Estudar **Matemática**
na FCUP

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Módulo 1
ALGA em $\mathbb{R}^2$

J.N. Tavares

Last Revision Date: 5 de Outubro de 2009
jntavar@fc.up.pt

Iniciar Responda a cada uma das seguintes questões. Objectivo: 100%.

1. (10^{pts}) Considere os subconjuntos seguintes de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 0\} \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = -1\} \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y = 0\} \end{aligned}$$

Qual ou quais são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^2$?

- [ ] todos
- [ ] nenhum
- [ ] apenas A e C
- [ ] apenas C

2. (10^{pts}) Considere os subconjuntos seguintes de $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} A &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = -1\} \\ B &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \geq 0\} \\ C &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \vee 2x - y = 0\} \\ D &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0 \wedge 2x - y = 0\} \end{aligned}$$

Qual ou quais são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^2$?

- ☐ apenas B e D
- ☐ nenhum
- ☐ apenas C e D
- ☐ apenas A

3. (10^{pts}) Considere as aplicações seguintes de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x,y) &= (x, y^2) \\ \mathbf{B}(x,y) &= (x+1, 2x+y) \\ \mathbf{C}(x,y) &= (2x-y, 0) \end{aligned}$$

Qual ou quais são aplicações lineares?

- ☐ todas
- ☐ nenhuma
- ☐ apenas **C**
- ☐ **B** e **C**

4. (10^{pts}) Considere a aplicação linear $\mathbf{A}: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\mathbf{A}(x,y) = (3x-y, x+2y)$$

e as afirmações seguintes:

[A]. a matriz de $\mathbf{A}$ relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$ é $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

[B]. a matriz de $\mathbf{A}$ relativamente à base $\{(-1,1),(2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$ é $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

[C]. O núcleo de $\mathbf{A}$ é $\ker\mathbf{A}=\{\mathbf{0}\}$.

Indique qual a afirmação correcta:

- ☐ todas são verdadeiras
- ☐ todas são falsas
- ☐ apenas C é verdadeira
- ☐ apenas B e C são verdadeiras

5. (10^{pts}) Considere a aplicação linear $\mathbf{A}:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\mathbf{A}(x,y) = \left(2x - \frac{3}{2}y, -2x\right)$$

e as afirmações seguintes:

[A]. a matriz de **A** relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$ é $\begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3/2 & 0 \end{pmatrix}$

[B]. os valores próprios de **A** são -1 e $+3$.

[C]. $\{(1,2),(-3,2)\}$ é uma base constituída por vectores próprios de **A**.

[D]. **A** é diagonalizável.

Indique qual a afirmação correcta:

- todas são falsas
- apenas A é verdadeira
- apenas B e D são verdadeiras
- todas são verdadeiras

6. (10^{pts}) Considere a aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\mathbf{A}(x,y) = (2x+y, -x+2y)$$

A imagem, sob **A**, da recta de equação $x - 2y = 1$ é:

- a recta de equação $x - 2y = 1$
- ela própria
- o vector nulo
- a recta de equação $y = -1$

7. (10^{pts}) Considere a aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\mathbf{A}(x, y) = (5x + y, -2x + 3y)$$

e o paralelogramo $\mathcal{P}$ gerado pelos vectores $\mathbf{a} = (1, -3)$ e $\mathbf{b} = (2, 4)$
A área do paralelogramo $\mathbf{A}(\mathcal{P})$ gerado pelos vectores $\mathbf{A}(\mathbf{a})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{b})$ é igual a:

☐ 4 ☐ 13 ☐ 170 ☐ -24

8. (10^{pts}) A distância entre o ponto $P = (1, 0)$ e o seu simétrico relativamente à recta de equação $2x - 3y = 0$ é igual a:

☐ $\frac{\sqrt{150}}{13}$ ☐ $\frac{\sqrt{208}}{13}$ ☐ $\frac{208}{13}$ ☐ $\frac{150}{13}$

9. (10^{pts}) Considere uma aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que tem 0 como valor próprio, e as afirmações seguintes:
[A]. $\mathbf{A}$ não é injectiva
[B]. $\det\mathbf{A} \neq 0$

[C]. $\ker \mathbf{A} \neq \{\mathbf{0}\}$
[D]. $\mathbf{A}$ é sobrejectiva

Indique qual ou quais são verdadeiras:

☐ todas ☐ nenhuma ☐ apenas A e C ☐ apenas B e D

10. (10^{pts}) Considere uma aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ que deixa invariante cada uma das rectas de equações $x-2y=0$ e $3x+y=0$, respectivamente, e as matrizes:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 7 & 0 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 6 & -7 \end{pmatrix}$$

Então a matriz de $\mathbf{A}$ relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^2$ poderá ser:

☐ A ☐ B ☐ C ☐ D

Pontuação:

Percentagem: