, quase todos os vértices da pavimentação obtida se sobrepõem a um vértice da pavimentação original. Ou ainda, qualquer domínio escolhido na pavimentação se reencontra numa infinidade de outros lugares. Melhor: ele figura uma infinidade de vezes em qualquer outra pavimentação do mesmo tipo! Podemos, por outro lado, notar a presença de motivos que possuem uma simetria de ordem 5, ou seja, invariantes por rotações de ângulo 360º/5 = 72º, o que seria impossível numa pavimentação regular.

Água no azeite!!!

Como misturar duas substâncias que têm tendência a repelir-se? Isto depende da temperatura e dos limiares de saturação que correspondem ao equilíbrio entre a energia e a entropia dos produtos. Ponhamos um pouco de água no azeite, que vai passar-se? Uma só gota vai formar-se? Várias? Nenhuma? Para analisar estes fenómenos de coexistência e separação de dois líquidos, os modelos matemáticos tentam descrever como o acaso, que está presente a nível atómico, pode induzir efeitos geométricos deterministas à nossa escala. Enquanto a temperatura é baixa, as partículas do mesmo tipo têm uma tendência muito forte para se reagruparem, ao passo que a altas temperaturas, o acaso tende a fazer com que os dois tipos de moléculas se misturem de modo homogéneo.

UM MODELO PROBABIIÍSTICO

Um modelo simples, o modelo d'Ising, descreve estes fenómenos de transição de fases. Partindo de uma descrição microscópica do sistema, ele permite explicar à escala macroscópica, os regimes de solubilidade e de saturação e de verificar o prognóstico de formação de uma única gota com forma esférica.

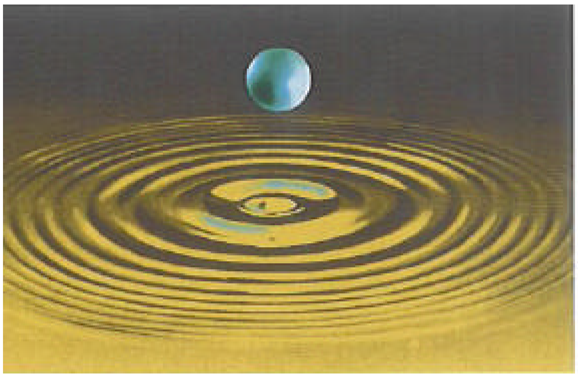
Ele descreve a interacção entre partículas vizinhas e comporta um parâmetro, a temperatura, que controla o acaso. Um valor crítico da temperatura separa o regime onde se observa uma mistura homogénea do regime onde se observam duas fases distintas.

Água e azeite, uma mistura problemática

Os modelos concebidos pelos físicos não interessam somente a eles. Os matemáticos também aí encontram neles matéria de reflexão ¾ com benefícios recíprocos.

Em certos domínios, a distinção entre físicos e matemáticos é difícil de estabelecer. É o caso da mecânica estatística, ramo da física nascido no final de século XIX e que tenta explicar as propriedades macroscópicas da matéria a partir de uma descrição microscópica ¾ trata-se de compreender como um muito grande número de elementos microscópicos individuais (os átomos por exemplo), tendo cada qual um comportamento em parte aleatório, dá nascimento às propriedades físicas observadas á escala comum.

Apesar dos seus sucessos consideráveis, numerosos fenómenos mantêm-se compreendidos de modo imperfeito. Passa-se assim com as “transições de fase “, fenómenos onde a matéria muda brutalmente de estado ou de propriedades logo que uma certa temperatura (ou outro parâmetro) é atingida. Um exemplo por demais conhecido de todos (e mal compreendido) é o da ebulição da água, no qual a fase líquida se transforma em fase vapor logo que a temperatura de ebulição é atingida
Debrucemo-nos sobre outro exemplo: a mistura de dois líquidos imcompatíveis, como água e azeite. Podemos dissolver um pouco de azeite na água, ou um pouco de água no azeite, mas somente até um certo ponto. As concentrações relativas (água/azeite e azeite/água) não devem ultrapassar os valores-limiares e os seus limiares aumentam com a temperatura. Se por exemplo baixa a temperatura (o que diminui o limiar de solubilidade) até ao ponto em que a proporção água/azeite ultrapassa o limiar de solubilidade, a mistura separa-se em duas fases: vê-se aparecer gotas de líquido rico em água, que mergulham num líquido rico em azeite.



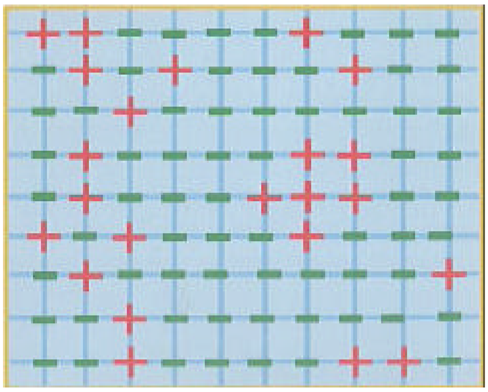
Como interpretar este fenómeno? A explicação tradicional é de tipo macroscópico. No essencial, ela atribui ao sistema água/azeite uma certa energia por unidade de ar, designada energia de superfície: água e azeite não se “amam”, quanto mais a superfície de contacto entre estes dois líquidos é grande, mais a energia do sistema é elevada. Para estar em equilíbrio, um sistema físico deve estar num estado de energia minimal; a mistura água/azeite vai então evoluir espontaneamente para uma configuração que apresente a menor superfície possível de contacto entre a água e o azeite. Como consequência, no equilíbrio perfeito e se negligenciarmos os efeitos da gravidade, esperaríamos que todo o

excedente de água se concentrasse numa grossa gota esférica, em suspensão no azeite (porque fixado o volume interior, é uma gota de forma esférica que minimiza a superfície de contacto ¾ esta é uma propriedade geométrica bem conhecida).
Esta explicação, acrescentada de alguns detalhes e requintes, parece correcta, mas não assenta numa interpretação microscópica do fenómeno. Como é que isto resulta do jogo de átomos e moléculas, esta é a questão que se coloca do ponto de vista da mecânica estatística.
Para responder à questão, podemos imaginar um modelo simplificado do sistema real: comparamos o espaço a um grande quadriculado plano (infinito) e supomos que cada ponto da rede de quadrados é ocupada ou por uma molécula de água ou por uma molécula de azeite, e que estas não existem noutros lugares. Se o lugar i é ocupado por uma molécula de água atribui-se-lhe o número $s(i)=+1$. Se é ocupado por uma molécula de azeite, atribui-se-lhe o número $s(i)=-1$.
Uma configuração do sistema é então definida dando todos os números $s(1)$, $s(2),\dots,s(N)$ onde N é o número total de posições da rede, suposto muito grande — fazemo-lo tender para infinito. Para representar a repulsão entre a água e o azeite, diremos que a energia de interacção entre duas posições i e j vale $E_{ij}=-s(i)s(j)$ se i e j são vizinhas próximos, e $E_{ij}=0$ caso contrário. Se duas posições vizinhas próximas i e j estão ocupadas por duas moléculas diferentes, a energia de interacção é efectivamente maior do que se tratar de moléculas do mesmo tipo. Também é necessário ter em conta o efeito da temperatura, ao qual está associado uma agitação desordenada das moléculas (a agitação térmica). Aqui utilizamos um princípio por demais conhecido da termodinâmica estatística: em equilíbrio térmico, a probabilidade de se observar uma configuração dada é proporcional a $\exp(-E/kT)$ onde E representa a energia total desta configuração (soma das energias de interacção das posições vizinhas próximas), T a temperatura absoluta e k a constante de Boltzmann.
O modelo assim definido não é senão o célebre “modelo d’Ising” imaginado em 1920 pelo físico alemão Wihelm Lenz (Ernst Ising era seu discípulo) no contexto do magnetismo (s(i) representando o “momento magnético” do átomo ou molécula nºi da matéria).
Este modelo que desempenhou um papel importante no estudo teórico das transações de fase, é por um lado bastante simples para se prestar a cálculos exactos ou a análises matemáticas poderosas e rigorosas. Certas propriedades do modelo bidimensional d’Ising são já conhecidas há muito tempo, tal como a existência de uma temperatura crítica à qual o sistema muda de fase. Outras foram demonstradas há apenas uma dezena de anos por matemáticos russos e checos. Se considerarmos o modelo d’Ising como um modelo simplificado da mistura água/azeite, os seus resultados mostram expressamente que as “gotas” têm uma forma bem definida, que é esférica (não totalmente esférica, porque nem todas as direcções são equivalentes no modelo d’Ising, contrariamente a uma mistura real água/azeite). Mais recentemente, um estudo análogo foi levado a bom termo sobre o modelo d’Ising tridimensional (à priori mais próximo da realidade mas mais difícil do ponto de vista matemático) por matemáticos, entre os quais os Franceses Thierry Bodineau, Raphäel Cerf e o Suíço- Hongrois Agoston Pisztora. Apreciadores de generalidade como todos os seus colegas, eles examinaram igualmente modelos do mesmo tipo com dimensão superior a três.
Não é verdade que tais pesquisas matemáticas permitam descobrir novas propriedades físicas; o seu interesse é mais dar certezas aos físicos, de verificar rigorosamente que os seus modelos são coerentes e suficientemente próximos da

realidade. Em compensação, as técnicas matemáticas desenvolvidas nesta ocasião serão úteis para outros problemas...

O modelo d'Ising a duas dimensões e a mistura água /azeite

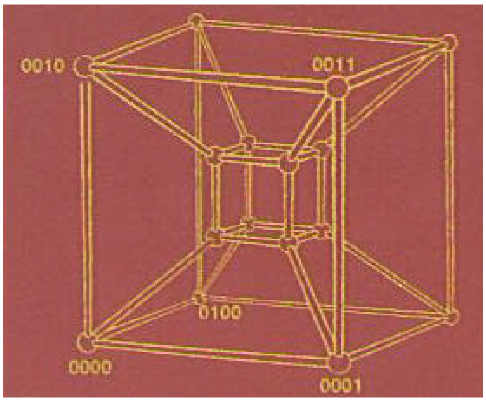
O problema da coexistência de dois líquidos não miscíveis pode ser estudado com um modelo simplificado. As moléculas são supostas ocupar posições de uma rede plana de quadrados, à posição nº*i* é atribuído o número *s*(*i*)=+1 ou *s*(*i*)=-1 conforme a molécula que aí se encontra.
Só as moléculas vizinhas directas estão autorizadas a interagir; a energia de interacção entre duas moléculas vizinhas é igual a +1 se elas são diferentes ou a –1 se são idênticas.
Este problema foi matematicamente estudado há uma dezena de anos no caso bidimensional, e muito recentemente no caso tridimensional. Estes estudos necessitaram de diversas técnicas matemáticas relevantes da teoria das probabilidades, da análise combinatória, da geometria das superfícies, do cálculo das variações (este consiste em encontrar, num conjunto adequado de objectos matemáticos, o objecto que torna minimal ou maximal uma quantidade *Q*[*f*] dependente de *f* — no nosso exemplo, *f* poderia representar a forma dos interface água/azeite, enquanto *Q* representaria a energia de superfície da mistura).



Ouvir um CD riscado!?!

Sobre um disco compacto, como num computador, cada som é codificado por uma sequência de 0 e 1, agrupados em conjuntos de oito (octetos).
Para garantir a fidelidade do registo, juntam-se outros octetos que permitem identificar e corrigir os pequenos erros resultantes de poeiras ou de radiações.

A teoria matemática dos códigos correctores de erros estuda meios de aumentar a fiabilidade do som mas com o mínimo de custos da codificação. Ela tem hoje numerosas aplicações: fabricação de discos compactos, transmissão de informação através da Internet ou através de satélites...



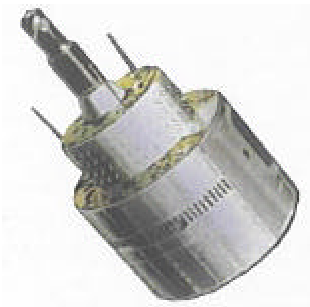
Cada vértice deste hipercubo é codificado por 4 algarismos.
Qual é o mais "afastado" de 0000?

DISTÂNCIA ENTRE DUAS PALAVRAS
Tanto quanto mais diferir a escrita das palavras, mais diminui o risco de confusão. Para minimisar o número de octetos acrescentados, utiliza-se um parâmetro importante dos códigos correctores: a "distância" (dita de Hamming) entre duas palavras. É o número de símbolos que são diferentes: entre 10100111 e 10111111 a distância é 2, entre 10100111 e 10000001, é 3. É fácil beneficiar a correcção aumentando o comprimento das palavras.
Os algoritmos de codificação permitem compromissos: identificar o máximo de erros aumentando o menos possível o comprimento das palavras.

Digitalizar para corrigir

Com os códigos correctores de erros, a informação digitalizada pode em parte estar protegida contra as perturbações.

“!É necessário di-gi-ta-li-zar!”, advertem-nos os peritos da informática e das telecomunicações. Que isto seja feito num computador, num disco compacto, nas ondas emitidas por uma sonda espacial ou por um telefone móvel, a informação é geralmente codificada (traduzida) sob a forma de uma sucessão de sinais binários, bits que podemos comparar a “0” e a “1”. Mas uma poeira sobre um disco, um raio cósmico que danifica uma componente electrónica, uma trovoada com as suas perturbações electromagnéticas, e um ou vários bits, por vezes vários milhares de bits, que são transformados. Ou um “0” que se transforma num “1”, é como se um “sim” se transformasse num “não”, ou um “ding” em “dong”: o sentido da mensagem pode mudar completamente.
Como nos prevenirmos contra estes incidentes, extremamente frequentes, que ocorrem durante a emissão, a transmissão ou a recepção das mensagens (textos, sons, imagens, etc.)? A ideia surgida depois dos primórdios da informática há uns cinquenta anos, é acrescentar um certo número de bits a cada “palavra” (sequência de bits de comprimento fixo) da mensagem numérica inicial. Trata-se de alongar as “palavras“ de modo a que as possamos reconhecer mesmo se algumas das suas “caracteres” forem modificados.



Exemplo elementar mais académico: triplicar cada bit, tornando 0 em 000 e 1 em 111. Se um bit e um só do sequência tripla se modificou , isso vê-se imediatamente: 101 provem claramente de 111, enquanto 001 é uma alteração de 000. No código ASCII (*American Standard Code for Information Interchange*) dos computadores, cada caracter tipográfico é representado por um octecto, ou seja uma sequência de oito bits. O oitavo serve de controlo: ele vale 1 se a soma dos sete primeiros bits é ímpar, 0 se esta soma é par. Em caso de alteração de um dos oito bits, o “bit de paridade” não terá mais um valor correcto, o que permite assinalar um erro.
Detectar um erro é bom, corrigi-lo é melhor. Assim o código triplo indicado abaixo permite corrigir, não o código ASCII. Por outro lado vários erros simultâneos podem afectar a mesma “palavra”: com dois erros no mesmo octeto, por exemplo, o código ASCII não assinala nada. A capacidade de correcção é tanto melhor quanto mais as “palavras” do código difiram entre si. O risco de confusão entre duas palavras será menos elevado se estas tiverem poucos bits com o mesmo valor. Também um parâmetro importante de um código corrector é a “distância” minimal entre duas palavras, a distância sendo o número de símbolos que diferem; por exemplo, a distância (dita “de Hamming”) entre 10100111 e 10111111 vale 2, enquanto a distância entre 10100111 e 11000001 vale 4.

Quanto mais elevada for a distância minimal, mais facilmente o código pode corrigir os erros. Podemos aumentar a distância minimal entre palavras acrescentando bits. Mas alongar a mensagem acresce a duração e o custo das comunicações. Os criadores de códigos correctores de erros esforçam-se para encontrar algoritmos de codificação performants que permitam detectar e corrigir o máximo de erros, alongando o menos possível as palavras. Mais, os procedimentos de codificação e descodificação devem ser suficientemente simples.

0000*000*	**0100***111*	**1000***010*	**1100***010*
0001*011*	**0101***110*	**1000***110*	**1101***001*
0010*110*	**0110***001*	**1010***011*	**1110***100*
0011*101*	**0111***010*	**1011***000*	**1111***111*

1-Um código de Hamming

No código corrector apresentado acima as palavras de partida $a_1a_2a_3a_4$ têm 4 bits (há 2^4=16 palavras distintas). Acrescentamos a cada palavra 3 bits de controlo a_5,a_6,a_7 cujo valor é determinado pelos 4 primeiros bits: $a_5= a_1+ a_2+ a_3$, $a_6= a_2+ a_3+ a_4$, $a_7= a_1+ a_2+ a_4$, sendo estes cálculos realizados "módulo 2", isto é retendo apenas o resto da divisão por 2 do resultado obtido (por exemplo 1+1+1=1 e 1+0+1=0). A distância minimal entre duas palavras deste código vale 3, o que permite detectar e corrigir um erro sobre um dos sete bits duma palavra. Tais códigos, ditos de Hamming, foram inventados por

Fácil de dizer mas difícil de fazer! E não o fazemos graças ao acaso. Uma das vantagens da digitalização, é a possibilidade de submeter as mensagens a um tratamento aritmético. O número de símbolos diferentes utilizados na codificação sendo finito, os especialistas recorrem às matemáticas dos "corpos finitos", teoria que arrancou com Évariste Galois, no início do século XIX, em ligação com a teoria da resolução das equações algébricas. Um corpo finito é um conjunto de elementos em número finito que se podem (como os números reais ou complexos) adicionar, subtrair, multiplicar e dividir, estando o resultado sempre contido no interior do mesmo conjunto (ver ilustração 2). Com a ajuda da álgebra, da aritmética e mesmo da geometria definidas sobre corpos finitos, construem-se códigos correctores de erros cada vez mais eficazes, relativamente aos quais podemos predizer e analisar matematicamente os seus desempenhos.

A codificação do som num disco compacto, por exemplo, utiliza corpos finitos com 2^8=256 elementos; permite corrigir 2 erros em cada "palavra" de 32 octetos, com somente 4 octetos de controlo para 28 octetos de informação. E actualmente, saem dos laboratórios de pesquisa códigos correctores com capacidade de correcção que são quase os melhores possíveis tendo em conta as suas outras características (comprimento das palavras, número ajustado de símbolos de controlo, etc.)

+	0	1	a	b
0	0	1	a	b
1	1	0	a	b
a	a	b	0	1
b	b	a	1	0

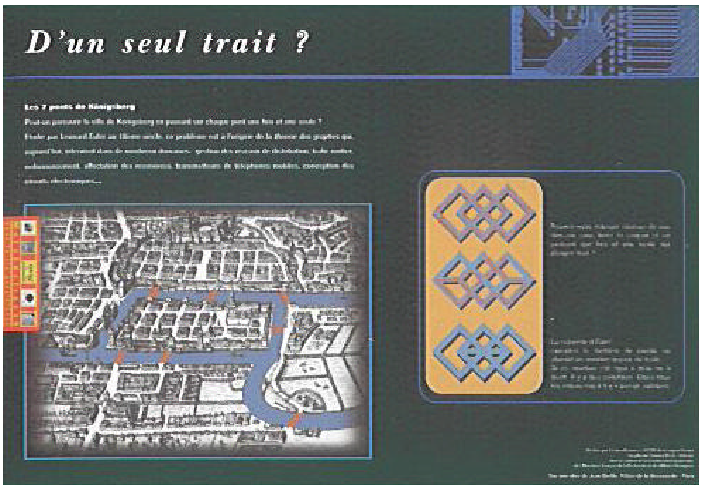
´	0	1	a	b
0	0	0	0	0
1	0	1	a	b
a	0	a	b	1
b	0	b	1	a

2 – O corpo finito de 4 elementos

Consideremos um conjunto de quatro elementos designados 0, 1, a e b. As tabelas de adição e de multiplicação representadas aqui fazem deste conjunto um corpo.

Todos os corpos de quatro elementos são “isomorfos”, isto é caracterizados pelas mesmas tabelas a menos de uma permutação dos elementos.

É uma propriedade geral: todos os corpos finitos com o mesmo número de elementos são isomorfos.

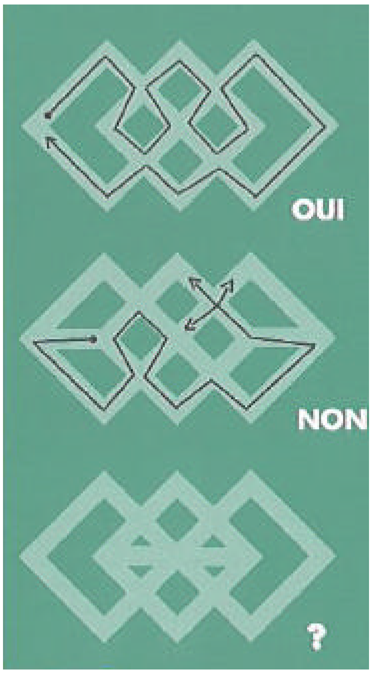


De um só traço?

As 7 pontes de Königsberg

Poderemos percorrer a cidade de Königsberg passando por cada ponte uma e uma só vez?

Estudada por Leonhard Euler no século XVIII, este problema está na origem da teoria dos grafos que, hoje, intervêm em numerosos domínios: gestão de redes de distribuição, tráfico rodoviário, ordenamento, atribuição de recursos, transmissores de telefones móveis, concepção de circuitos electrónicos...



Podemos traçar cada um dos percursos desenhados sem levantar o lápis e sem sobrepor os traços?

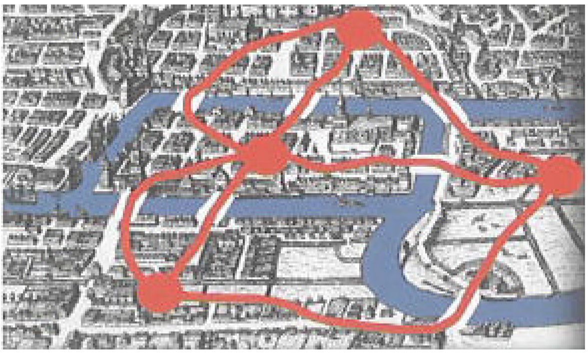
A resposta de Euler: contai o número de pontos onde se encontrem um número ímpar de traços.

Se este número é zero ou dois, existem soluções. Nos restantes casos não há nenhuma solução.

Jogos com arestas e vértices

Pontos ligados por traços: aquilo que pode parecer um desenho de criança é por vezes a tradução gráfica e formal de um problema bastante sério.

Os habitantes de Königsberg, cidade portuária da Prússia Oriental situada a cerca de 250 Km a norte de Varsóvia , estavam ociosos no início dos anos 1700? Sempre se perguntavam se um visitante podia percorrer esta cidade (hoje Kaliningrad na Rússia) passando uma e uma só vez por cada uma das suas pontes sobre o rio Pregolya, e voltando ao local de partida. Na época, Königsberg comportava sete pontes ligando as quatro partes da cidade separadas pelas águas, e dispostas como indica a ilustração 1.



1. As sete pontes de Königsberg.
Percorrer as sete pontes de Königsberg, passando uma e uma só vez por cada ponte e voltando ao local de partida: este problema, que se pode representar por um esquema simples, não tem solução, como o demonstrou Euler em 1736. Ele marcou o nascimento da teoria de grafos.

A charada não deixou indiferente o grande matemático suíço Leonhard Euler, até que encontrou a resposta em 1736: não, é impossível fazer um circuito utilizando todas as sete pontes de Königsberg com uma só passagem por cada uma delas. Para representar este problema, podemos colocar numa folha de papel quatro pontos, a que chamamos "vértices" e que simbolizam as quatro partes separadas da cidade, depois traçamos entre estes vértices linhas simbolizando as pontes, denominadas "arestas". O esquema obtido é um "grafo" (ver ilustração 1).

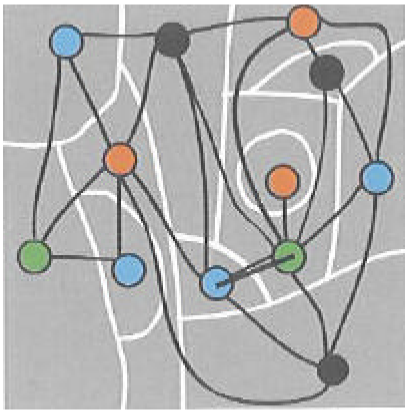
É bastante fácil compreender porque o problema das sete pontes de Königsberg não tem solução: um visitante que chegue a um dos quatro quarteirões da cidade deve forçosamente tornar a partir (tomando um ponto diferente). No grafo, isto traduz-se pelo facto de que a cada vértice deve estar associado um número par de arestas. Ora a configuração das pontes de Königsberg não verificava manifestamente esta condição que, Euler demonstrou, ser necessária e suficiente para que exista um circuito passando por todos os vértices e arestas uma só vez.

Com o problema das sete pontes de Königsberg nascia uma disciplina matemática, a teoria dos grafos, que se desenvolveu muito a partir dos anos 1950. Numerosos problemas de todos os tipos podem ser formulados em termos de grafos. Citemos em primeiro lugar o celebérrimo teorema das quatro cores, que responde a uma questão colocada em 1852 e que não foi demonstrada senão recentemente (com a ajuda essencial do computador, o que se verificou a primeira vez numa demonstração matemática): para colorir qualquer carta geopolítica plana (supondo cada país constituído por uma única porção), de tal maneira que dois países tendo fronteira comum sejam representados de cores diferentes, bastam quatro cores no máximo.

Que relação com a teoria de grafos? Escolhamos um ponto em cada país representado, e tracemos uma linha unindo dois pontos de cada vez sempre que estes correspondem a dois países adjacentes: obtemos assim um grafo (ver ilustração 2). O problema de coloração consiste então em atribuir uma cor a cada vértice do grafo de modo que dois vértices conectados sejam sempre de cores diferentes. O teorema das quatro cores provado em 1976 por Kenneth Appel e Wolfgang Haken na universidade de Illlinois (Estados-Unidos), diz que tal é possível com apenas quatro cores, para todos os grafos assim construídos.

Mas os grafos não interessam somente aos matemáticos puros. Eles servem também para representar circuitos eléctricos, cálculos teóricos relativos às partículas elementares, moléculas de estrutura complexa, etc. A teoria dos grafos tem igualmente uma importância económica directa em função das suas numerosas aplicações em "investigação operacional", onde a finalidade é racionalizar os processos de fabricação, de pesquisar a melhor organização duma empreitada, de determinar o melhor aproveitamento do tempo de uma clínica médica, de gerir da melhor forma o tráfego automóvel ou a rede de metro de um aglomerado urbano, etc.

Por exemplo, para determinar o trajecto óptimo (o menos dispendioso, o mais rápido) dos camiões que devem fazer entregas e levantar mercadoria nos numerosos clientes espalhados por todo o país, a rede viária pode ser modelizada por um grafo onde as arestas são as estradas que ligam uma localidade a outra, associando a cada aresta números (comprimento do caminho correspondente, tempo de percurso, custo da portagem, etc.). Cálculos e algoritmos por vezes complexos determinam então uma ou mais soluções (nem sempre se sabe determinar a melhor) para o problema colocado.



2. Problema da coloração de mapas.
Colorir um mapa geopolítico com o mínimo de cores: este problema pode ser traduzido em termos de grafos, dois vértices unidos devem ter cores diferentes. O teorema das quatro cores, demostrado em 1976, afirma que bastam quatro cores. Esta propriedade é igualmente verdadeira para os mapas desenhados sobre uma esfera. Em compensação num toro (superfície análoga a uma câmara de ar), podem ser necessárias até sete cores.