FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO
Departamento Matemática

Resolução do exame de Álgebra Linear e Geometria Analítica I

Licenciaturas em Matemática, Física e Astronomia

29 de Janeiro de 2010 Duração... **3h00m (sem tolerância)**

O exame é constituído por 4 folhas. Deve ser resolvido nessas folhas, podendo utilizar o seu verso. Exige-se boa apresentação da prova e justificação clara dos cálculos efectuados. Não é permitido o uso de máquinas de calcular.

Cotação:

1	2	3	4	5	6(a)	6(b)	6(c)	7	8
2.0	2.0	2.0	2.0	3.0	1.5	1.5	2.0	2.0	2.0

Exercício 1 ...

Considere os subconjuntos seguintes dos espaços vectoriais indicados:

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2+y^2=1\} \subset \mathbb{R}^2 \\ B &= \{p \in \mathbb{R}[X] : \text{grau de}\, p = 3\} \subset \mathbb{R}[X] \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x+y=0 \vee y=x^2\} \subset \mathbb{R}^2 \\ D &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x+y=0 \wedge z=-1\} \subset \mathbb{R}^3 \end{aligned}$$

Qual ou quais são subespaços vectoriais?

- [ ] apenas B e D
- [ ] apenas C e D
- [ ] nenhum
- [ ] apenas A

Resolução:

A não é porque é vazio; B não é porque não contem o polinómio nulo; C não é porque, por exemplo, $(2,4) \in C$ mas $-1(2,4) = (-2,-4) \notin C$; D não é porque não contem o vector nulo.

Resposta certa: nenhum

Exercício 2 ...

Considere a aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\mathbf{A}(x,y) = (-5x+12y, -4x+9y)$$

e as afirmações seguintes:

[A]. a matriz de $\mathbf{A}$ relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$ é $\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$.

[B]. os valores próprios de $\mathbf{A}$ são 1 e 3.

[C]. $\{(2,1),(3,2)\}$ é uma base constituída por vectores próprios de $\mathbf{A}$.

[D]. $\mathbf{A}$ é diagonalizável.

Indique qual a afirmação correcta:

- [ ] todas são falsas
- [ ] apenas B e D são verdadeiras
- [ ] apenas A é verdadeira
- [ ] todas são verdadeiras

Resolução:

$A(1,0) = (-5. -4)$ e $A(0,1) = (12,9)$ e portanto a matriz de $\mathbf{A}$ relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$ é $\begin{pmatrix} -5 & 12 \\ -4 & 9 \end{pmatrix}$. A equação característica é:

$$p(\lambda) = \begin{pmatrix} -5-\lambda & 12 \\ -4 & 9-\lambda \end{pmatrix} = 0 \quad \therefore \quad (-5-\lambda)(9-\lambda)+48=0 \quad \therefore \quad \lambda = 1 \vee \lambda = 3$$

$A(2,1) = (2,1) = 1\,(2,1)$ e $A(3,2) = (9,6) = 3\,(3,2)$ o que significa que $(1,2)$ é vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$ e $(3,2)$ é vector próprio associado ao valor próprio $\lambda = 3$.

A é diagonalizável porque a matriz de A na base $\{(2,1),(3,2)\}$ é $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Resposta certa: todas são verdadeiras.

Exercício 3 ...

Considere a aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\mathbf{A}(x,y) = (2x-y, -6x+3y)$$

e as afirmações seguintes:

A. im$\mathbf{A}$=span$\{(1,-3)\}$. B. det$\mathbf{A} \neq 0$
C. ker$\mathbf{A}=\{\mathbf{0}\}$. D. $\mathbf{A}$ é injectiva

Indique qual a afirmação correcta:

- [ ] todas são verdadeiras
- [ ] todas são falsas
- [ ] apenas B é falsa
- [ ] apenas A é verdadeira

Resolução:

A matriz de A relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix}$ e portanto $\det A = 6 - 6 = 0$.

$\mathbf{A}(x,y) = (2x-y, -6x+3y) = x(2,-6) + y(-1,3) \Longrightarrow \operatorname{im} A = \operatorname{span}\{(2,-6),(-1,3)\} = \operatorname{span}\{(1,-3)\}$, uma vez que $(2,-6) = 2\,(1,-3)$.

$\ker A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \mathbf{A}(x,y) = (2x-y,-6x+3y) = (0,0)\} = \operatorname{span}\{(1,2)\}$ e daí que $\ker A \neq \{\mathbf{0}\}$ e portanto A não é injectiva.

Resposta certa: apenas A é verdadeira.

Exercício 4 ...

Considere o EV Euclideano $\mathbb{R}[x]$ com o produto interno L^2:

$$\langle p|q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)dx$$

O polinómio de $\mathbb{R}_1[x]$ mais próximo de x^2 é:

- [ ] $x - \frac{1}{6}$
- [ ] $-3x + x^2$
- [ ] $\frac{1}{2} + x$
- [ ] $x - 12$

Resolução:

Pelo teorema da aproximação óptima o polinómio de $\mathbb{R}_1[x]$ mais próximo de x^2 é a projecção ortogonal $p = p(x)$ de x^2 sobre $\mathbb{R}_1[x]$. Como $\{1, x\}$ é uma base para $\mathbb{R}_1[x]$, essa projecção ortogonal é da forma $p = p(x) = a + bx$ onde a e b são calculados pela condição de que $x^2 - p(x)$ é simultâneamente ortogonal a 1 e a x, isto é:

$$0 = \langle x^2-(a+bx)|1\rangle = \int_0^1 (x^2-a-bx)\,dx = \frac{1}{3}-a-\frac{b}{2} \;\wedge\; 0 = \langle x^2-(a+bx)|x\rangle = \int_0^1 (x^2-a-bx)\,x\,dx = \frac{1}{4}-\frac{a}{2}-\frac{b}{3}$$

Resolvendo o sistema $\left\{\begin{array}{lcl} \frac{1}{3}-a-\frac{b}{2} & = & 0 \\ \frac{1}{4}-\frac{a}{2}-\frac{b}{3} & = & 0 \end{array}\right.$, obtem-se $a = -\frac{1}{6}, b = 1$ e portanto a projecção ortogonal de x^2 sobre $\mathbb{R}_1[x]$ é $p = p(x) = x - \frac{1}{6}$.

Resposta certa: $x - \frac{1}{6}$.

Exercício 5 ... Detalhar os cálculos que efectuou para responder ao exercício 2.

Resolução ...
Ver atrás.

Exercício 6 ... Considere a transformação linear $A : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ dada por:

$$A(x, y) = (x + y, 2x + 3y, x - y), \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

Em $\mathbb{R}^3$ considera-se o produto escalar usual.

a.) Calcule uma base ortogonal para a imagem de A: $\operatorname{im} A \subseteq \mathbb{R}^3$.

b.) Calcule a projecção ortogonal do vector $\mathbf{v} = (-1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ sobre a imagem de A. Calcule a distância de $\mathbf{v}$ a $\operatorname{im} A$.

c.) Calcule a solução dos mínimos quadrados do sistema:

$$\begin{cases} x + y &= -1 \\ 2x + 3y &= 1 \\ x - y &= 0 \end{cases}$$

Resolução ...
a.) Como:

$$\mathbf{A}(x, y) = (x + y, 2x + 3y, x - y) = x\,(1, 2, 1) + y\,(1, 3, -1)$$

a imagem de $\mathbf{A}$ é o plano de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $\mathbf{f}_1 = (1, 2, 1), \mathbf{f}_2 = (1, 3, -1)$, que constituem uma base desse plano por serem linearmente independentes. Ortogonalizando essa base pelo processo de Gram-Schmidt, vem que:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{f}_1 = (1, 2, 1)$$

e

$$\mathbf{e}_2 = \mathbf{f}_2 - \frac{\mathbf{f}_2 \cdot \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_1\|^2}\mathbf{e}_1 = (1, 3, -1) - \frac{(1, 3, -1) \cdot (1, 2, 1)}{\|(1, 2, 1)\|^2}(1, 2, 1) = (0, 1, -2)$$

b.) A projecção ortogonal do vector $\mathbf{v} = (-1, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$ sobre a imagem de A é dada pela fórmula da projecção usando a base ortogonal da alínea anterior:

$$\mathbf{P}_{\operatorname{im} \mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_1}{\|\mathbf{e}_1\|^2}\mathbf{e}_1 + \frac{\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}_2}{\|\mathbf{e}_2\|^2}\mathbf{e}_2$$

Fazendo os cálculos (verificar) obtemos:

$$\mathbf{P}_{\operatorname{im} \mathbf{A}}(\mathbf{v}) = \left(\frac{1}{6}, \frac{8}{15}, -\frac{7}{30}\right)$$

c.) Por definição (e pelo teorema da aproximação óptima), a "solução" dos mínimos quadrados é a solução do sistema:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{P}_{\operatorname{im} \mathbf{A}}(\mathbf{b})$$

onde $\mathbf{P}_{\operatorname{im} \mathbf{A}}(\mathbf{b})$ é a projecção ortogonal do vector $\mathbf{v} = (-1, 1, 0)$ sobre o plano imagem de $\mathbf{A}$. Logo a solução procurada é a solução do sistema:

$$\begin{cases} x+y &= 1/6 \\ 2x+3y &= 8/15 \\ x-y &= -7/30 \end{cases}$$

Resta fazer os cálculos. O erro associado é, por definição, igual à distância entre o ponto $(-1,1,0)$ e a $\mathbf{P}_{\mathrm{im}\,\mathbf{A}}(\mathbf{b})$:

Exercício 7 ... Seja $(\mathcal{V}, \langle\ ,\ \rangle)$ um espaço vectorial com produto interno e $\mathbf{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador auto-adjunto. Mostrar que se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são dois vectores próprios de T, associados respectivamente aos valores próprios distintos λ e η, então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são ortogonais.

Resolução ...

Por hipótese, $\mathbf{S}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ e $\mathbf{S}(\mathbf{w}) = \eta\mathbf{w}$. Sabemos que $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$. Temos então sucessivamente que:

$$\lambda\,\langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = \langle\lambda\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{S}\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{v}|\mathbf{S}\mathbf{w}\rangle = \langle\mathbf{v}|\eta\,\mathbf{w}\rangle = \overline{\eta}\,\langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = \eta\,\langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle$$

o que implica que $(\lambda-\eta)\,\langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = 0$, e portanto $\langle\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = 0$, já que $\lambda \neq \eta$.

Exercício 8 ... Seja $\mathcal{V}$ um espaço vectorial real de dimensão finita e $\mathbf{T} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ um operador linear. Mostrar que se $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são dois vectores próprios de $\mathbf{T}$, linearmente independentes, associados ao mesmo valor próprio $r \in \mathbb{R}$, então $(\lambda - r)^2$ divide o polinómio característico $p(\lambda)$ de $\mathbf{T}$, isto é, $p(\lambda) = (\lambda - r)^2 q(\lambda)$ para algum polinómio q.

Resolução ...

Como $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente independentes podemos (teorema da base incompleta) completá-los a uma base $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{v}_3, \cdots, \mathbf{v}_n\}$ de $\mathcal{V}$. Como $T(\mathbf{u}) = r\,\mathbf{u}$ e $T(\mathbf{v}) = r\,\mathbf{v}$, a matriz de $\mathbf{T}$ relativamente a essa base é do tipo:

$$\begin{pmatrix} r & 0 & A_3^1 & \cdots & A_n^1 \\ 0 & r & A_3^2 & \cdots & A_n^2 \\ 0 & 0 & A_3^3 & \cdots & A_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & A_3^n & \cdots & A_n^n \end{pmatrix}$$

e o polinómio característico será:

$$p(\lambda) = \det\begin{pmatrix} r-\lambda & 0 & A_3^1 & \cdots & A_n^1 \\ 0 & r-\lambda & A_3^2 & \cdots & A_n^2 \\ 0 & 0 & A_3^3-\lambda & \cdots & A_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & A_3^n & \cdots & A_n^n-\lambda \end{pmatrix} = (r-\lambda)\det\begin{pmatrix} r-\lambda & A_3^2 & \cdots & A_n^2 \\ 0 & A_3^3-\lambda & \cdots & A_n^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & A_3^n & \cdots & A_n^n-\lambda \end{pmatrix} = (r-\lambda)^2 q(\lambda)$$

o que prova o que se pretende.