Módulo 4

ALGA I. Aplicações lineares. Isomorfismos lineares

Contents

4.1 Aplicações lineares. Isomorfismos lineares. Operadores lineares. Funcionais lineares. O espaço dual $\mathcal{V}^*$

▶ **Definição 4.1** ... **1**. *Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois espaços vectoriais sobre um corpo $\mathbb{k}$. Uma aplicação $\mathbf{L} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ diz-se uma* **aplicação linear** *ou um* **homomorfismo linear** *de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$, se $\mathbf{L}$ satisfaz as seguintes propriedades:*

$$\begin{array}{lrcl} [L1]. & \mathbf{L}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) & = & \mathbf{L}(\mathbf{v})+\mathbf{L}(\mathbf{w}) \\ [L2]. & \mathbf{L}(\lambda\mathbf{v}) & = & \lambda\,\mathbf{L}(\mathbf{v}) \end{array} \tag{4.1.1}$$

$\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}$ e $\forall \lambda \in \mathbb{k}$. O conjunto constituído por todas as aplicações lineares de $\mathcal{V}$ em $\mathcal{W}$ representa-se por $Hom_{\mathbb{k}}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$ ou simplesmente por $Hom(\mathcal{V}, \mathcal{W})$, quando não há risco de confusão.

2. *Uma aplicação linear $\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ diz-se um* **isomorfismo linear***, se existe uma aplicação $\Psi : \mathcal{W} \to \mathcal{V}$ tal que $\Phi \circ \Psi = Id_{\mathcal{W}}$ e $\Psi \circ \Phi = Id_{\mathcal{V}}$. Neste caso $\Psi = \Phi^{-1}$ é necessàriamente linear (prova ?).*

O conjunto constituído por todos os isomorfismos lineares entre os espaços vectoriais $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ representa-se por $Isom_{\mathbb{k}}(\mathcal{V}, \mathcal{W})$.

3. *Uma aplicação linear $\mathbf{L} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ chama-se um* **operador linear** *em $\mathcal{V}$. O conjunto de todos os operadores lineares em $\mathcal{V}$ representa-se por $Op_{\mathbb{k}}(\mathcal{V})$ ou apenas por $Op(\mathcal{V})$.*

4. *Um isomorfismo linear $\Phi : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ diz-se um* **automorfismo linear** *de $\mathcal{V}$. O conjunto de todos os automorfismos lineares de $\mathcal{V}$ representa-se por $Aut_{\mathbb{k}}(\mathcal{V})$ ou simplesmente por $Aut(\mathcal{V})$.*

5. *Uma aplicação linear* $\varphi : \mathcal{V} \to \mathbb{k}$*, diz-se um* **funcional linear** *ou uma* **forma linear** *em* $\mathcal{V}$*. O conjunto constituído por todos os funcionais lineares em* $\mathcal{V}$ *diz-se o* **espaço dual** *de* $\mathcal{V}$ *e nota-se por* $\mathcal{V}^*$*.*

■.

$\mathrm{Hom}_{\mathbb{k}}(\mathcal{V},\mathcal{W})$ tem uma estrutura natural de espaço vectorial sobre $\mathbb{k}$, definindo a soma de aplicações lineares e a multiplicação por escalares, respectivamente por:

$$\begin{aligned} (\mathbf{L}+\mathbf{M})(\mathbf{v}) &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{L}(\mathbf{v})+\mathbf{M}(\mathbf{v}) \\ (\lambda\mathbf{L})(\mathbf{v}) &\stackrel{\text{def}}{=} \lambda\mathbf{L}(\mathbf{v}) \end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Em particular o espaço dual $\mathcal{V}^*$ tem uma estrutura natural de espaço vectorial sobre $\mathbb{k}$. Aliás $\mathcal{V}^*$ é um subespaço de $\mathcal{F}(\mathcal{V};\mathbb{k})$ (ver o exemplo 3.2).

$\mathrm{Op}(\mathcal{V})$ tem uma estrutura natural de $\mathbb{k}$-álgebra, que se diz a **álgebra de operadores** (lineares) de $\mathcal{V}$.

$\mathrm{Aut}(\mathcal{V})$ tem uma estrutura natural de grupo que se diz o **grupo linear geral** de $\mathcal{V}$, e que se nota por $G\ell(\mathcal{V})$.

► **Definição 4.2** ... *Dado uma aplicação linear* $\mathbf{L} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ *define-se o respectivo* **núcleo**, $\ker \mathbf{L} \subseteq \mathcal{V}$, *através de:*

$$\ker \mathbf{L} \stackrel{def}{=} \{\mathbf{v} \in \mathcal{V};\quad \mathbf{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\} \tag{4.1.3}$$

e a **imagem**, $im\,\mathbf{L} \subseteq \mathcal{W}$, *através de:*

$$im\,\mathbf{L} \stackrel{def}{=} \{\mathbf{w} \in \mathcal{W};\quad \mathbf{w} = \mathbf{L}(\mathbf{v}),\qquad \mathbf{v} \in \mathcal{V}\} \tag{4.1.4}$$

■.

► **Proposição 4.1** ... *O núcleo* $\ker \mathbf{L}$ *é um subespaço de* $\mathcal{V}$*. A imagem* $im\,\mathbf{L}$ *é um subespaço de* $\mathcal{W}$*.*

Dem.: [S1]. se $\mathbf{v},\mathbf{w} \in \ker\mathbf{L}$, então $\mathbf{L}(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = \mathbf{L}(\mathbf{v})+\mathbf{L}(\mathbf{w}) = \mathbf{0}+\mathbf{0} = \mathbf{0}$ e portanto $\mathbf{v}+\mathbf{w} \in \ker\mathbf{L}$. [S2]. Se $\mathbf{v} \in \ker\mathbf{L}$ e $\lambda \in \mathbb{k}$, então $\mathbf{L}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}$ e portanto $\lambda\mathbf{v} \in \ker\mathbf{L}$.

Demostração análoga para $\mathrm{im}\,\mathbf{L}$.

■.

Uma aplicação linear $\mathbf{L} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ envia sempre o vector nulo de $\mathcal{V}$ no vector nulo de $\mathcal{W}$. Por outro lado, $\mathbf{L} : \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ é injectiva se e só se $\ker\mathbf{L} = \{\mathbf{0}\}$. Com efeito, se $\ker\mathbf{L} = \{\mathbf{0}\}$ então $\mathbf{L}(\mathbf{u}) = \mathbf{L}(\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{0} = \mathbf{L}(\mathbf{u}) - \mathbf{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{L}(\mathbf{u}-\mathbf{v}) \Rightarrow \mathbf{u}-\mathbf{v} \in \ker\mathbf{L} = \{\mathbf{0}\} \Rightarrow \mathbf{u} = \mathbf{v}$. Se $\mathbf{L}$ é injectiva, então, se $\mathbf{v} \in \ker\mathbf{L}$ tem-se $\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{0} = \mathbf{L}(\mathbf{0}) \Rightarrow \mathbf{v} = \mathbf{0}$.

► **Exemplo 4.1** ... *Seja* $\mathcal{V} = \mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R};\quad f \text{ contínua}\}$*. Então:*

$$\begin{array}{rccc} \delta_0 : & \mathcal{C}^0(\mathbb{R};\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \delta_0[f] \stackrel{def}{=} f(0) \end{array} \tag{4.1.5}$$

é um funcional linear que se diz o **funcional de Dirac**. *O seu núcleo* $\ker \delta_0$ *é constituído por todas as funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *que se anulam no ponto* 0.

■.

▶ **Exemplo 4.2** ... *Seja* $\mathcal{V} = \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) = \{f : [a,b] \to \mathbb{R};\ \ f \text{ contínua}\}$. *Então:*

$$\begin{array}{rccccc} \varphi : & \mathcal{C}^0([a,b];\mathbb{R}) & \longrightarrow & & & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \varphi[f] & \overset{def}{=} & \int_a^b f(t)dt \end{array} \tag{4.1.6}$$

é um funcional linear. O núcleo $\ker \varphi$ *é trivial, isto é, é constituído pelas funções contínuas de área (algébrica) nula, i.e., tais que* $\varphi[f] = \int_a^b f(t)dt = 0$.

■.

▶ **Exemplo 4.3** ... *Seja* $\mathcal{V} = \mathbb{R}^n$ *o espaço coordenado real de dimensão* n *do exemplo 3.1. Fixemos uma sequência ordenada de* n *números reais* $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$, *representada por um* **vector-linha** $[a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] = [a_i]$, *isto é, por uma matriz com uma só linha e* n *colunas. Definimos então um funcional linear* $\varphi_{\mathbf{a}}$ *em* $\mathbb{R}^n$, *associado a* $\mathbf{a}$, *através de:*

$$\varphi_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = [a_1 \quad a_2 \quad \cdots \quad a_n] \begin{bmatrix} x^1 \\ x^2 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix} \overset{def}{=} \sum_{i=1}^n a_i x^i \tag{4.1.7}$$

Num capítulo futuro demonstrar-se-á que todo o funcional linear em $\mathbb{R}^n$ *é do tipo* $\varphi_{\mathbf{a}}$, *para algum* $\mathbf{a} = [a_i]$. *Portanto o espaço dual* $(\mathbb{R}^n)^*$ *identifica-se com o espaço dos vectores-linha* $\mathbf{a} = [a_i]$. *Quando* $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ *o núcleo* $\ker \varphi_{\mathbf{a}}$ *define um hiperplano em* $\mathbb{R}^n$.

Considerações completamente análogas permitem concluir que $(\mathbb{C}^n)^*$ *se identifica com o espaço dos vectores-linha* $\mathbf{a} = [a_i]$, *mas agora com* $a_i \in \mathbb{C}$.

■.

4.2 Exercícios

▶ **Exercício 4.1** ... *Das aplicações que se seguem, indique aquelas que são lineares. Relativamente a essas, calcule o respectivo núcleo e diga quais as que são injectivas.*

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$; $(x,y) \longmapsto (x+y, x-y)$

b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2; (x,y,z) \longmapsto (2x+y, z-3y)$

c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2; (x,y) \longmapsto (|x|, |y|)$

d) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3;\ (x,y) \longmapsto (x^2, y^2, 0)$

e) $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2;\ (x,y,z,t) \longmapsto (x+y+1, z+t+2)$

f) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}_1(X);\ (a,b) \longmapsto a+bX$

g) $f : \mathbb{R}_3(X) \longrightarrow \mathbb{R}_1(X);\ a+bX+cX^2+dX^3 \mapsto (a+b)+(c-2d)X$

h) $f : \mathbb{R}_2(X) \longrightarrow \mathbb{R}_2(X); \quad a + bX + cX^2 \mapsto (a+1) + (b+c)X + 2cX^2$

i) $f : \mathbb{R}_3(X) \longrightarrow \mathbb{R}; \; P \mapsto P(1)$

j) $f : \mathbb{R}(X) \longrightarrow \mathbb{R}(X); \; P \mapsto P'$

l) $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbf{C}^2; \; (z, w) \mapsto (iz + w, z + iw)$ *considere* $K = \mathbb{R}$

m) $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2; \; (z, w) \mapsto (iz, \overline{w})$ *considere* $K = \mathbb{R}$

n) $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^2; \; (z, w) \mapsto (iz, \overline{w})$ *considere* $K = \mathbb{C}$