

Módulo 6

ALGA I. Representação matricial das aplicações lineares

Contents

6.1	Matriz de uma aplicação linear	76
6.2	Cálculo do núcleo e imagem	77
6.3	Matriz da composta	78
6.4	$GL(n)$. Pontos de vista passivo e activo.	79
6.5	Determinantes	79
6.5.1	Definição e propriedades	79
6.5.2	Determinante de um produto	82
6.5.3	Cálculo da matriz inversa. Matriz adjunta	83
6.6	Regra de Cramer	85
6.7	Exercícios	85

6.1 Matriz de uma aplicação linear

Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois espaços vectoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{k}$ ($= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, como habitualmente), e de dimensões finitas, respectivamente iguais a $n = \dim_{\mathbb{k}} \mathcal{V}$ e $m = \dim_{\mathbb{k}} \mathcal{W}$.

Consideremos uma aplicação linear $\mathbf{L} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$. Vamos aprender nesta secção a representar $\mathbf{L}$ através de uma matriz $m \times n$ com entradas em $\mathbb{k}$.

Para isso começemos por fixar bases $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ para $\mathcal{V}$, e $\mathcal{C} = \{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_m\}$ para $\mathcal{W}$. Temos então isomorfismos $\Phi_{\mathcal{B}} : \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{k}^n$ e $\Phi_{\mathcal{C}} : \mathcal{W} \rightarrow \mathbb{k}^m$, definidos respectivamente por:

$$\begin{aligned}\Phi_{\mathcal{B}} : \mathbf{v} = \sum_{i=1}^n v^i \mathbf{e}_i &\longmapsto [v^i] \in \mathbb{k}^n \\ \Phi_{\mathcal{C}} : \mathbf{w} = \sum_{j=1}^m w^j \mathbf{f}_j &\longmapsto [w^j] \in \mathbb{k}^m\end{aligned}\tag{6.1.1}$$

Consideremos agora o diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{V} & \xrightarrow{\mathbf{L}} & \mathcal{W} \\ \Phi_B \downarrow & & \downarrow \Phi_C \\ \mathbb{K}^n & \longrightarrow & \mathbb{K}^m \end{array}$$

ou mais detalhadamente, usando a convenção de Einstein:

$$\begin{array}{ccc} v^i \mathbf{e}_i & \longrightarrow & \mathbf{L}(v^i \mathbf{e}_i) \stackrel{a}{=} v^i \mathbf{L}(\mathbf{e}_i) \stackrel{b}{=} v^i L_i^j \mathbf{f}_j \stackrel{c}{=} (L_i^j v^i) \mathbf{f}_j \\ \downarrow & & \downarrow \\ [v^i] & \longrightarrow & [w^j] = [L_i^j v^i] \end{array}$$

A igualdade (a) resulta do facto de $\mathbf{L}$ ser linear. A igualdade (b) obtém-se exprimindo, para cada $i = 1, \dots, n$, a imagem $\mathbf{L}(\mathbf{e}_i)$, de $\mathbf{e}_i$ por $\mathbf{L}$, como combinação linear dos elementos da base $\mathbf{f}_j$ para $\mathcal{W}$:

$$\mathbf{L}(\mathbf{e}_i) = \sum_{j=1}^m L_i^j \mathbf{f}_j, \quad i = 1, \dots, n$$

Este é o passo essencial do cálculo. Os elementos L_i^j , que assim se obtêm, formam uma matriz $L = [L_i^j]$, que é uma matriz $m \times n$, e que se diz a **matriz da aplicação linear $\mathbf{L}$** , relativamente às bases $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{f}_j\}$, respectivamente para $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$. Esta matriz L nota-se às vezes por $M(\mathbf{L})_{BC}$ ou por ${}_B M(\mathbf{L})_C$.

6.2 Cálculo do núcleo e imagem

Sejam $\mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ dois espaços vectoriais sobre o mesmo corpo $\mathbb{K}$, e de dimensões finitas, respectivamente iguais a $n = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{V}$ e $m = \dim_{\mathbb{K}} \mathcal{W}$, e consideremos uma aplicação linear $\mathbf{L} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$. Seja $L = [L_i^j]$ a matriz da aplicação linear $\mathbf{L}$, relativamente às bases $\{\mathbf{e}_i\}$ e $\{\mathbf{f}_j\}$, obtida através de (6.1).

• Como calcular $\ker \mathbf{L}$? ...

Por definição, $\ker \mathbf{L}$ é o subespaço de $\mathcal{V}$ constituído por todos os vectores $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ que são enviados por $\mathbf{L}$ no vector nulo de $\mathcal{W}$.

Se $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i$, então $\mathbf{L}(\mathbf{v}) = (L_i^j v^i) \mathbf{f}_j = \mathbf{0}$ sse:

$$\sum_{i=1}^n L_i^j v^i = 0, \quad j = 1, \dots, m$$

Este é um sistema homogéneo de m equações lineares com n incógnitas v^i , cuja resolução permite calcular os v^i tais que $\mathbf{v} = v^i \mathbf{e}_i \in \ker \mathbf{L}$.

• Como calcular $\text{im } \mathbf{L}$? ...

Por definição, $\text{im } \mathbf{L}$ é o subespaço de $\mathcal{W}$ gerado por $\mathbf{L}(\mathbf{e}_i)$, $i = 1, \dots, n = \dim \mathcal{V}$:

$$\text{im } \mathbf{L} = \text{span}_{\mathbb{K}} \{\mathbf{L}(\mathbf{e}_1), \dots, \mathbf{L}(\mathbf{e}_n)\}$$

Podemos pois aplicar o método explicado no problema 5.4 para calcular uma base para $\text{im } \mathbf{L}$.

A **característica** ou **rank** da aplicação linear $\mathbf{L}$, nota-se por $\text{rank } \mathbf{L}$ e define-se por:

$$\text{rank } \mathbf{L} = \dim(\text{im } \mathbf{L}) \quad (6.2.1)$$

6.3 Matriz da composta

Suponhamos que temos aplicações lineares $\mathbf{M} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{V}$ e $\mathbf{L} : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{W}$, onde $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$ são espaços vectoriais de dimensão finita, com bases $\mathcal{B} = \{\mathbf{e}_i\}_{i=1,\dots,n}$, $\mathcal{C} = \{\mathbf{f}_j\}_{j=1,\dots,m}$ e $\mathcal{D} = \{\mathbf{g}_k\}_{k=1,\dots,p}$, respectivamente para $\mathcal{U}, \mathcal{V}$ e $\mathcal{W}$.

Suponhamos que $M(\mathbf{M})_{\mathcal{B}\mathcal{C}} = M$ e que $M(\mathbf{L})_{\mathcal{C}\mathcal{D}} = L$. O nosso objectivo é calcular a matriz da composta $\mathbf{L} \circ \mathbf{M} : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{W}$, relativamente às bases $\mathcal{B}$ e $\mathcal{D}$, respectivamente para $\mathcal{U}$ e $\mathcal{W}$, em termos das matrizes M e L .

O diagrama seguinte esclarece a situação:

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{U} & \xrightarrow{\mathbf{M}} & \mathcal{V} & \xrightarrow{\mathbf{L}} & \mathcal{W} \\ \Phi_{\mathcal{B}} \downarrow & & \downarrow \Phi_{\mathcal{C}} & & \downarrow \Phi_{\mathcal{D}} \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{M} & \mathbb{K}^m & \xrightarrow{L} & \mathbb{K}^p \\ \cong \downarrow & & & & \downarrow \cong \\ \mathbb{K}^n & \xrightarrow{LM} & & & \mathbb{K}^p \end{array}$$

Cálculos...

$$(\mathbf{L} \circ \mathbf{M})(\mathbf{e}_i) = A_i^k \mathbf{g}_k \quad (6.3.1)$$

por outro lado:

$$\begin{aligned} (\mathbf{L} \circ \mathbf{M})(\mathbf{e}_i) &= \mathbf{L}(\mathbf{M}(\mathbf{e}_i)) \\ &= \mathbf{L}(M_i^j \mathbf{f}_j) \\ &= M_i^j \mathbf{L}(\mathbf{f}_j) \\ &= M_i^j L_j^k \mathbf{g}_k \\ &= (L_j^k M_i^j) \mathbf{g}_k \\ &= (LM)_i^k \mathbf{g}_k \end{aligned} \quad (6.3.2)$$

donde se deduz que $A = LM$, isto é, a representação matricial de $\mathbf{L} \circ \mathbf{M}$ é dada pelo **produto** LM **das matrizes** L **por** M , que se define da seguinte forma - a entrada (k, i) da matriz LM (linha k e coluna i), é dada por:

$$(LM)_i^k = \sum_{j=1}^m L_j^k M_i^j \quad (6.3.3)$$

Esquemáticamente:

$$\begin{aligned}
 (LM)_i^k &= \underbrace{\begin{matrix} L_1^k & L_2^k & \cdots & L_m^k \end{matrix}}_{\text{linha } k} \left\{ \begin{matrix} M_i^1 \\ M_i^2 \\ \vdots \\ M_i^m \end{matrix} \right\} \text{ coluna } i \\
 &= L_1^k M_i^1 + L_2^k M_i^2 + \cdots + L_m^k M_i^m \\
 &= \sum_{j=1}^m L_j^k M_i^j
 \end{aligned} \tag{6.3.4}$$

6.4 GL(n). Pontos de vista passivo e activo.

Seja $\mathcal{V}$ um espaço vectorial de dimensão $n = \dim \mathcal{V}$. O conjunto de todas as aplicações lineares $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ que são inversíveis, isto é, o conjunto de todos os automorfismos de $\mathcal{V}$, constitui um grupo que se diz o **grupo linear geral** de $\mathcal{V}$. Este grupo é isomorfo ao grupo de todas as matrizes $(n \times n)$ inversíveis, e nota-se por:

$$GL(n)$$

Em Física, é usual encarar um automorfismo linear $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ sob dois pontos de vista diferentes: o ponto de vista **passivo** e o ponto de vista **activo**.

- No ponto de vista **passivo**, um mesmo “estado de um sistema”, isto é, um vector $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, é descrito por dois “observadores” diferentes, i.e., relativamente a duas bases (ou referenciais) $\mathcal{C}$ e $\hat{\mathcal{C}}$. Neste caso, $P \in GL(n)$ é a matriz de passagem da base $\mathcal{C}$ para a base $\hat{\mathcal{C}}$:

$$\mathcal{C}P = \hat{\mathcal{C}}$$

e, como vimos atrás, P^{-1} permite passar das coordenadas v^i para as coordenadas $\hat{v}^i$:

$$[\mathbf{v}]_{\hat{\mathcal{C}}} = [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}P = P^{-1}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$$

como vimos atrás.

- Por outro lado, no ponto de vista **activo**, existe um único “observador” $\mathcal{C}$, enquanto que o “estado do sistema”, $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$, é submetido a uma transformação, como por exemplo uma “simetria” do “espaço de estados” do sistema. Neste caso $P \in GL(n)$, é a matriz dessa transformação relativamente à base $\mathcal{C}$.

6.5 Determinantes

Comece por recordar a definição e as propriedades do determinante de matrizes 2×2 e matrizes 3×3 que vimos nos módulos 1 e 2, respectivamente.

6.5.1 Definição e propriedades

► **Teorema 6.1** *Existe uma única aplicação:*

$$\begin{aligned}
 \det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow \mathbb{K} \\
 A &\longmapsto \det A = \det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n)
 \end{aligned} \tag{6.5.1}$$

onde $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n$ representam as colunas de A , com as seguintes propriedades:

1. é linear como função de cada uma das colunas $\mathbf{A}_i$ da matriz A .
2. se A' se obtém a partir de A permutando duas colunas, então $\det A' = -\det A$
3. $\det \mathbf{I}_n = 1$

■

Antes de demonstrar este teorema, vejamos um corolário que tem uma importância prática muito grande no cálculo de determinantes:

► **Corolário 6.1** *Seja $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ uma aplicação que verifica as propriedades 1. e 2. do teorema anterior. Então:*

4. se A tem duas colunas linearmente dependentes, $\det A = 0$
5. se A' se obtém a partir de A multiplicando uma coluna por $\lambda \in \mathbb{K}$, $\det A' = \lambda \det A$
6. se A' se obtém a partir de A substituindo uma coluna pela que se obtém somando-lhe um múltiplo escalar de uma outra, então $\det A' = \det A$

► **Exercício 6.1** *demonstre este corolário.*

Demonstração do teorema ...

Unicidade:

Suponhamos que tínhamos duas funções, $\det : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ e $\det' : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$, ambas verificando as três propriedades referidas no teorema, e seja

$$\Delta = \det - \det'$$

Então $\Delta(\mathbf{I}_n) = 0$ e Δ verifica as duas primeiras propriedades - linearidade em cada coluna e alternância de sinal quando se permutam duas colunas.

Consideremos agora uma matriz arbitrária $A = (\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n)$. Se $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ é a base canónica de $\mathbb{K}^n$, podemos escrever cada $\mathbf{A}_i$ como combinação linear:

$$\mathbf{A}_i = A_i^j \mathbf{e}_j, \quad i = 1, \dots, n$$

usando como sempre a convenção de Einstein. Usando a linearidade em cada coluna e o facto de que $\Delta(\mathbf{I}_n) = \Delta(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 0$, é agora fácil ver que:

$$\Delta(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n) = 0$$

e portanto $\det = \det'$.

Existência:

Indução sobre n :

- para $n = 1$ põe-se $\det(a) = a$

- supondo que existe um $\det$ definido para matrizes $A \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$, e que verifica as três propriedades referidas no teorema, vamos mostrar como se define para matrizes $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ mantendo, é claro, ainda as referidas três propriedades.

Dada uma matriz $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, representemos por $A_{ij} \in \mathcal{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ a matriz que se obtém de A eliminando a linha i e a coluna j .

Definamos então:

$$\det A = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} A_i^1 \cdot \det A_{1i} \quad (6.5.2)$$

o que corresponde ao chamado “desenvolvimento do determinante segundo a primeira linha”.

Pretende-se mostrar agora que esta função satisfaz as três propriedades referidas no teorema.

[1]. Vejamos um exemplo que esclarece o que está a acontecer:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a+a' & d & g \\ b+b' & e & h \\ c+c' & f & k \end{pmatrix} \\ = (a+a') \cdot \det \begin{pmatrix} e & h \\ f & k \end{pmatrix} - d \cdot \det \begin{pmatrix} b+b' & h \\ c+c' & k \end{pmatrix} + g \cdot \det \begin{pmatrix} b+b' & e \\ c+c' & f \end{pmatrix} \end{aligned}$$

A primeira parcela é obviamente linear, enquanto que as duas últimas o são, por hipótese de indução.

Em geral, o argumento é o mesmo - a linearidade em cada coluna de A resulta do facto de que cada parcela da soma em (6.5.2), $(-1)^{i+1} A_i^1 \cdot \det A_{1i}$, tem essa propriedade. De facto, a linearidade na coluna k , resulta do facto de que as parcelas $(-1)^{i+1} A_i^1 \cdot \det A_{1i}$, com $i \neq k$, são lineares por hipótese de indução, enquanto que a parcela $(-1)^{k+1} A_k^1 \cdot \det A_{1k}$ o é obviamente.

[2]. Basta mostrar que o $\det$ de uma matriz que tenha duas colunas iguais se anula (porquê?). Mais uma vez os exemplos seguintes esclarecem o argumento geral:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & a & g \\ b & b & h \\ c & c & k \end{pmatrix} \\ = a \cdot \det \begin{pmatrix} b & h \\ c & k \end{pmatrix} - a \cdot \det \begin{pmatrix} b & h \\ c & k \end{pmatrix} + g \cdot \det \begin{pmatrix} b & b \\ c & c \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} a & d & a \\ b & e & b \\ c & f & c \end{pmatrix} \\ = a \cdot \det \begin{pmatrix} e & b \\ f & c \end{pmatrix} - d \cdot \det \begin{pmatrix} b & b \\ c & c \end{pmatrix} + a \cdot \det \begin{pmatrix} b & e \\ c & f \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

Suponhamos então que as colunas r e s de A são iguais. Então, pela hipótese de indução:

$$\sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} A_i^1 \cdot \det A_{1i} = (-1)^{r+1} A_r^1 \cdot \det A_{1r} + (-1)^{s+1} A_s^1 \cdot \det A_{1s}$$

uma vez que todas as outras parcelas se anulam, atendendo a que as matrizes envolvidas têm duas colunas iguais (hipótese de indução).

Como podem diferir A_{1r} e A_{1s} ?

Se r e s são adjacentes, então $A_{1r} = A_{1s}$ já que quando duas colunas são adjacentes é indiferente qual delas se omite.

Se existe apenas uma coluna a separar as linhas r e s , podemos mudar A_{1r} em A_{1s} por uma simples permutação de duas linhas. Mais geralmente se $r = s + t$ (podemos sempre supôr que $r > s$), podemos mudar A_{1r} em A_{1s} por $t - 1$ dessas permutações de duas colunas. Como pela hipótese de indução para matrizes $(n - 1) \times (n - 1)$ permutação de 2 colunas muda o sinal de $\det$, e como $A_r^1 = A_s^1$ pela igualdade das colunas r e s , vem que

$$\begin{aligned} \det A &= (-1)^{r+1} A_r^1 \cdot \det A_{1r} + (-1)^{s+1} A_s^1 \cdot \det A_{1s} \\ &= (-1)^{r+1} A_r^1 \cdot \det A_{1r} + (-1)^{s+1} A_r^1 \cdot (-1)^{t+1} \cdot \det A_{1r} \\ &= (-1)^{r+1} A_r^1 \cdot \det A_{1r} + (-1)^{s+1} A_r^1 \cdot (-1)^{r-s+1} \cdot \det A_{1r} \\ &= [(-1)^{r+1} + (-1)^{r+1+1}] A_r^1 \cdot \det A_{1r} \\ &= 0 \end{aligned}$$

[3.] $\det \mathbf{I}_n = 0$ fácil.

■.

6.5.2 Determinante de um produto

► **Lema 6.1** *Seja $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ uma função que satisfaz as duas primeiras propriedades referidas no teorema 6.1, isto é, é linear em cada coluna e muda o sinal se se permutam duas colunas. Então:*

$$f(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n) = f(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \cdot \det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n) \quad (6.5.3)$$

Dem.: Se $f(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) = 1$ então $f = \det$, pela unicidade do teorema 6.1, e o lema está demonstrado. Se $f(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n) \neq 1$, considere-se:

$$\Delta(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n) = \frac{\det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n) - f(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n)}{1 - f(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)} \quad (6.5.4)$$

É fácil ver que Δ satisfaz as 3 propriedades referidas no teorema 6.1 e portanto, por unicidade, $\Delta(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n) = \det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n)$. Resolvendo a igualdade (6.5.4) em ordem a $f(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n)$, obtem-se o que se pretende.

■

► **Teorema 6.2** $\forall A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$:

$$\boxed{\det(AB) = \det A \cdot \det B} \quad (6.5.5)$$

Dem.: Defina-se $f : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathbb{K}$ por:

$$f(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n) = \det(B\mathbf{A}_1, \dots, B\mathbf{A}_n) \quad (6.5.6)$$

f satisfaz as condições do lema anterior, pelo que:

$$f(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n) = \underbrace{f(\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n)}_{\det(B\mathbf{e}_1, \dots, B\mathbf{e}_n)} \cdot \underbrace{\det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_n)}_{\det A}$$

isto é:

$$\det(B\mathbf{A}_1, \dots, B\mathbf{A}_n) = \det(B\mathbf{e}_1, \dots, B\mathbf{e}_n) \cdot \det A$$

Mas é fácil ver que (verifique):

$$\det(B\mathbf{A}_1, \dots, B\mathbf{A}_n) = \det(BA)$$

e que:

$$\det(B\mathbf{e}_1, \dots, B\mathbf{e}_n) = \det B$$

o que demonstra o teorema. ■

► **Corolário 6.2** Se $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ é inversível então $\det A \neq 0$ e $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

Dem.: $1 = \det \mathbf{I}_n = \det(AA^{-1}) = \det(A) \cdot \det(A^{-1})$. ■

6.5.3 Cálculo da matriz inversa. Matriz adjunta

Se A é uma matriz quadrada $n \times n$, o seu determinante pode ser calculado desenvolvendo segundo a linha i , de acordo com a fórmula:

$$\det A = \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} A_j^i \cdot \det A_{ij} \quad i \text{ fixo} \quad (6.5.7)$$

onde, como vimos, A_{ij} é a matriz que se obtém de A retirando-lhe a linha i e a coluna j .

A fórmula anterior sugere a fórmula da multiplicação de duas matrizes. De facto:

$$\begin{aligned} \det A &= \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} A_j^i \cdot \det A_{ij} \\ &= \sum_j A_j^i \underbrace{(-1)^{i+j} \det A_{ij}}_{\stackrel{\text{def}}{=} \widehat{A}_i^j} \\ &= \sum_j A_j^i \widehat{A}_i^j \\ &= \text{elemento } i \text{ da diagonal do produto } A\widehat{A} \end{aligned} \quad (6.5.8)$$

Isto conduz portanto a uma nova matriz $\widehat{A}$ definida por:

$$\widehat{A}_i^j = (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

Porque há aqui uma troca de índices incómoda, consideramos a transposta de A e formulamos a seguinte definição:

► **Definição 6.1** ... se A é uma matriz quadrada $n \times n$, define-se uma nova matriz quadrada $n \times n$, $\hat{A}$, chamada a **adjunta** de A , através de:

$$\boxed{\hat{A}_j^i \stackrel{\text{def}}{=} (-1)^{i+j} \det(A^t)_{ij}} \quad (6.5.9)$$

Não esqueça que $(A^t)_{ij}$ é a matriz que se obtém de A^t retirando-lhe a linha i e a coluna j . Portanto:

$$\hat{A} = \begin{pmatrix} \det(A^t)_{11} & -\det(A^t)_{12} & \det(A^t)_{13} & \cdots \\ \det(A^t)_{21} & -\det(A^t)_{22} & \det(A^t)_{23} & \cdots \\ \det(A^t)_{31} & -\det(A^t)_{32} & \det(A^t)_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \end{pmatrix}$$

O cálculo (6.5.8) mostra pois que todos os elementos da diagonal do produto $A\hat{A}$ são iguais a $\det A$, donde se deduz o seguinte teorema:

► **Teorema 6.3** Se $\hat{A}$ é a matriz deduzida de A através de (6.5.9), então:

$$A\hat{A} = \begin{pmatrix} \det A & & \\ & \ddots & \\ & & \det A \end{pmatrix} = \det A \mathbf{I}_n$$

Portanto, se $\det A \neq 0$, A é inversível e:

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} \hat{A}} \quad (6.5.10)$$

■

Dem.: Falta mostrar que os elementos fora da diagonal do produto $A\hat{A}$ são todos nulos. Para isso, consideremos a matriz B que se obtém de A substituindo a linha k pela linha h , com $h \neq k$. Atenção que isto não é uma operação elementar! B fica então com duas linhas iguais (ambas iguais à linha h de A) e por isso o seu determinante é nulo. Por outro lado, calculando $\det B$ desenvolvendo segundo a linha k , obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= \det B \\ &= \sum_j (-1)^{k+j} B_j^k \cdot \det B_{kj}, \quad k \text{ fixo} \\ &= \sum_j (-1)^{k+j} B_j^k \cdot \det A_{kj}, \quad \text{porque } B \text{ e } A \text{ coincidem fora da linha } k \\ &= \sum_j (-1)^{k+j} A_j^h \cdot \det A_{kj}, \quad \text{porque } B \text{ e } A \text{ coincidem na linha } h \\ &= \sum_j A_j^h \cdot (-1)^{k+j} \det A_{kj} \\ &= \sum_j A_j^h \cdot \hat{A}_k^j \end{aligned} \quad (6.5.11)$$

■

6.6 Regra de Cramer

Dado um sistema do tipo:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}$$

podemos escrevê-lo na forma:

$$x^1 \mathbf{A}_1 + x^2 \mathbf{A}_2 + \cdots + x^n \mathbf{A}_n = \mathbf{b}$$

onde, como antes, $\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_n$ representam as colunas da matriz A . Para cada i fixo, substitua-se a coluna $\mathbf{A}_i$ pelo vector-coluna $\mathbf{b}$, e calcule-se o determinante dos n vectores assim obtidos. Vem então que (justificar):

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \underbrace{\mathbf{b}}_{\text{posição } i}, \dots, \mathbf{A}_n) &= \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \underbrace{x^i \mathbf{A}_i}_{\text{posição } i}, \dots, \mathbf{A}_n) \\ &= x^i \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_i, \dots, \mathbf{A}_n) \\ &= x^i \det A \end{aligned} \quad (6.6.1)$$

Portanto, se $\det A \neq 0$, deduzimos a chamada **regra de Cramer** para as soluções do sistema $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$:

$$\boxed{x^i = \frac{1}{\det A} \cdot \det(\mathbf{A}_1, \dots, \underbrace{\mathbf{b}}_{\text{posição } i}, \dots, \mathbf{A}_n)} \quad (6.6.2)$$

6.7 Exercícios

► **Exercício 6.2** ... Seja $\mathcal{V}$ o espaço vectorial das funções polinomiais $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de grau ≤ 4 :

$$\mathcal{V} = \{p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 : a_i \in \mathbb{R}\}$$

e $\mathcal{W}$ o espaço vectorial das funções polinomiais $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de grau ≤ 3 . Considere a aplicação $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{W}$ definida por:

$$\mathbf{L}[p(x)] = \left(\frac{d^2}{dx^2} - \frac{d}{dx} \right) [p(x)] = p''(x) - p'(x)$$

Mostrar que $\mathbf{L}$ é linear. Calcular a matriz de $\mathbf{L}$ relativamente às bases $\{1, x, x^2, x^3, x^4\}$ para $\mathcal{V}$ e $\{1, x, x^2, x^3\}$ para $\mathcal{W}$. Calcular $\ker \mathbf{L}$ e $\text{im } \mathbf{L}$.

► **Exercício 6.3** ... Em cada um dos seguintes casos determine $M_{\widehat{\mathcal{B}}\widehat{\mathcal{B}}}(f)$, calcule $\ker(f)$ e $\text{im}(f)$:

$$\begin{aligned} a) \quad f : \quad \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^2, \quad \mathcal{B} = \widehat{\mathcal{B}} = ((1, 0), (0, 1)) \\ (x, y) &\longmapsto (3x - y, x + 5y) \end{aligned}$$

$$(x, y) \longmapsto (-x + y, 5x + 2y)$$

$$\begin{aligned} c) \quad f : \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \quad \mathbb{R}_1(X), \quad \mathcal{B} = ((1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)), \widehat{\mathcal{B}} = \\ (1, X) & \end{aligned}$$

$$(a, b, c) \longmapsto a + b + c + (a + 2b)X$$

$$d) f : \mathbb{R}_2(X) \longrightarrow \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = (1 + X, 1 + 2X, X^2), \widehat{\mathcal{B}} = ((3, 1), (5, 2));$$

$$a_0 + a_1 X + a_2 X^2 \mapsto (a_0 + a_1 + a_2, a_0 + 2a_1)$$

$$e) f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y\} \longrightarrow \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = -z\}$$

$$(x, y, z) \mapsto (2y + z, x + z, -x - z)$$

$$\mathcal{B} = ((2, 1, 0), (0, 0, 1)), \widehat{\mathcal{B}} = ((-1, -1, 1));$$

$$f) D : \mathbb{R}_4(X) \longrightarrow \mathbb{R}_4(X), \mathcal{B} = \widehat{\mathcal{B}} = (1, X, X^2, X^3, X^4);$$

$$P \longmapsto P'$$

$$g) f : \mathbb{R}_4(X) \longrightarrow \mathbb{R}_4(X), \mathcal{B} = (1, X, X^2, X^3, X^4), \widehat{\mathcal{B}} = (1, X, X^2, X^3, X^4);$$

$$P \longmapsto X^2 P'$$

$$(x, y, z) \mapsto (x + y, y + 2z)$$

$$i) f : \mathbb{C}^3 \longrightarrow \mathbb{C}^2, \mathcal{B} = ((i, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 0, 1)), \widehat{\mathcal{B}} = ((1, i), (0, 1)).$$

$$(z, v, w) \mapsto (z + v + w, z - w)$$

► **Exercício 6.4** ... Em cada um dos seguintes casos, determine $M_{\widehat{\mathcal{B}}} (g \circ f)$.

$$a) M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, M_{\mathcal{B}\widehat{\mathcal{B}}}(g) = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ \frac{1}{2} & -3 \\ -2 & \frac{1}{5} \end{pmatrix};$$

$$b) M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \\ 3 & 5 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, M_{\mathcal{B}\widehat{\mathcal{B}}}(g) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 \\ -2 & -1 & -1 & 3 \\ 5 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$c) M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, M_{\mathcal{B}\widehat{\mathcal{B}}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$d) M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, M_{\mathcal{B}\widehat{\mathcal{B}}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix};$$

$$e) M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 3 & 5 \end{pmatrix}, M_{\mathcal{B}\widehat{\mathcal{B}}}(g) = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 6 \end{pmatrix};$$

$$f) M_{\mathcal{B}\mathcal{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 2 + i \end{pmatrix}, M_{\mathcal{B}\widehat{\mathcal{B}}}(g) = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ i & -1 + i \end{pmatrix}.$$

► **Exercício 6.5** ... Calcule os seguintes determinantes usando diferentes métodos em cada uma das alíneas:

$$a) \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix}; b) \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}; c) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}; d) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}; e) \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 7 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix};$$

$$f) \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 7 & 10 \\ -1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 2 \end{vmatrix}; g) \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix}; h) \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 3 & 1 \end{vmatrix};$$

$$i) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}.$$

► **Exercício 6.6** ... Dê exemplos de matrizes $A, B \in M_{2,2}(\mathbb{R})$, não nulas, tais que :

- a) $\det(A + B) \neq \det(A) + \det(B)$;
- b) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$;
- c) $\det(3A) \neq 3 \det(A)$;
- d) $\det(3A) = 3 \det(A)$

► **Exercício 6.7** ... Usando determinantes, calcule o volume do paralelepípedo gerado pelos vectores u, v, w :

- a) $u = (1, 1, 2)$, $v = (-1, -2, 3)$ e $w = (0, -1, 1)$;
- b) $u = (1, 1, 0)$, $v = (-1, 0, 3)$ e $w = (0, -1, 1)$;
- c) $u = (1, 0, 0)$, $v = (-1, -2, 3)$ e $w = (0, -2, 3)$;

► **Exercício 6.8** ... Calcule o volume do paralelepípedo $\mathcal{P}$ em $\mathbb{R}^3$ gerado por S . Considere depois a aplicação linear $\mathbf{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ e calcule $\text{vol}(\mathbf{L}(\mathcal{P}))$. Verifique que:

$$|\det \mathbf{L}| = \frac{\text{vol}(\mathbf{L}(\mathcal{P}))}{\text{vol} \mathcal{P}}$$

- a) $S = \{(1, 0, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 0)\}$, $\mathbf{L}(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$;
- b) $S = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (0, 0, 2)\}$, $\mathbf{L}(x, y, z) = (x - y, x + y, 2x - y + 3z)$;
- c) $S = \{(1, 2, 0), (0, 0, 1), (0, 3, 0)\}$, $\mathbf{L}(x, y, z) = (2x - y, x + y, y + 5z)$.