

Módulo 5

ALGA I. Bases, coordenadas e dimensão

Contents

5.1	Bases, coordenadas e dimensão	58
5.2	Cálculos com coordenadas. Problemas	65
5.3	Mudanças de base e de coordenadas	68
5.4	Exercícios	70

5.1 Bases, coordenadas e dimensão

► **Definição 5.1** ... Seja $\mathcal{V}$ um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{k}$. Diz-se que os vectores $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathcal{V}$ são **linearmente independentes** se verificam a condição seguinte:

$$[LI]. \quad \lambda^1 \mathbf{v}_1 + \lambda^2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda^m \mathbf{v}_m = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^m = 0 \quad (5.1.1)$$

Caso contrário esses mesmos vectores dizem-se **linearmente dependentes**. Portanto $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathcal{V}$ são linearmente dependentes quando existem escalares $\lambda^1, \dots, \lambda^m \in \mathbb{k}$ não todos nulos tais que:

$$\lambda^1 \mathbf{v}_1 + \lambda^2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda^m \mathbf{v}_m = \mathbf{0}$$

► **Definição 5.2 [Base finita]** ... Seja $\mathcal{V}$ um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{k}$. Um conjunto ordenado de vectores $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ em $\mathcal{V}$ diz-se uma **base finita** (ordenada) de $\mathcal{V}$ se:

$$\begin{aligned} [B1]. \quad & \mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n \quad \text{são linearmente independentes} \\ [B2]. \quad & \text{span}_{\mathbb{k}}\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\} = \mathcal{V} \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

O espaço vectorial $\mathcal{V}$ diz-se de **dimensão finita** se admite uma base finita. Caso contrário diz-se de **dimensão infinita**.

■.

Suponhamos que $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é uma base (finita) de $\mathcal{V}$. Então por (5.1.2) [B2]., todo o vector $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ pode escrever-se como combinação linear dos vectores de $\mathcal{B}$, isto é, existem escalares $v^i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$, tais que:

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_i = v^1 \mathbf{e}_1 + \dots + v^n \mathbf{e}_n \quad (5.1.3)$$

Além disso, por (5.1.2) [B1]. esses escalares são únicos (dependem apenas de $\mathbf{v}$). De facto, se existissem outros escalares $\lambda^i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \dots, n$, tais que $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \mathbf{e}_i$ então viria que:

$$\mathbf{0} = \sum_{i=1}^n (v^i - \lambda^i) \mathbf{e}_i \quad \Rightarrow \quad \lambda^i = v^i, \quad \forall i = 1, \dots, n$$

uma vez que por [B1]. os vectores de $\mathcal{B}$ são linearmente independentes.

► **Proposição 5.1** ... *Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois espaços vectoriais sobre um mesmo corpo $\mathbb{K}$, em que $\mathcal{V}$ tem dimensão finita. Seja $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ uma base de $\mathcal{V}$ e $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_n$, n vectores quaisquer de $\mathcal{W}$. Então existe uma e uma só aplicação linear $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ tal que:*

$$\mathbf{L}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i, \quad i = 1, \dots, n$$

Dem.: Todo o vector $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ exprime-se na forma única $\mathbf{v} = \sum_i v^i \mathbf{e}_i$. Se se pretende que $\mathbf{L}$ seja linear, devemos ter que $\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{L}(\sum_i v^i \mathbf{e}_i) = \sum_i v^i \mathbf{L}(\mathbf{e}_i) = \sum_i v^i \mathbf{w}_i$. Basta então definir:

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \sum_i v^i \mathbf{w}_i$$

que é linear. Se existisse outra aplicação $\mathbf{M}$ tal que $\mathbf{M}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{w}_i = \mathbf{L}(\mathbf{e}_i)$, então $(\mathbf{L} - \mathbf{M})(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0}$ e, como $\{\mathbf{e}_i\}$ é uma base, $\mathbf{L} = \mathbf{M}$.

■.

Desta forma, se $\mathcal{V}$ tem dimensão finita, cada base finita $\mathcal{B}$ estabelece um isomorfismo $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathcal{V} \cong \mathbb{K}^n$, entre $\mathcal{V}$ e $\mathbb{K}^n$, definido por:

$$\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbf{v} \mapsto \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}, \quad \text{onde } \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_i \in \mathcal{V} \quad (5.1.4)$$

Os escalares v^i , $i = 1, \dots, n$ dizem-se as **coordenadas de $\mathbf{v}$** , relativas à base $\mathcal{B}$. Escrevemos, neste caso, $\mathbf{v} = [v^i]_{\mathcal{B}}$, ou apenas $\mathbf{v} = [v^i]$ (ou até $\mathbf{v} = v^i$), se não houver risco de confusão.

► **Lema 5.1** ... *Seja $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n\}$ uma sucessão de n vectores num espaço vectorial $\mathcal{V}$. Seja $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+1}$ uma sucessão de $n+1$ combinações lineares dos vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$. Então os vectores $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+1}$ são linearmente dependentes.*

Portanto, dois vectores $\mathbf{w}_1$ e $\mathbf{w}_2$, que sejam colineares com um vector $\mathbf{v}_1$, são linearmente dependentes; três vectores $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2$ e $\mathbf{w}_3$, que sejam coplanares com dois vectores $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, são linearmente dependentes; etc...

Dem.: (facultativa) (prova por indução sobre n).

- Se $n = 1$, então $\mathbf{w}_1 = \lambda^1 \mathbf{v}_1$ e $\mathbf{w}_2 = \lambda^2 \mathbf{v}_1$ são linearmente dependentes.
- Suponhamos agora que o teorema é verdadeiro para n e demonstremos que continua verdadeiro para $n + 1$. Sejam $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+2}$ combinações lineares dos vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1}$. Podemos então escrever:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_1 &= \lambda^1 \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{w}_2 &= \lambda^2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2 \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_{n+1} &= \lambda^{n+1} \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_{n+1} \\ \mathbf{w}_{n+2} &= \lambda^{n+2} \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_{n+2}\end{aligned}$$

onde $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n+2}$ são combinações lineares dos vectores $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n+1}$.

Se $\lambda^1 = \dots = \lambda^{n+1} = 0$ então teríamos que $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+1}$ são combinações lineares dos vectores $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n+1}$. Pela hipótese de indução, os $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+1}$ são linearmente dependentes e portanto os $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+2}$ são também linearmente dependentes.

Suponhamos agora que algum dos $\lambda^j \neq 0$, para $j = 1, \dots, n + 1$. Mudando se necessário a ordem dos vectores, podemos supor que $j = 1$, isto é, que $\lambda^1 \neq 0$. Temos então que:

$$\begin{aligned}\mathbf{v}_1 &= \frac{1}{\lambda^1} \mathbf{w}_1 - \frac{1}{\lambda^1} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{w}_2 &= \lambda^2 \mathbf{v}_1 + \mathbf{u}_2 \\ &= \frac{\lambda^2}{\lambda^1} \mathbf{w}_1 - \frac{\lambda^2}{\lambda^1} \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 \\ \Rightarrow \mathbf{w}_2 - \frac{\lambda^2}{\lambda^1} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{u}'_2, \quad \text{onde } \mathbf{u}'_2 \text{ é combinação linear de } \mathbf{u}_1 \text{ e } \mathbf{u}_2\end{aligned}$$

Anàlogamente se obtém que:

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_3 - \frac{\lambda^3}{\lambda^1} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{u}'_3 \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_{n+2} - \frac{\lambda^{n+2}}{\lambda^1} \mathbf{w}_1 &= \mathbf{u}'_{n+2}\end{aligned}$$

onde os $\mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_{n+2}$ são $n + 1$ combinações lineares de $\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{n+2}$ e portanto também dos vectores $\mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_{n+1}$. Pela hipótese de indução, os $\mathbf{u}'_2, \dots, \mathbf{u}'_{n+2}$ são linearmente dependentes:

$$\alpha'^2 \mathbf{u}'_2 + \dots + \alpha'^{n+2} \mathbf{u}'_{n+2} = \mathbf{0}$$

donde:

$$\alpha'^2 \left(\mathbf{w}_2 - \frac{\lambda^2}{\lambda^1} \mathbf{w}_1 \right) + \dots + \alpha'^{n+2} \left(\mathbf{w}_{n+2} - \frac{\lambda^{n+2}}{\lambda^1} \mathbf{w}_1 \right) = \mathbf{0}$$

isto é:

$$\alpha'^1 \mathbf{w}_1 + \alpha'^2 \mathbf{w}_2 + \cdots + \alpha'^{n+2} \mathbf{w}_{n+2} = \mathbf{0}$$

onde pelo menos um dos $\alpha'_2, \dots, \alpha'^{n+2}$ é não nulo, o que significa que $\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+2}$ são linearmente dependentes.

■.

► **Teorema 5.1 (Dimensão)** ... *Seja $\mathcal{V}$ um espaço vectorial de dimensão finita sobre $\mathbb{K}$. Então:*

[1.] *todas as bases têm o mesmo número de vectores linearmente independentes.*

A este número, comum a todas as bases, chama-se a **dimensão de $\mathcal{V}$** (sobre $\mathbb{K}$), e nota-se por $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$, ou simplesmente por $\dim \mathcal{V}$, quando não há risco de confusão.

[2.] *Se $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$, n vectores linearmente independentes formam uma base.*

Dem.: [1.] Sejam $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ e $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$ duas bases de $\mathcal{V}$. Se $p > n$, então, uma vez que os $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p$ são combinações lineares dos $\mathbf{e}_i$, pelo lema 5.1, concluímos que os $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p$ são linearmente dependentes, o que é absurdo por definição de base. Análogamente, não podemos ter $n > p$.

[2.] Seja $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ uma base de $\mathcal{V}$ e $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ uma sucessão de vectores linearmente independentes em $\mathcal{V}$. Para mostrar que formam uma base basta mostrar que geram $\mathcal{V}$. Seja $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Pelo lema 5.1, a sucessão $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n, \mathbf{v}\}$ é uma sucessão de vectores linearmente dependentes, uma vez que esses $n+1$ vectores são combinações lineares dos $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$. Portanto:

$$\lambda^1 \mathbf{v}_1 + \cdots + \lambda^n \mathbf{v}_n + \lambda \mathbf{v} = \mathbf{0}$$

onde os $\lambda^1, \dots, \lambda^n, \lambda$ não são todos nulos. Mas $\lambda \neq 0$, caso contrário os $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ seriam linearmente dependentes. Logo:

$$\mathbf{v} = -\frac{\lambda^1}{\lambda} \mathbf{v}_1 - \cdots - \frac{\lambda^n}{\lambda} \mathbf{v}_n$$

o que mostra que os $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$ geram $\mathcal{V}$.

■.

► **Teorema 5.2 (da base incompleta)** ... *Seja $\mathcal{V}$ um espaço vectorial de dimensão finita sobre um corpo $\mathbb{K}$: $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V} = n$. Então, dada uma qualquer sucessão $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$, com $p \leq n$, de vectores linearmente independentes, podemos encontrar $q = n-p$ vectores $\mathbf{f}_{p+1}, \dots, \mathbf{f}_n$ tais que $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p, \mathbf{f}_{p+1}, \dots, \mathbf{f}_n\}$ formam uma base para $\mathcal{V}$.*

Dem.: (facultativa) (indução sobre $q = 0, 1, \dots, n$). Se $q = 0$ nada há a provar. Seja

$\mathcal{A}_q$: para todo o $\mathcal{V}$, todo o $n = \dim \mathcal{V}$, e todo o p tal que $n = p + q$, toda a sucessão $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_p\}$, de vectores linearmente independentes, pode ser completada a uma base de $\mathcal{V}$.

Demonstremos que $\mathcal{A}_q \Rightarrow \mathcal{A}_{q+1}$, se $0 \leq q < q+1 \leq n$. Seja $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{p-1}\}$ uma sucessão de vectores linearmente independentes. Como $p \leq n$, temos que $p-1 \leq n-1$ e o subespaço gerado por $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{p-1}$ é distinto de $\mathcal{V}$. Se $\mathbf{f}_p$ é um vector de $\mathcal{V}$, que não pertence a esse subespaço, então $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{p-1}, \mathbf{f}_p\}$ é ainda uma sucessão de vectores linearmente independentes, que, de acordo com $\mathcal{A}_q$, podemos completar numa base de $\mathcal{V}$. Resulta então que $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_{p-1}\}$ pode igualmente ser completada numa base de $\mathcal{V}$, o que demonstra $\mathcal{A}_{q+1}$. ■

► **Teorema 5.3** ... Seja $\left| \begin{array}{l} \mathcal{V} \text{ um espaço vectorial de dimensão finita,} \\ \mathcal{W} \text{ um espaço vectorial qualquer} \\ \mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W} \text{ uma aplicação linear} \end{array} \right.$

Então $\ker \mathbf{L}$ e $\text{im } \mathbf{L}$ são ambos de dimensão finita e:

$$\boxed{\dim \ker \mathbf{L} + \dim \text{im } \mathbf{L} = \dim \mathcal{V}} \quad (5.1.5)$$

Dem.: $\ker \mathbf{L}$ tem dimensão finita por ser subespaço de um espaço vectorial de dimensão finita. Seja $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ uma base de $\ker \mathbf{L}$ e completemos esta base a uma base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}_{m+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de $\mathcal{V}$, onde $n = \dim \mathcal{V}$. Vamos mostrar que $\{\mathbf{L}(\mathbf{e}_{m+1}), \dots, \mathbf{L}(\mathbf{e}_n)\}$ formam uma base para $\text{im } \mathbf{L}$, o que demonstrará o teorema.

Qualquer vector em $\text{im } \mathbf{L}$ tem a forma:

$$\mathbf{L} \left(\sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_i \right) = \sum_{i=m+1}^n v^i \mathbf{L}(\mathbf{e}_i)$$

o que mostra que $\mathbf{L}(\mathbf{e}_{m+1}), \dots, \mathbf{L}(\mathbf{e}_n)$ geram $\text{im } \mathbf{L}$.

Suponhamos agora que $\sum_{i=m+1}^n v^i \mathbf{L}(\mathbf{e}_i) = \mathbf{0}$. Então $\mathbf{L} \left(\sum_{i=m+1}^n v^i \mathbf{e}_i \right) = \mathbf{0}$, o que significa que $\sum_{i=m+1}^n v^i \mathbf{e}_i \in \ker \mathbf{L}$, isto é:

$$\sum_{i=m+1}^n v^i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^m \lambda^j \mathbf{e}_j$$

Mas isto só é possível se todos os coeficientes v^i e λ^j se anularem, já que $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é uma base de $\mathcal{V}$. Portanto os vectores $\mathbf{L}(\mathbf{e}_{m+1}), \dots, \mathbf{L}(\mathbf{e}_n)$ são linearmente independentes. ■

► **Corolário 5.1** ... Seja $\left| \begin{array}{l} \mathcal{V} \text{ um espaço vectorial de dimensão finita} \\ \mathcal{W} \text{ um espaço vectorial qualquer} \\ \mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W} \text{ uma aplicação linear} \end{array} \right.$

Então as propriedades seguintes são equivalentes:

- (i). $\mathbf{L}$ é injectiva
- (ii). $\dim \mathcal{V} = \dim (\text{im } \mathbf{L})$
- (iii). $\ker \mathbf{L} = \{\mathbf{0}\}$

(5.1.6)

■

► **Teorema 5.4** ... Seja $\left| \begin{array}{l} \mathcal{V} \text{ um espaço vectorial qualquer} \\ \mathcal{S}, \mathcal{T} \text{ dois subespaços de dimensão finita de } \mathcal{V} \end{array} \right|$

Então $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ e $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ têm dimensão finita e, além disso:

$$\dim(\mathcal{S} + \mathcal{T}) = \dim \mathcal{S} + \dim \mathcal{T} - \dim(\mathcal{S} \cap \mathcal{T}) \quad (5.1.7)$$

Dem.: (facultativa) Recorde que $\mathcal{S} + \mathcal{T} = \text{span}_{\mathbb{K}}\{\mathcal{S} \cup \mathcal{T}\}$. Como $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ é gerado pela reunião de bases para $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$, respectivamente, então $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ tem dimensão finita. Por outro lado, $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ tem dimensão finita por estar contido em subespaços de dimensão finita.

Suponhamos agora $m = \dim \mathcal{S} \cap \mathcal{T}$, $s = \dim \mathcal{S}$ e $t = \dim \mathcal{T}$. Escolhamos uma base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$ para $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$. Pelo teorema da base incompleta, esta base pode ser completada a bases de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$, digamos $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}'_{m+1}, \dots, \mathbf{e}'_s\}$, para $\mathcal{S}$, e $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}''_{m+1}, \dots, \mathbf{e}''_t\}$ para $\mathcal{T}$, respectivamente.

Vamos mostrar que $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}'_{m+1}, \dots, \mathbf{e}'_s, \mathbf{e}''_{m+1}, \dots, \mathbf{e}''_t\}$ é uma base para $\mathcal{S} + \mathcal{T}$, o que provará (5.1.7).

Como qualquer vector em $\mathcal{S} + \mathcal{T}$ é uma soma de vectores em $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$, isto é, uma soma de combinações lineares de

$$\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}'_{m+1}, \dots, \mathbf{e}'_s\} \text{ e } \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}''_{m+1}, \dots, \mathbf{e}''_t\}$$

a reunião destes conjuntos de vectores geram $\mathcal{S} + \mathcal{T}$. Resta portanto provar a independência linear. Suponhamos então que:

$$\sum_{i=1}^n x^i \mathbf{e}_i + \sum_{j=m+1}^s y^j \mathbf{e}'_j + \sum_{k=m+1}^t z^k \mathbf{e}''_k$$

é uma combinação linear não trivial.

Então deverão existir índices j e k , tais que $y^j \neq 0$ e $z^k \neq 0$ pois, caso contrário, obteríamos uma dependência linear não trivial entre os elementos das bases de $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$, acima escolhidas.

Portanto, o vector não nulo $\sum_{k=m+1}^t z^k \mathbf{e}''_k \in \mathcal{T}$ deve pertencer também a $\mathcal{S}$ porque é igual a $-\left(\sum_{i=1}^n x^i \mathbf{e}_i + \sum_{j=m+1}^s y^j \mathbf{e}'_j\right)$. Mas então esse vector tem que estar em $\mathcal{S} \cap \mathcal{T}$ e pode pois ser representado por uma combinação linear dos vectores $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m\}$. Mas esta representação dá uma dependência linear não trivial entre os $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_m, \mathbf{e}''_{m+1}, \dots, \mathbf{e}''_t\}$ o que é absurdo, já que eles formam uma base de $\mathcal{T}$. ■.

► **Exemplo 5.1** ... Os vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{e}_1 = \hat{\mathbf{i}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \hat{\mathbf{j}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \hat{\mathbf{k}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes, e têm a propriedade de que qualquer vector $\mathbf{x} =$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, se pode escrever como **combinação linear** de $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$. De facto:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x^1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x^3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x^1 \mathbf{e}_1 + x^2 \mathbf{e}_2 + x^3 \mathbf{e}_3 \\ &= x^1 \hat{\mathbf{i}} + x^2 \hat{\mathbf{j}} + x^3 \hat{\mathbf{k}} \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Diz-se então que $\{\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é uma **base** (ordenada): a **base canónica** de $\mathbb{R}^3$. Portanto $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3 = 3$.

► **Exemplo 5.2** ... Mais geralmente os n vectores $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1, \dots, n}$ definidos por:

$$\mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{com 1 na linha } i \text{ e zeros nas outras entradas} \quad (5.1.9)$$

constituem a **base canónica** de $\mathbb{K}^n$. Portanto $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}^n = n$.

► **Exemplo 5.3** ... Os monómios $\{1, X, X^2, \dots, X^N\}$ constituem uma base para o espaço $\mathbb{K}_N[X]$ dos polinómios em X , com coeficientes em $\mathbb{K}$, de grau $\leq N$. Portanto $\dim_{\mathbb{K}} \mathbb{K}_N[X] = N + 1$.

► **Exemplo 5.4** ... No exemplo 3.3, onde $\mathcal{V} = \mathcal{F}(S; \mathbb{R})$ suponhamos que S é um conjunto finito, com n elementos, digamos $S = \{1, 2, \dots, n\}$. Definamos as **funções de Dirac** $\delta_i \in \mathcal{F}(S; \mathbb{R})$, para $i = 1, \dots, n$, através de:

$$\delta_i(j) = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases} \quad (5.1.10)$$

Então $\mathcal{B} = \{\delta_i\}_{i=1, \dots, n}$ constituem uma base para $\mathcal{F}(\{1, 2, \dots, n\}; \mathbb{R})$. De facto:

[B1]. Se $\lambda^1 \delta_1 + \dots + \lambda^n \delta_n = \mathbf{0} \Rightarrow \lambda^1 \delta_1(j) + \dots + \lambda^n \delta_n(j) = \mathbf{0}(j) = 0, \forall j \in S$. Fazendo sucessivamente $j = 1, 2, \dots, n$ obtemos que $\lambda^1 = \lambda^2 = \dots = \lambda^n = 0$, isto é os δ_i 's são linearmente independentes.

[B2]. Seja f uma função em $\mathcal{F}(\{1, 2, \dots, n\}; \mathbb{R})$. É óbvio que:

$$f = \sum_{i=1}^n f(i) \delta_i$$

e portanto $\text{span}_{\mathbb{R}} \{\delta_i\} = \mathcal{F}(S; \mathbb{R})$, quando $S = \{1, 2, \dots, n\}$. As coordenadas de f relativas à base $\mathcal{B} = \{\delta_i\}$ são os escalares $f(i) \in \mathbb{R}, 1, \dots, n$.

Portanto $\dim_{\mathbb{R}} \mathcal{F}(S; \mathbb{R}) = n$, quando S tem n elementos.

► **Exemplo 5.5** ... No espaço $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$ das matrizes $m \times n$ com entradas em $\mathbb{K}$, o conjunto das mn **matrizes elementares** E_{ij} que têm um 1 na entrada (i, j) , isto é, na intersecção da linha i com a coluna j , e 0's em todas as outras entradas, formam uma base de $\mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K})$. Portanto $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{M}_{m,n}(\mathbb{K}) = mn$. ■.

5.2 Cálculos com coordenadas. Problemas

Nesta secção

$\mathcal{V}$ representa um espaço vectorial sobre um corpo $\mathbb{k}$, de dimensão finita, $\dim_{\mathbb{k}} \mathcal{V} = n$, e $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ uma base fixa para $\mathcal{V}$.

Usamos frequentemente a convenção de Einstein.

► **Problema 5.1** ... Dados m vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$, em $\mathcal{V}$, verificar se eles são ou não linearmente independentes.

Resolução ... Por definição de independência linear, a questão é saber se:

$$\sum_j \lambda^j \mathbf{v}_j = \lambda^1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda^m \mathbf{v}_m = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda^1 = \dots = \lambda^m = 0 \quad (5.2.1)$$

Representemos cada vector dado, na base $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{v}_j = v_j^i \mathbf{e}_i \quad j = 1, \dots, m \quad (5.2.2)$$

Então (5.2.1) escreve-se na forma:

$$\lambda^j \mathbf{v}_j = (\lambda^j v_j^i) \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_j v_j^i \lambda^j = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

As equações $\sum_j v_j^i \lambda^j = 0$, $i = 1, \dots, n$, constituem um sistema homogéneo de n equações lineares a m incógnitas $\lambda^1, \dots, \lambda^m$.

- Se este sistema admite uma única solução - a trivial, em que todos os λ^j são nulos - os vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$, são linearmente independentes
- Se este sistema admite outras soluções não triviais, os vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$ são linearmente dependentes.

■.

► **Problema 5.2** ... Dados m vectores $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m$, em $\mathcal{V}$, e um vector $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, verificar se:

$$\mathbf{v} \in \text{span}_{\mathbb{k}}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$$

Resolução ... Por definição de $\text{span}_{\mathbb{k}}\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m\}$, a questão é saber se existem escalares $\lambda^1, \dots, \lambda^m \in \mathbb{k}$, tais que:

$$\mathbf{v} = \lambda^1 \mathbf{v}_1 + \dots + \lambda^m \mathbf{v}_m = \sum_j \lambda^j \mathbf{v}_j \quad (5.2.3)$$

Representemos cada vector dado, na base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= v^i \mathbf{e}_i \\ \mathbf{v}_j &= v_j^i \mathbf{e}_i, \quad j = 1, \dots, m \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

Então (5.2.3) escreve-se na forma:

$$v^i \mathbf{e}_i = \lambda^j \mathbf{v}_j = (\lambda^j v_j^i) \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \quad \Leftrightarrow \quad v^i = \sum_j v_j^i \lambda^j, \quad i = 1, \dots, n$$

As equações $\sum_j v_j^i \lambda^j = v^i$, $i = 1, \dots, n$, constituem um sistema não homogêneo de n equações lineares a m incógnitas $\lambda^1, \dots, \lambda^m$. A questão resume-se agora em saber se este sistema admite solução.

■.

► **Problema 5.3** ... Sabendo que $\dim \mathcal{V} = n$, e dados n vectores $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$, em $\mathcal{V}$, verificar se eles formam uma base para $\mathcal{V}$.

Resolução ... Basta mostrar que $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_n$ são linearmente independentes, o que se reduz ao problema 5.1.

■.

► **Problema 5.4** ... Dados m vectores $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$, em $\mathcal{V}$, calcular uma base para:

$$\mathcal{S} = \text{span}_{\mathbb{K}}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$$

e calcular a dimensão $\dim_{\mathbb{K}} \mathcal{S}$.

Resolução ... Por definição, $\text{span}_{\mathbb{K}}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ consiste de todos os vectores $\mathbf{v}$ que são combinação linear dos vectores $\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m$:

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= \text{span}_{\mathbb{K}}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\} \\ &= \left\{ \mathbf{v} = \sum_j \lambda^j \mathbf{a}_j : \lambda^j \in \mathbb{K}, j = 1, \dots, m \right\} \end{aligned} \quad (5.2.5)$$

O problema consiste em encontrar vectores em $\mathcal{S}$ que sejam linearmente independentes e que gerem $\mathcal{S}$. A resolução baseia-se no lema seguinte, cuja demonstração é simples (exercício):

► **Lema 5.2** ... Com as notações anteriores, tem-se que, $\forall \lambda \neq 0$ e $j \neq k$:

$$\begin{aligned} [\text{OpEl1}]. \quad & \text{span}_{\mathbb{K}}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_m\} \\ &= \text{span}_{\mathbb{K}}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_m\} \\ [\text{OpEl2}]. \quad & \text{span}_{\mathbb{K}}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_m\} = \text{span}_{\mathbb{K}}\{\mathbf{a}_1, \dots, \lambda \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_m\} \\ [\text{OpEl3}]. \quad & \text{span}_{\mathbb{K}}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_m\} \\ &= \text{span}_{\mathbb{K}}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_j, \dots, \mathbf{a}_j + \lambda \mathbf{a}_k, \dots, \mathbf{a}_m\} \end{aligned} \quad (5.2.6)$$

■.

Representemos agora cada vector dado $\mathbf{a}_j$, $j = 1, \dots, m$, na base $\mathcal{B}$:

$$\mathbf{a}_j = \sum_i a_j^i \mathbf{e}_i \quad j = 1, \dots, m \quad (5.2.7)$$

e consideremos a matriz $A = [a_j^i]$, que é uma matriz $n \times m$, cujas colunas são as componentes de cada $\mathbf{a}_j$ na base $\mathcal{B}$. É mais tradicional (e natural, como veremos

adiante) tomar a matriz transposta $A^t = [a_i^j]$, que é agora uma matriz $m \times n$, cujas linhas são as componentes de cada $\mathbf{a}_j$ na base $\mathcal{B}$:

$$A^t = \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \cdots & a_1^n \\ a_2^1 & a_2^2 & \cdots & a_2^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_m^1 & a_m^2 & \cdots & a_m^n \end{pmatrix}$$

As operações referidas no lema 5.2, traduzem-se nas seguintes **operações elementares** sobre as linhas de A^t :

- [OpEl1]. $\longrightarrow$ permutar as linhas j e k
- [OpEl2]. $\longrightarrow$ substituir a linha j pela linha que se obtem multiplicando-a por um escalar não nulo λ
- [OpEl3]. $\longrightarrow$ substituir a linha k pela linha que se obtem adicionando-lhe a linha j multiplicada por um escalar não nulo λ

(5.2.8)

O lema afirma que $\text{span}_{\mathbb{K}}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$ se mantem inalterado por estas operações elementares. Resta então reduzir a matriz A^t à forma escalonada, usando as operações elementares referidas, para daí deduzir uma base para $\text{span}_{\mathbb{K}}\{\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_m\}$. Vejamos um exemplo concreto:

► **Exemplo 5.6** ... Em $\mathbb{R}_3[X]$ calcular uma base para:

$$\text{span}_{\mathbb{R}}\{1 + X - X^3, X - X^2, 1 + X^2 - X^3\}$$

Os cálculos vão efectuar-se usando a base $\mathcal{B} = \{1, X, X^2, X^3\}$ para $\mathbb{R}_3[X]$. A matriz A^t é portanto:

$$A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

que se reduz à forma escalonada, através das operações elementares seguintes:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} &\xrightarrow{[\text{OpEl1}]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{[\text{OpEl2}]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{[\text{OpEl3}]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{[\text{OpEl3}]} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Portanto $\{1 + X - X^3, X - X^2\}$ é uma base para $\mathcal{S}$ que tem por isso dimensão 2.

■.

5.3 Mudanças de base e de coordenadas

Suponhamos que $\mathcal{V}$ é um espaço vectorial e que:

$$\mathcal{C} = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n)$$

é uma base qualquer, escrita como um vector-linha com entradas vectoriais $\mathbf{e}_i$. Se $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ é um vector qualquer em $\mathcal{V}$, designemos por v^i as suas componentes na base $\mathcal{C}$, isto é:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_i v^i \mathbf{e}_i \\ &= (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \\ &= {}_{\mathcal{C}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} \end{aligned} \quad (5.3.1)$$

Suponhamos agora que mudamos para uma outra base:

$$\mathcal{C} \longrightarrow \widehat{\mathcal{C}} = (\widehat{\mathbf{e}}_1 \quad \widehat{\mathbf{e}}_2 \quad \cdots \quad \widehat{\mathbf{e}}_n) \quad (5.3.2)$$

Dado um vector arbitrário $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, como se relacionam as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $\widehat{\mathcal{C}}$ com as coordenadas de $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{C}$?

Mais detalhadamente, dado $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, podemos escrever $\mathbf{v}$ como combinação linear dos elementos da base $\mathcal{C}$ e também como combinação linear dos elementos da base $\widehat{\mathcal{C}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_i \\ &= \sum_{j=1}^n \widehat{v}^j \widehat{\mathbf{e}}_j \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Isto significa que o vector-coluna das coordenadas de $\mathbf{v}$, relativamente à base $\mathcal{C}$, é:

$$\begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix}_{\mathcal{C}} = (v^i)_{\mathcal{C}}$$

enquanto que o vector-coluna das coordenadas de $\mathbf{v}$, relativamente à base $\widehat{\mathcal{C}}$, é:

$$\begin{pmatrix} \widehat{v}^1 \\ \widehat{v}^2 \\ \vdots \\ \widehat{v}^n \end{pmatrix}_{\widehat{\mathcal{C}}} = (\widehat{v}^i)_{\widehat{\mathcal{C}}}$$

A questão é pois: **como se relacionam as coordenadas $\hat{v}^i$ com as coordenadas v^i ?**

Para responder a esta questão, comecemos por escrever **cada elemento da base $\hat{\mathcal{C}}$, como combinação linear dos vectores da base $\mathcal{C}$** , isto é, para cada $j = 1, 2, \dots, n$ fixo põmos:

$$\hat{\mathbf{e}}_j = \sum_{i=1}^n P_j^i \mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i P_j^i \quad (5.3.4)$$

que escrevemos na forma matricial seguinte:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \cdots & \hat{\mathbf{e}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^1 & P_2^1 & \cdots & P_n^1 \\ P_1^2 & P_2^2 & \cdots & P_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_1^n & P_2^n & \cdots & P_n^n \end{pmatrix} \quad (5.3.5)$$

ou muito simplesmente:

$$\hat{\mathcal{C}} = \mathcal{C}P$$

Recordando que $\hat{v}^i$ são as componentes do vector $\mathbf{v}$ na base $\hat{\mathcal{C}}$, e que v^j são as componentes do mesmo vector $\mathbf{v}$ na base $\mathcal{C}$ isto é:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_i \hat{v}^i \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= \hat{\mathcal{C}}[\mathbf{v}]_{\hat{\mathcal{C}}} \end{aligned} \quad (5.3.6)$$

vem então que:

$$\mathcal{C}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{v} = \hat{\mathcal{C}}[\mathbf{v}]_{\hat{\mathcal{C}}} = \mathcal{C}P[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}P}$$

o que implica que, uma vez que $\mathbf{v}$ é arbitrário:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = P[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}P}$$

Multiplicando à esquerda por P^{-1} , conclui-se então que:

$$\boxed{\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}P \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}P} = P^{-1}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}} \quad (5.3.7)$$

Podemos também fazer os cálculos com a notação de Einstein:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \hat{v}^j \hat{\mathbf{e}}_j \\ &= \hat{v}^j (P_j^i \mathbf{e}_i) && \text{por (5.3.4)} \\ &= (P_j^i v^j) \mathbf{e}_i \end{aligned} \quad (5.3.8)$$

Como, por outro lado:

$$\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$$

comparando com (5.3.8), concluímos que:

$$\hat{v}^i = (P^{-1})_j^i v^j \quad (5.3.9)$$

o que confirma o que tínhamos obtido.

A matriz $P = [P_j^i]$, calculada através de (5.3.4), diz-se a **matriz de passagem da base $\mathcal{C}$ para a base $\hat{\mathcal{C}}$** . Esta mesma matriz permite passar **das coordenadas v^i para as coordenadas $\hat{v}^i$** :

Nota... A afirmação (5.3.7) diz-nos que um vector $\mathbf{v}$ é um **objecto contravariante**. Por outras palavras, um vector $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, pode ser definido como sendo uma classe de equivalência de pares $(\mathcal{C}, (v^i))$, onde dois desses pares são considerados equivalentes:

$$(\mathcal{C}, (v^i)) \sim (\widehat{\mathcal{C}}, (\widehat{v}^i))$$

se e só se existe uma matriz $P = (P_j^i)$ inversível tal que:

$$\widehat{\mathcal{C}} = \mathcal{C} P \quad e \quad \widehat{v}^i = (P^{-1})^i_k v^k$$

■.

5.4 Exercícios

► **Exercício 5.1** ... Verifique se os vectores que se seguem são linearmente dependentes ou independentes:

- a) $(1, 1, 1), (0, 1, -2)$ em $\mathbb{R}^3$;
- b) $(1, 1, 0), (0, 1, -1)$ e $(1, 3, -2)$ em $\mathbb{R}^3$;
- c) $(1, 0), (2, -1)$ em $\mathbb{R}^2$;
- d) $(1, 1), (2, 2)$ em $\mathbb{R}^2$;
- e) $(-1, 1, 0), (0, 1, 2)$ em $\mathbb{R}^3$;
- f) $(\pi, 0), (0, 1)$ em $\mathbb{R}^2$;
- g) $(1, 2), (2, 3), (1, 1)$ em $\mathbb{R}^2$;
- h) $(0, 1, 1), (0, 2, 1), (1, 5, 3)$ em $\mathbb{R}^3$;
- i) $\{(1, i), (i, -1)\}$ em $\mathbb{C}^2$;
- j) $\{(1, i, 0), (i + 1, -1 + i, 0), (0, 0, 1)\}$ em $\mathbb{C}^3$;

► **Exercício 5.2** ... Considere o espaço vectorial real E das funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ representadas por $f(x)$.

Verifique se as seguintes funções são linearmente independentes em E :

- a) $f(x) = 1, f(x) = x$ b) $f(x) = x, f(x) = x^2$ c) $f(x) = 2, f(x) = x,$
 $f(x) = 1 + 3x$ d) $f(x) = xe^x, f(x) = e^{2x}$ e) $f(x) = \sin x, f(x) = \cos x$
 j) $f(x) = \sin^2 x, f(x) = \cos^2 x, f(x) = 3$ l) $f(x) = \sin^2 x, f(x) = \cos^2 x,$
 $f(x) = \cos 2x.$

► **Exercício 5.3** ... Diga se os seguintes subconjuntos de $\mathbb{R}(X)$ são livres ou ligados:

- a) $\{1 + X + X^2, 1 + X, 2 - X\}$;
- b) $\{1 - X - X^2, 1 + 2X + X^2, 4\}$;
- c) $\{1 + X + X^2, 1 + X, 2 + 2X + X^2\}.$

► **Exercício 5.4** ... No espaço dos polinómios $\mathcal{V} = \mathbb{R}_2[X]$, considere $\mathcal{B} = \{1, X, X^2\}$ e $\widehat{\mathcal{B}} = \{1 - X^2, 1 - X, 1 + X + 3X^2\}.$

(i). Mostre que $\mathcal{B}$ e $\widehat{\mathcal{B}}$ são ambas bases de $\mathcal{V}$.

(ii). Calcule a matriz de passagem da base $\widehat{\mathcal{B}}$ para a base $\mathcal{B}$.

(iii). Calcule as coordenadas de $p(X) = 2 - X$ relativamente a cada uma das bases referidas.

► **Exercício 5.5** ... Sejam $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ três vectores linearmente independentes de um espaço vectorial $\mathcal{V}$. Mostre que $\mathbf{u} + \mathbf{v}$, $\mathbf{u} - \mathbf{v}$ e $\mathbf{u} - 2\mathbf{v} + \mathbf{w}$ também são linearmente independentes.

► **Exercício 5.6** ... Seja E um espaço vectorial real.

a) Mostre que se $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ são tais que $\mathbf{w} = 2\mathbf{u} + \mathbf{v}$ então, $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são linearmente dependentes.

b) Mostre que se $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n \in E$ são tais que $\mathbf{u}_n$ é combinação linear de $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1}$, então $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_{n-1}, \mathbf{u}_n$ são linearmente dependentes.

c) Dê um exemplo para $E = \mathbb{R}^2$ de dois vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ linearmente dependentes, tais que $\mathbf{v}$ não seja múltiplo de $\mathbf{u}$.

► **Exercício 5.7** ... Em cada um dos casos, calcule o subespaço gerado por A :

- a) $A = \{(1, 1), (2, 2)\}$ em $\mathbb{R}^2$;
- b) $A = \{(1, 0), (5, 0)\}$ em $\mathbb{R}^2$;
- c) $A = \{(2, -1), (1, 0)\}$ em $\mathbb{R}^2$;
- d) $A = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ em $\mathbb{R}^3$;
- e) $A = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ em $\mathbb{R}^3$;
- f) $A = \{(3, 0, 0), (0, 2, 0)\}$ em $\mathbb{R}^3$;
- g) $A = \{1 + X, X^2\}$ em $\mathbb{R}(X)$;
- h) $A = \{1 - X, X^2, 1 - X + X^2\}$ em $\mathbb{R}(X)$;
- i) $A = \{1, 1 + X, 2X + X^2\}$ em $\mathbb{R}(X)$;
- j) $A = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ em $M_{2,2}(\mathbb{R})$;
- l) $A = \{(1, 0, i), (0, i, i)\}$ em $\mathbb{C}^2$.

► **Exercício 5.8** ... Verifique se os conjuntos que se seguem, são ou não bases de cada um dos espaços vectoriais indicados em cada alínea:

- a) $\{(1, 1), (3, 1)\}$ em $\mathbb{R}^2$;
- b) $\{(0, 1), (0, -3)\}$ em $\mathbb{R}^2$;
- c) $\{(2, 1), (1, -1), (0, 2)\}$ em $\mathbb{R}^2$;
- d) $\{(1, 1, 1), (1, -1, 5)\}$ em $\mathbb{R}^3$;
- e) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$ em $\mathbb{R}^3$;
- f) $\{(1, 2, 3), (1, 0, -1), (3, -1, 0), (2, 1, -2)\}$ em $\mathbb{R}^3$;
- g) $\{(1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4)\}$ em $\mathbb{R}^3$;
- h) $\{1 + X, X^2, 2 + 2X + 3X^2\}$ em $\mathbb{R}_2(X)$;
- i) $\{1 + X, X^2, 3\}$ em $\mathbb{R}_2(X)$;
- j) $\{1 + X, X^2, 2 + 2X + 3X^2, X^3\}$ em $\mathbb{R}_2(X)$;
- l) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \right\}$ em $M_{2,2}(\mathbb{R})$.

► **Exercício 5.9** ... Seja W o subespaço de $\mathbb{R}(X)$ gerado por $X^3 - 2X^2 + 4X + 1$, $2X^3 - 3X^2 + 9X - 1$, $X^3 + 6X - 5$, $2X^3 - 5X^2 + 7X + 5$. Determine uma base e a dimensão de W .

► **Exercício 5.10** ... Determine a dimensão do subespaço gerado por:

a) $(1, -2, 3, -1)$, $(1, 1, -2, 3)$;

b) $(3, -6, 3, -9)$, $(-2, 4, -2, 6)$;

c) $X^3 + 2X^2 + 3X + 1$, $2X^3 + 4X^2 + 6X + 2$;

d) $X^3 - 2X^2 + 5$, $X^2 + 3X - 4$;

e) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$;

f) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$.

► **Exercício 5.11** ... Calcule uma base de cada um dos subespaços que se seguem, e depois as coordenadas do vector u em cada uma das bases:

a) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$, $u = (3, -3)$;

b) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x = -y\}$, $u = (4, -8)$;

c) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, $u = (1, 1, -2)$;

d) $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = z\}$, $u = (3, 2, 4)$;

e) $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y = 0, z + t = 0\}$, $u = (1, 1, -2, 2)$;

f) $S = \{a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3(X) : a + 2c = 0\}$, $u = 2 + 2X - X^2 + 3X^3$;

g) $S = \{a + bX + cX^2 + dX^3 \in \mathbb{R}_3(X) : a + 2c = 0, a + c + d = 0\}$, $u = 2 + 2X - X^2 - X^3$;

h) $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} \in M_{2,3}(\mathbb{R}) : a + b + c = 0, a + d = e, f = e = c \right\}$, $u = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -3 & -2 & -2 \end{pmatrix}$;

i) $S = \{(z, w, t) \in \mathbb{C}^3 : z = w = t\}$, $u = (1 + i, 1 + i, 1 + i)$.

► **Exercício 5.12** ... Sejam V e W os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^4$:

$$V = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : y - 2z + t = 0\} \text{ e } W = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x = t, y = 2z\}$$

Determine uma base e a dimensão de: a) V b) W c) $V \cap W$.

► **Exercício 5.13** ... Sabendo que f é uma aplicação linear, calcule em cada caso a imagem de um vector genérico:

a) Sendo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $f(1, 0) = (1, 1)$ e $f(0, 1) = (1, -2)$;

b) Sendo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $f(1, -1) = (1, 2)$ e $f(0, 3) = (2, -2)$;

c) Sendo $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $f(2, 1) = (-1, 0)$ e $f(-1, 1) = (3, -2)$;

d) Sendo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $f(1, 0, 1) = (1, 1)$ e $f(0, 1, 0) = (1, -2)$ e $f(0, 0, 2) = (4, 5)$;

e) Sendo $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e $f(1, 0, 1) = (1, 1, 0)$ e $f(0, 1, 0) = (0, -2, 3)$ e $f(0, 0, 2) = (1, 4, 5)$;

f) Sendo $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_1(X)$ e $f(1, 0, 1) = 1$ e $f(0, 1, 0) = 1 + X$ e $f(0, 0, 2) = X$;
 g) Sendo $f : \mathbb{R}_2(X) \longrightarrow \mathbb{R}_2(X)$ e $f(1 + 2X) = X^2$ e $f(2) = 1 + X$ e $f(3X^2) = X$;

h) Sendo $f : \mathbb{R}_2(X) \longrightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$ e $f(2 + X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ e $f(1 - X) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ e $f(3X^2) = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$;

► **Exercício 5.14** ... Mostre que não é possível definir nenhuma das seguintes aplicações lineares:

- a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ tal que, $\ker(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3y\}$ e f é sobrejectiva;
- b) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ sendo f injectiva e não o sobrejectiva;
- c) $f : \mathbb{R}_4(X) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $\ker(f) = \text{span}\{2 + X, 3 + X^4\}$ e $\text{im}(f) = \text{span}\{(1, 1, 1), (1, -1, 0)\}$;
- d) $f : \mathbb{C}^2 \longrightarrow \mathbb{C}^3$ tal que f é injectiva e sobrejectiva.

► **Exercício 5.15** ... Calcule as seguintes matrizes de passagem:

- a) De $\mathcal{B} = \{(1, 2), (0, -1)\}$ para $\widehat{\mathcal{B}} = \{(2, 1), (1, 1)\}$;
- b) De $\mathcal{B} = \{(1, 1), (0, 1)\}$ para $\widehat{\mathcal{B}} = \{(2, 1), (1, 1)\}$;
- d) De $\mathcal{B} = \{(1 + X, 1 + X^2, 1 + X + X^2)\}$ para $\widehat{\mathcal{B}} = \{1, X, X^2\}$;
- e) De $\mathcal{B} = \{(1, 1 + X^2, 1 + X + X^2)\}$ para $\widehat{\mathcal{B}} = \{1, 1 - X, 3X^2\}$;
- f) De $\mathcal{B} = \{(1, 0, 0), (0, -i, 1), (0, 0, i)\}$ para $\widehat{\mathcal{B}} = \{(i, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 0, 1)\}$;

► **Exercício 5.16** ... Em cada um dos casos, determine uma base ortonormalizada do subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos seguintes vectores:

- a) $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{x}_2 = (1, 0, 1), \quad \mathbf{x}_3 = (3, 2, 3).$
- b) $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 1), \quad \mathbf{x}_2 = (-1, 1, -1), \quad \mathbf{x}_3 = (1, 0, 1).$

► **Exercício 5.17** ... Em cada um dos casos, determine uma base ortonormalizada do subespaço de $\mathbb{R}^4$ gerado pelos seguintes vectores:

- a) $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (0, 1, 1, 0), \quad \mathbf{x}_3 = (0, 0, 1, 1), \quad \mathbf{x}_4 = (1, 0, 0, 1).$
- b) $\mathbf{x}_1 = (1, 1, 0, 1), \quad \mathbf{x}_2 = (1, 0, 2, 1), \quad \mathbf{x}_3 = (1, 2, -2, 1).$

► **Exercício 5.18** ... No espaço vectorial real $\mathbb{R}(t)$, com o produto interno $\langle x, y \rangle = \int_0^1 x(t)y(t) dt$, mostre que as funções que se seguem formam uma base ortonormalizada do subespaço por elas gerado:

$$y_1(t) = 1, \quad y_2(t) = \sqrt{3}(2t - 1), \quad y_3(t) = \sqrt{5}(6t^2 - 6t + 1).$$

► **Exercício 5.19** ... Seja S um subespaço de um espaço vectorial V . Mostre que o $S^\perp$ é o conjunto dos vectores ortogonais a todos os vectores de uma base de S .

► **Exercício 5.20** ... Seja W o subespaço de $\mathbb{R}^5$ gerado pelos vectores $\mathbf{u} = (1, 2, 3, -1, 2)$ e $\mathbf{v} = (2, 4, 7, 2, -1)$. Determine uma base do complemento ortogonal $W^\perp$ de W .

► **Exercício 5.21** ... Determine uma base do subespaço W de $\mathbb{R}^4$ ortogonal a $\mathbf{u}_1 = (1, -2, 3, 4)$ e $\mathbf{u}_2 = (3, -5, 7, 8)$.

► **Exercício 5.22** ... Considere o espaço vectorial real $\mathbb{R}_2(t)$ no qual está definido o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt$.

a) Determine uma base do subespaço W ortogonal a $h(t) = 2t + 1$.

b) Aplique o método de ortogonalização de Gram-Schmidt à base $(1, t, t^2)$ para obter uma base ortonormal $(u_1(t), u_2(t), u_3(t))$ de $\mathbb{R}_2(X)$.

► **Exercício 5.23** ... Seja V o espaço linear das matrizes 2×2 de componentes reais, com as operações usuais. Prove que fica definido um produto interno em V por:

$$\langle A, B \rangle = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22} \text{ onde } A = (a_{ij}) \text{ e } B = (b_{ij}).$$

Calcule a matriz da forma $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$, com $a, b \in \mathbb{R}$, mais próxima da matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

► **Exercício 5.24** ... Considere o subespaço S de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $(1, 0, 0)$ e $(0, 1, 0)$.

a) Verifique que fica definido em $\mathbb{R}^3$ um produto interno por:

$$\langle x, y \rangle = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_3y_3, \text{ onde } x = (x_1, x_2, x_3) \text{ e } y = (y_1, y_2, y_3).$$

b) Determine uma base ortonormal para o subespaço S , com este produto interno.

c) Determine o elemento de S mais próximo do ponto $(0, 0, 1)$, usando o produto interno de a).

d) Calcule um vector diferente de zero e ortogonal a S usando o produto interno de a).

► **Exercício 5.25** ... No espaço vectorial real das funções contínuas definidas em $(0, 2)$, com o produto interno $\langle f, g \rangle = \int_0^2 f(x)g(x) dx$, seja $f(x) = \exp(x)$. Mostre que, o polinómio constante g , mais próximo de f é $g = \frac{1}{2}(\exp(2) - 1)$. Calcule $\|g - f\|^2$.

► **Exercício 5.26** ... Usando os produtos internos usuais em $\mathbb{R}^2$ e $\mathbb{R}^3$, calcule em cada caso a projecção ortogonal $\mathbf{P}_{\mathbf{u}}(\mathbf{v})$, de $\mathbf{v}$ sobre a recta gerada por $\mathbf{u}$:

a) $\mathbf{u} = (1, 1)$, $\mathbf{v} = (2, 3)$;

b) $\mathbf{u} = (4, 3)$, $\mathbf{v} = (0, 1)$;

c) $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{v} = (1, -1, 0)$;

d) $\mathbf{u} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{v} = (0, 1, 2)$.

► **Exercício 5.27** ... Determine as projecções ortogonais seguintes:

b) $\mathbf{v} = 2t - 1$, $\mathbf{w} = t^2$ sobre $\mathbb{R}_1(t)$ usando o produto interno L^2 .