Tópicos de Matemática Elementar

Exame final

20 de Janeiro de 2002

Observações:

- **Todas** as respostas devem ser cuidadosamente **justificadas** e **todos** os cálculos **relevantes** devem ser **apresentados**. *É essencial mostrar que se sabe chegar à resposta.*
- Este exame tem a duração de 3 horas + ϵ minutos, com $\epsilon \leq 15$.

= Primeira Parte =

ATENÇÃO: Nesta parte pode usar a classificação obtida no primeiro mini-teste. Para tal, é necessário (e suficiente) copiar a seguinte frase para a sua folha de exame:
Desejo usar a pontuação obtida no meu primeiro mini-teste em substituição das questões 1–3.

1. Use o algoritmo de Euclides para determinar dois inteiros x, y tais que $35x + 156y = 1$. [1 pt.]
2. Verifique se $15^{1206} + 12^{4004}$ é divisível por 13. (**ATENÇÃO:** Para receber a cotação completa nesta questão é necessário usar as técnicas dadas no curso que permitem resolver este tipo de problema de um modo rápido e eficiente.) [1 pt.]
3. Responda a cada uma das seguintes questões, justificando a sua resposta com os resultados dados no curso. [1 pt.]
   (a) O número $2^{143} - 1$ é primo?
   (b) Um número perfeito par pode ter 3 factores primos?
   (c) O coeficiente de $a^3bc^2d^3$ no desenvolvimento de $(a-b-c+d)^9$ é igual a: $-9\cdot4\cdot7\cdot5\cdot4$?
   (**ATENÇÃO:** Para receber a cotação completa nesta questão é necessário apresentar **todos** os cálculos.)

= Segunda Parte =

ATENÇÃO: Nesta parte pode usar a classificação obtida no segundo mini-teste. Para tal, é necessário (e suficiente) copiar a seguinte frase para a sua folha de exame:
Desejo usar a pontuação obtida no meu segundo mini-teste em substituição das questões 4–6.

4. Escreva o número representado pela dízima infinita periódica $12,13(12)$ como um quociente de dois inteiros. [1 pt.]
5. Mostre que $\sqrt{1+\sqrt[3]{5}}$ é um número irracional. [1 pt.]
6. Exiba uma bijecção entre os conjuntos de números reais $\mathbb{N}$ e $\mathbb{N}\cup\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$, mostrando assim que têm a mesma cardinalidade. [1 pt.]

(continua...)

= *Terceira Parte* =

7. (a) Determine se $100 \mid 37^{8001} - 7$. (**ATENÇÃO:** Para receber a cotação completa nesta questão é necessário usar as técnicas dadas no curso que permitem resolver este tipo de problema de um modo rápido e eficiente.) [1.5 pts.]

   (b) Quais os dois últimos algarismos de $37^{8001} - 7$? [1 pts]

8. Decifre a seguinte mensagem: "3359 ; 120", sabendo que na sua codificação foi usado o código RSA com $n = 6613$ e $c = 3449$ (nas notações das aulas), e que a correspondência "alfabeto + pontuação $\leftrightarrow$ numerais" foi feita usando a seguinte tabela: [2.5 pts.]

$\nearrow$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
2	K	L	M	N	O	P	Q	R	S	T
3	U	V	W	X	Y	Z	,	.	!	

(isto é, A $\leftrightarrow$ 10, N $\leftrightarrow$ 23, "," $\leftrightarrow$ 36, "espaço" $\leftrightarrow$ 39, etc...).

9. (a) Calcule as duas raízes quadradas de $2 + i$, apresentado-as na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. [1 pt.]

   (b) Em $\mathbb{C}$, resolva a equação $z^2 - 2z - (1+i) = 0$. As soluções devem ser apresentadas na forma $a + bi$, com $a, b \in \mathbb{R}$. [*Sugestão*: Use o resultado da alínea (a)...] [1 pt.]

10. Seja z o número complexo $-\sqrt{7} + 5i$, e θ o seu argumento.

    (a) Escreva na forma trigonométrica as raízes quintas de z, em função de θ. [1 pt.]

    (b) Represente geometricamente, no plano complexo, as raízes quintas de z. [2 pts.]

    [*Observação*: A resposta deve ser uma figura com os elementos suficientes para que fique bem determinada a localização dessas raízes, nomeadamente a sua distância à origem e os seus argumentos, relativos a θ. Comece por representar z...]

11. Responda a cada uma das seguintes questões, justificando a sua resposta com os resultados dados no curso. [3 pts.]

    (a) Com 11 alunos, de quantas maneiras distintas se podem formar 3 grupos de trabalho de modo a que dois tenham 4 alunos cada, e o restante grupo tenha 3 alunos?

    (b) O inverso de 9 módulo 100 é 11?

    (c) Todas as raízes do polinómio $x^{11} + x + \sqrt{11}$ são números algébricos?

12. Seja $\mathcal{F} = \{A \subseteq \mathbb{N} : A \text{ é infinito}\}$, isto é, $\mathcal{F}$ é o conjunto dos subconjuntos infinitos de $\mathbb{N}$. Prove que o conjunto $\mathcal{F}$ não é numerável. [1 pt.]

———————— ... ————————

Pergunta bónus: Calcule a nota que obteve neste exame, usando as cotações dadas e discriminando os valores que obteve em cada alínea. [0.5 pts.]

———————— ... FIM ... ————————