Teoria dos Números

Alguns Exercícios – 2002/03

1. Mostrar que todo o número perfeito par termina em 6 ou 8 (quando escrito na base decimal).

2. Provar que se $n \in \mathbb{N}$ é um número tal que $\sigma(n) = 5n$, então n tem mais de 5 factores primos distintos.

3. Provar que todo o divisor primo de $2^p - 1$, quando p é um primo ímpar, é da forma $8k \pm 1$.

4. Mostrar que a equação $2x^2 + 5x + 5 \equiv 0 \pmod{89}$ não tem solução.

5. Provar que 7 é uma raiz primitiva para todos os primos da forma $2^{4n} + 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

6. Mostrar que a equação Diofantina $y^2 - 29x^2 = 2$ não tem solução.

7. Seja $p > 3$ primo. Mostrar que $x^2 \equiv -3 \pmod{p}$ tem solução sse $p \equiv 1 \pmod{6}$. Utilizar este facto para provar que há uma infinidade de números primos da forma $6n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$).

8. Decompor 187 em factores primos nos anéis $\mathbb{Z}[i]$ e $\mathbb{Z}[\omega]$.

9. (a) Descrever os primos de $\mathbb{Z}[\sqrt{-2}]$.

   (b) Determinar exactamente quais são os primos (de $\mathbb{Z}$) que podem ser escritos na forma $x^2 + 2y^2$.

10. Resolver as equações Diofantinas:

    (a) $y^2 + 1 = x^3$.

    (b) $x^2 - xy + y^2 = z^2$.

11. Mostrar que $6 + i\sqrt{11}$ é um irredutível de $\mathbb{Z}[\sqrt{-11}]$.

12. Resolver os seguintes exercícios do Ireland & Rosen:

- Cap. 3 (p. 37): 16, 17, 18 e 25.
- Cap. 4 (p. 48): 11, 12 e 17.
- Cap. 17 (p. 294): 3 e 4.