Tópicos de Matemática Elementar

Exercícios Preliminares – 2003/04

...

I. Lógica Básica

1. Negue cada uma das afirmações seguintes:

   (a) Ela tem aulas de piano e de guitarra.

   (b) Ele toca piano ou guitarra (ou ambos).

   (c) Ele ou toca piano ou toca guitarra (mas não ambos).

   (d) Não há extraterrestres azuis e não há unicórnios verdes.

   (e) Das duas uma só é verdadeira: ou não há extraterrestres azuis ou não há unicórnios verdes.

   (f) Todos os seres humanos são racionais.

   (g) Todos os seres humanos são irracionais.

   (h) Há seres humanos que são racionais.

   (i) Há seres humanos que são irracionais.

   (j) Nenhum ser humano é racional.

   (k) Nenhum ser humano é irracional.

   (l) Pelo menos um ser humano é racional.

   (m) Pelo menos um ser humano é irracional.

   (n) Se um número é divisível por 3, então é divisível por 6.

   (o) Se chove, então há pelo menos três nuvens no céu.

2. Para cada uma das proposições seguintes, todas da forma "$A \Rightarrow B$", diga se a proposição "$B \Rightarrow A$" correspondente é verdadeira ou falsa. Depois escreva, em português, a correspondente proposição "$\neg B \Rightarrow \neg A$".

   (a) Se um número é divisível por 6 então é divisível por 3.

   (b) Se chove, então há nuvens no céu.

3. Dê exemplo de três proposições da forma "$A \Rightarrow B$", em linguagem do dia-a-dia e diferentes das que aparecem nos exercícios anteriores, tais que a correspondente proposição "$B \Rightarrow A$" seja falsa.

4. Quais das condições seguintes são *necessárias* para o número natural n ser divisível por 6? E quais são *suficientes*?

   (a) n é divisível por 3.

   (b) n é múltiplo de 12.

   (c) n^2 é divisível por 9.

   (d) n é par e é divisível por 3.

5. Preencha a tabela seguinte, sem recorrer a apontamentos ou memória, pensando apenas no significado das diferentes expressões:

A	B	$\neg A$	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \veebar B$	$A \Rightarrow B$	$(\neg A) \vee B$	$A \wedge (\neg B)$	$A \Leftrightarrow B$
V	V								
V	F								
F	V								
F	F								

6. Quando Alice entrou na Floresta do Esquecimento, não esqueceu *tudo*; apenas certas coisas. Por vezes esquecia-se do seu nome, mas o que ela mais frequentemente esquecia era o dia da semana.

   O Leão e o Unicórnio eram visitantes regulares da floresta. Estes dois eram criaturas muito estranhas. O Leão mentia às segundas, terças e quartas, e dizia a verdade nos restantes dias da semana. O Unicórnio, por seu lado, mentia às quintas, sextas e sábados, mas dizia a verdade nos outros dias da semana*.

   (a) Um dia Alice encontrou o Leão e o Unicórnio a descansar sob uma árvore. Fizeram as seguintes afirmações:

      Leão: Ontem foi um dos dias em que eu minto.

      Unicórnio: Ontem foi também um dos dias em que minto.

      A partir destas duas afirmações, Alice (que era uma rapariga muito inteligente) conseguiu deduzir que dia da semana era. Que dia era?

   (b) Numa outra ocasião, Alice encontrou o Leão sózinho. Este fez as duas afirmações seguintes:

      – Eu menti ontem.

      – Mentirei novamente dois dias depois de amanhã.

      Que dia da semana era?

   (c) Em que dias da semana é possível para o Leão fazer as duas afirmações seguintes?

      – Eu menti ontem.

      – Mentirei novamente amanhã.

   (d) Em que dias da semana é possível o Leão declarar:

      – Eu menti ontem e mentirei novamente amanhã.

      AVISO: A resposta não é a mesma que a do problema anterior!

* Esta série de exercícios é de: Raymond Smullyan, *What's the Name of This Book?*, Prentice-Hall, 1978.

7. Os irmãos gémeos Tweedledum e Tweedledee eram também visitantes regulares da floresta. Um deles comportava-se como o Leão, mentindo às segundas, terças e quartas, e dizendo a verdade nos restantes dias da semana. O outro tinha os hábitos do Unicórnio, mentindo às quintas, sextas e sábados, mas dizendo a verdade nos outros dias da semana. Alice não sabia qual era qual, e para tornar as coisas ainda piores, eles eram exactamente iguais (excepto quando usavam os seus colares, o que raramente faziam). Não é de admirar que a pobre Alice achasse toda esta situação bastante confusa!

   Eis algumas das aventuras de Alice com Tweedledum e Tweedledee†.

   (a) Um dia Alice encontrou os irmãos juntos e estes disseram apenas:

      Primeiro: Eu sou o Tweedledum.

      Segundo: Eu sou o Tweedledee.

      Qual era realmente Tweedledum e qual era Tweedledee?

   (b) Num outro dia da mesma semana, os dois irmãos disseram o seguinte:

      Primeiro: Eu sou o Tweedledum.

      Segundo: Se isso for realmente verdade, então eu sou o Tweedledee!

      Qual era qual?

   (c) Numa outra ocasião, Alice encontrou os dois gémeos e perguntou a um deles, "Mentes aos domingos?" Ele respondeu "Sim". Então fez a mesma pergunta ao outro. O que é que este respondeu?

   (d) Noutra altura, os irmãos fizeram as seguintes declarações:

      Primeiro: Eu minto aos sábados. Eu minto aos domingos.

      Segundo: Eu vou mentir amanhã.

      Que dia da semana era?

† Esta série de exercícios é de: Raymond Smullyan, *What's the Name of This Book?*, Prentice-Hall, 1978.

(e) Um dia a Alice encontrou apenas um dos irmãos. Este fez a seguinte afirmação: "Eu hoje minto e sou o Tweedledee." Quem era?

(f) E se, na situação anterior, tivesse sido dito: "Hoje minto ou sou o Tweedledee", seria possível determinar quem era?

(g) Um dia Alice encontrou os dois gémeos, que fizeram as seguintes declarações:

Primeiro: Se eu sou o Tweedledum, então ele é o Tweedledee.

Segundo: Se ele é o Tweedledee, então eu sou o Tweedledum.

É possível determinar quem é quem? É possível determinar o dia da semana?

(h) **Um mistério resolvido!**

Nesta memorável ocasião, a Alice resolveu três grandes mistérios. Encontrou os dois irmãos sorrindo, debaixo de uma árvore. Alice esperava descobrir três coisas. (1) o dia da semana; (2) qual deles era Tweedledum; (3) qual deles se comportava como Leão e qual tinha os hábitos do Unicórnio (algo que ela desejava à muito tempo saber!).

Bom, os dois gémeos fizeram as seguintes afirmações:

Primeiro: Hoje não é domingo.

Segundo: De facto, hoje é segunda-feira.

Primeiro: Amanhã é um dos dias em que Tweedledee mente.

Segundo: O Leão mentiu ontem.

Alice bateu palmas de alegria. O problema estava agora completamente resolvido. Qual é a solução?

II. Lógica, Conjuntos e Funções[‡]

1. Seja $\mathcal{H}$ o conjunto de todos os seres humanos que existiram até hoje, e seja $\mathcal{V}$ o conjunto de todos os seres humanos vivos neste momento (aquele em que lê estas palavras).

   (a) Traduza por palavras cada uma das seguintes proposições, determine o seu valor lógico (*verdadeiro* ou *falso*), e escreva a sua negação em linguagem simbólica:

      (i) $\forall x \in \mathcal{H}\ \exists y \in \mathcal{H} \quad y$ é mãe de x.

      (ii) $\exists y \in \mathcal{H}\ \forall x \in \mathcal{H} \quad y$ é mãe de x.

      (iii) $\forall x \in \mathcal{H}\ \exists y \in \mathcal{H} \quad x$ é mãe de y.

      (iv) $\exists x \in \mathcal{H}\ \forall y \in \mathcal{H} \quad y$ é mãe de x.

      (v) $\forall x \in \mathcal{V}\ \exists y \in \mathcal{V} \quad \neg(y$ é mãe de $x)$.

   (b) Seja $f : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ a função definida por $f(x) =$ mãe de x, e sejam a, b dois elementos (distintos) do conjunto $\mathcal{H}$. Descreva por palavras os elementos dos conjuntos:

      (i) $f^{-1}(\{a\})$.

      (ii) $f^{-1}(\{a, b\})$.

      (iii) $f^{-1}(\{a\}) \cap f^{-1}(\{b\})$.

      (iv) $f^{-1}(\mathcal{V})$.

2. Identifique os seguintes conjuntos:

   (a) $\{n \in \mathbb{N} |\ \exists m \in \mathbb{N} :\ n = 2m\}$.

   (b) $\{n \in \mathbb{N} |\ (n > 1) \wedge (\forall x, y \in \mathbb{N})[(xy = n) \Rightarrow (x = 1\ \vee\ y = 1)]\}$.

3. Mostre que $\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B)$.

[‡] Alguns dos problemas desta secção são variações de exemplos e exercícios de: Keith Devlin, *Sets, Functions and Logic: an Introduction to Abstract Mathematics (2nd ed.)*, Chapman and Hall, 1992.

4. Demonstre que $\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) \subseteq \mathcal{P}(A \cup B)$. Dê um exemplo que mostre que a igualdade por vezes não se verifica.

5. Sejam A e B dois subconjuntos de um conjunto $\mathcal{U}$. A *diferença simétrica* dos conjuntos A e B, é o conjunto definido por $A \triangle B := (A \backslash B) \cup (B \backslash A)$.

   (a) Diga a que é igual cada um dos seguintes conjuntos:

      (i) $A \triangle \emptyset$.

      (ii) $A \triangle A$.

      (iii) $A \triangle \mathcal{U}$.

      (iv) $A \triangle \mathcal{C}(A)$.

   (b) Para todos $A, B, C \subseteq \mathcal{U}$, prove que $(A \triangle B) \triangle C = A \triangle (B \triangle C)$.

III. Indução Matemática[§]

1. A prova por indução seguinte parece correcta, mas para $n = 6$ o lado esquerdo é igual a $\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} + \frac{1}{30} = \frac{5}{6}$, enquanto o direito é igual a $\frac{3}{2} - \frac{1}{6} = \frac{4}{3}$ (verifique!) Consegue descobrir o que está errado?

   $\ll$ *Teorema*: Para todo $n \in \mathbb{N}$:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n}.$$

   Demonstração: Vamos usar indução em n. Se $n = 1$, então $\frac{3}{2} - \frac{1}{n} = \frac{1}{1 \times 2}$; e, supondo o teorema verdadeiro para um dado n, tem-se:

$$\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \cdots + \frac{1}{(n-1) \times n} + \frac{1}{n \times (n+1)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= \frac{3}{2} - \frac{1}{n} + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1},$$

   e portanto o teorema é também verdadeiro para o número $n + 1$. $\gg$

[§] Todos os exercícios desta secção são de: Donald Knuth, *The Art of Computer Programming, Vol. 1: Fundamental Algorithms (2nd ed.)*, Addison-Wesley, 1973.

2. Tem de haver qualquer coisa de errado com a seguinte demonstração; o que é?

$\ll$ *Teorema*: Seja a um número positivo. Para todos os inteiros positivos n tem-se: $a^{n-1} = 1$.

Demonstração: Se $n = 1$, então $a^{n-1} = a^{1-1} = a^0 = 1$. Por indução, suponha-se que o teorema é verdadeiro para todos os números $1, 2, \ldots, n$, para um dado n. Tem-se então:

$$a^{(n+1)-1} = a^n = \frac{a^{n-1} \times a^{n-1}}{a^{n-2}} = \frac{1 \times 1}{1} = 1;$$

portanto o teorema é também verdadeiro para o número $n + 1$. $\gg$

3. Use indução matemática para demonstrar as seguintes proposições:

   (a) $0 < a < 1 \Rightarrow (1 - a)^n \geq 1 - na$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

   (b) $(n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 10) \Rightarrow 2^n > n^3$.

   (c) $\forall n \in \mathbb{N} \quad 1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + n)^2$.

4. Encontre e demonstre uma fórmula simples para a soma:

$$\frac{1^3}{1^4+4} - \frac{3^3}{3^4+4} + \frac{5^3}{5^4+4} - \cdots + \frac{(-1)^n(2n+1)^3}{(2n+1)^4+4}.$$

——— ... ———