<u>Mecanismo de Watt</u> *(caso geral)*

A curva descrita pelo ponto *M* não é uma recta mas sim uma aproximação de uma linha recta.

(Note-se que é o caso do mecanismo de Watt, pois não é dito nada quanto à perpendicularidade das barras)

Prova:

Suponhamos que a posição inicial das barras é como mostra a *figura 1.* O ponto *O=(h,k),* o ponto *C=(-h,-k)* e M_0 está na origem do referencial.

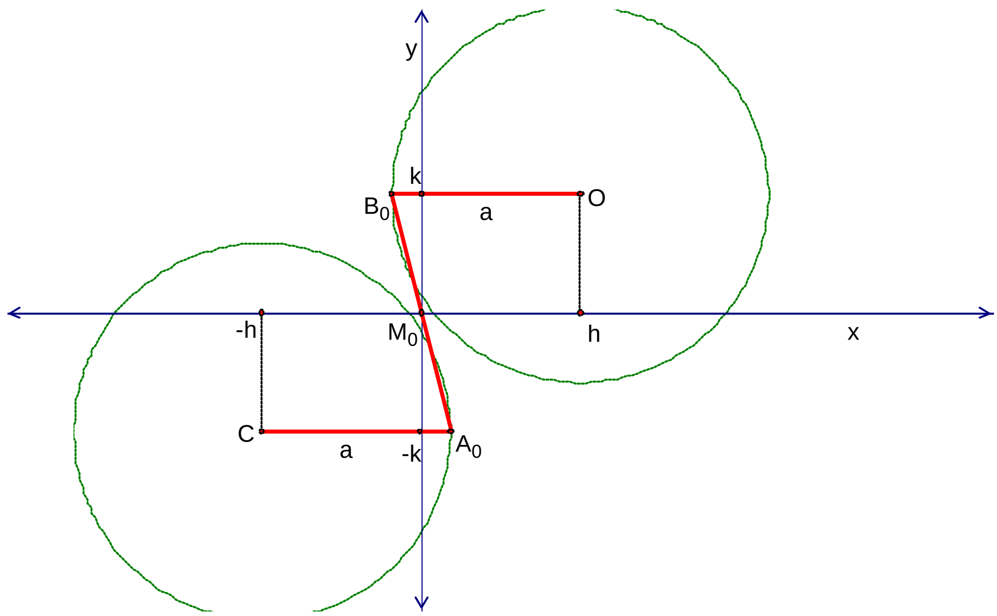


Figura 1

As barras CA_0 e OB_0 têm o mesmo comprimento, *a.*

O comprimento da barra $A_0B_0 = 2MB_0 = 2\sqrt{(a-h)^2 + k^2}$, porque o triângulo $[M_0(0,k)B_0]$ é rectângulo em *(0,k)*, e portanto, $M_0B_0^{\,2} = (a-h)^2 + k^2$.

Suponhamos *que a barra* CA_0 *roda um ângulo* α *em torno do ponto C e que a barra* OB_0 *roda um ângulo* ? em torno do ponto *O*, como se pode ver na *figura 2,* sejam CA e OB respectivamente.

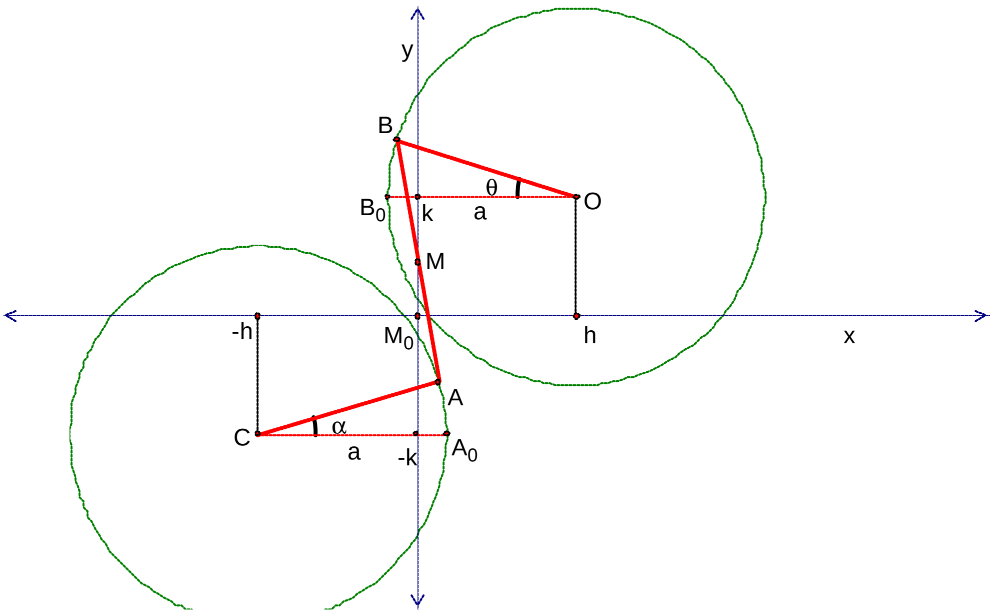


Figura 2

O ponto *B* tem coordenadas: $\begin{Bmatrix} x_B = h - x' = h - a\cos\theta \\ y_B = k + y' = k + a\sin\theta \end{Bmatrix}$,

isto é, *B*= $\left(h - a\cos\theta, k + a\sin\theta\right)$

O ponto *A* tem coordenadas: $\begin{Bmatrix} x_A = -h + x'' = -h + a\cos\alpha \\ y_A = -k + y'' = -k + a\sin\alpha \end{Bmatrix}$,

isto é, *A*= $\left(-h + a\cos\alpha, -k + a\sin\alpha\right)$

Então o comprimento da barra *AB* é:

AB$=\left|B - A\right| = \left|\left(h - a\cos\theta, k + a\sin\theta\right) - \left(-h + a\cos\alpha, -k + a\sin\alpha\right)\right|$

$= \left|\left(h - a\cos\theta + h - a\cos\alpha, k + a\sin\theta + k - a\sin\alpha\right)\right|$

$= \left|\left(2h - a\left(\cos\theta + \cos\alpha\right), 2k + a\left(\sin\theta - \sin\alpha\right)\right)\right|$

Utilizando as fórmulas de transformação,

Fórmulas de transformação

$$\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\cos p - \cos q = -2\sin\frac{p+q}{2}\sin\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p + \sin q = 2\sin\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$$

$$\sin p - \sin q = 2\sin\frac{p-q}{2}\cos\frac{p+q}{2}$$

Obtém-se

$$\boldsymbol{AB} = \left\| \left(2h - 2a\cos\frac{q+a}{2}\cos\frac{q-a}{2}, 2k + 2a\sin\frac{q-a}{2}\cos\frac{q+a}{2} \right) \right\|$$

$$= \sqrt{\left(2h - 2a\cos\frac{q+a}{2}\cos\frac{q-a}{2} \right)^2 + \left(2k + 2a\sin\frac{q-a}{2}\cos\frac{q+a}{2} \right)^2}$$

$$= 2\sqrt{\left(h - a\cos\frac{q+a}{2}\cos\frac{q-a}{2} \right)^2 + \left(k + a\sin\frac{q-a}{2}\cos\frac{q+a}{2} \right)^2}$$

Mas, $AB = A_0B_0 = 2\sqrt{(a-h)^2 + k^2}$ **então**

$$2\sqrt{\left(h - a\cos\frac{q+a}{2}\cos\frac{q-a}{2} \right)^2 + \left(k + a\sin\frac{q-a}{2}\cos\frac{q+a}{2} \right)^2} = 2\sqrt{(a-h)^2 + k^2}$$

$$\Rightarrow \left(h - \cos\frac{q+a}{2}\cos\frac{q-a}{2} \right)^2 + \left(k + a\sin\frac{q-a}{2}\cos\frac{q+a}{2} \right)^2 = (a-h)^2 + k^2$$

$$\Leftrightarrow h^2 - 2ah\cos\frac{q+a}{2}\cos\frac{q-a}{2} + a^2\cos^2\frac{q+a}{2}\cos^2\frac{q-a}{2} + k^2 + 2ak\sin\frac{q-a}{2}\cos\frac{q+a}{2}$$
$$+ a^2\sin^2\frac{q-a}{2}\cos^2\frac{q+a}{2} = a^2 - 2ah + h^2 + k^2$$

$$\Leftrightarrow 2ah\cos\frac{q+a}{2}\cos\frac{q-a}{2} - 2ak\sin\frac{q-a}{2}\cos\frac{q+a}{2} - a^2\cos^2\frac{q+a}{2}\left(\cos^2\frac{q-a}{2} + \sin^2\frac{q+a}{2}\right) = 2ah -$$

$$\Leftrightarrow 2ah\cos\frac{q+a}{2}\cos\frac{q-a}{2} - 2ak\sin\frac{q-a}{2}\cos\frac{q+a}{2} - a^2\left(1 - \cos^2\frac{q+a}{2}\right) = 2ah$$

$$\Leftrightarrow 2h\cos\frac{q+a}{2}\cos\frac{q-a}{2} - 2k\sin\frac{q-a}{2}\cos\frac{q+a}{2} - a\sin^2\left(\frac{q+a}{2}\right) = 2h$$

$$\Leftrightarrow a\sin^2\left(\frac{q+a}{2}\right) + 2\cos\left(\frac{q+a}{2}\right)\left(h\cos\frac{q-a}{2} - k\sin\frac{q-a}{2}\right) = 2h \qquad \textbf{(1)}$$

Mas o segmento *AB* é "arrastado" por *B* e por *A*, portanto *M* descreve um círculo de centro *O* e também descreve um círculo de centro *C*.

Então o ponto *M* tem coordenadas:

$$\begin{cases} x = \dfrac{x_B + x_A}{2} = \dfrac{h - a\cos q + h + a\cos a}{2} = -\dfrac{a}{2}(\cos q - \cos a) = a\sin\dfrac{q+a}{2}\sin\dfrac{q-a}{2} \\ y = \dfrac{y_B + y_A}{2} = \dfrac{k + a\sin q - k + a\sin a}{2} = \dfrac{a}{2}(\sin q + \sin a) = a\sin\dfrac{q+a}{2}\cos\dfrac{q-a}{2} \end{cases},$$

e daqui conseguimos tirar, facilmente, o valor de

$$\cos\left(\frac{q+a}{2}\right),\ \sin\left(\frac{q+a}{2}\right),\ \sin\left(\frac{q-a}{2}\right),\ \cos\left(\frac{q-a}{2}\right)$$

para depois substituir em (1)

<u>Cálculos auxiliares</u>

- $x = a\sin\left(\frac{q+a}{2}\right)\sin\left(\frac{q-a}{2}\right)$ ***e*** $y = a\sin\left(\frac{q+a}{2}\right)\cos\left(\frac{q-a}{2}\right)$

- $x^2 = a^2\sin^2\left(\frac{q+a}{2}\right)\sin^2\left(\frac{q-a}{2}\right)$ ***e*** $y^2 = a^2\sin^2\left(\frac{q+a}{2}\right)\cos^2\left(\frac{q-a}{2}\right)$

- $x^2 + y^2 = a^2 - a^2\cos^2\left(\frac{q+a}{2}\right) \Leftrightarrow a^2\cos^2\left(\frac{q+a}{2}\right) = a^2 - x^2 - y^2$

$$\Rightarrow \cos\left(\frac{q+a}{2}\right) = \sqrt{\frac{a^2 - x^2 - y^2}{a^2}}$$

- $\cos^2\left(\frac{q+a}{2}\right) = \frac{a^2 - x^2 - y^2}{a^2} \Leftrightarrow 1 - \sin^2\left(\frac{q+a}{2}\right) = \frac{a^2 - x^2 - y^2}{a^2}$

$$\Leftrightarrow \sin^2\left(\frac{q+a}{2}\right) = \frac{x^2 + y^2}{a^2}$$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{q+a}{2}\right) = \sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2}}$$

- $x = a\sin\left(\frac{q+a}{2}\right)\sin\left(\frac{q-a}{2}\right) \Leftrightarrow x = a\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2}}\sin\left(\frac{q-a}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \sin\left(\frac{q-a}{2}\right) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

- $y = a\sin\left(\frac{q+a}{2}\right)\cos\left(\frac{q-a}{2}\right) \Leftrightarrow y = a\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{a^2}}\cos\left(\frac{q-a}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow \cos\left(\frac{q-a}{2}\right) = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

Substituindo então em (1), vem

$$a\frac{x^2+y^2}{a^2}+2\sqrt{\frac{a^2-x\ \ -y^2}{a^2}}\left(\frac{hy}{\sqrt{x^2+y^2}}-\frac{kx}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)=2h$$

$$\Leftrightarrow \frac{\left(x^2+y^2\right)}{a}+\frac{2}{a}\sqrt{a^2-x^2-y^2}\left(\frac{hy-kx}{\sqrt{x\ \ +y^2}}\right)=2h$$

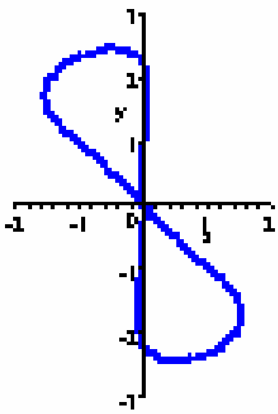
$$\Leftrightarrow x^2+y^2-2ah=2(kx-hy)\sqrt{\frac{a^2-x^2-y^2}{x^2+y^2}}$$

$$\Rightarrow \left(x^2+y^2-2ah\right)^2=\left(2(kx-hy)\sqrt{\frac{a^2-x^2-y^2}{x^2+y^2}}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2-2ah\right)^2=4(kx-hy)^2\left(\frac{a^2-x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \left(x^2+y^2-2ah\right)^2\left(x^2+y^2\right)=4(hy-kx)^2\left(a^2-x^2-y^2\right)$$

e esta equação do sexto grau tem como lugar geométrico uma espécie de *8*, e portanto, diferente de uma linha recta.



Realizado por Anabela Pinto Nogueira