ALGA I

Ficha de trabalho 2
Resolução de exercícios apenas em $\mathbb{R}^3$

Os exercícios a seguir propostos são resolvidos por métodos que são facilmente generalizáveis a situações mais abstractas, que surgirão a partir do módulo 3. Aí os sistemas que aparecem poderão ter mais equações e mais incógnitas, é claro! Mas, do ponto de vista conceptual, não são muito mais complicadas - quem compreender as resoluções propostas nesta ficha, facilmente compreenderá as situações mais gerais futuras.

Se detectarem erros de cálculo (ou outros) avisem-me.

ATENÇÃO ... TODOS OS SISTEMAS TÊM QUE SER RESOLVIDOS PELO MÉTODO DE REDUÇÃO DE GAUSS.

▶ **Exercício 1** ... *Verificar se os vectores* $\mathbf{u} = (1, -2, 1), \mathbf{v} = (2, 1, -1), \mathbf{w} = (7, -4, 1) \in \mathbb{R}^3$ *são linearmente independentes.*

Calcular o subespaço de $\mathbb{R}^3$ *gerado por esses três vectores e uma base para esse subespaço.*

Res... Pretende-se averiguar se:

$$\lambda\mathbf{u} + \eta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda = \eta = \gamma = 0$$

A equação vectorial $\lambda\mathbf{u} + \eta\mathbf{v} + \gamma\mathbf{w} = \mathbf{0}$ conduz ao sistema:

$$\begin{cases} \lambda + 2\eta + 7\gamma &= 0 \\ -2\lambda + \eta - 4\gamma &= 0 \\ \lambda - \eta + \gamma &= 0 \end{cases}$$

que resolvemos pelo método de Gauss:

$$\begin{cases} \lambda + 2\eta + 7\gamma &= 0 \\ -2\lambda + \eta - 4\gamma &= 0 \\ \lambda - \eta + \gamma &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\eta + 7\gamma &= 0 \\ 5\eta + 10\gamma &= 0 \\ -3\eta - 6\gamma &= 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda + 2\eta + 7\gamma &= 0 \\ \eta + 2\gamma &= 0 \end{cases}$$

A solução geral é $\begin{cases} \lambda &= -3t \\ \eta &= -2t \\ \gamma &= t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$. Os vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são pois linearmente dependentes.

O subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ é, por definição, constituído por todas as combinações lineares de $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$. Portanto um vector $\mathbf{x} = (x, y, z)$ pertence a esse subespaço se existirem escalares $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\mathbf{x} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v} + c\mathbf{w}$$

Por outras palavras, o sistema:

$$\begin{cases} a + 2b + 7c &= x \\ -2a + b - 4c &= y \\ a - b + c &= z \end{cases}$$

nas incógnitas a, b e c tem que ter solução. Quais os (x, y, z) para os quais esse sistema tem solução? Para responder a isto, resolvemos o sistema pelo método de Gauss, em ordem a a, b e c:

$$\left\{\begin{array}{rcl} a+2b+7c &=& x \\ -2a+b-4c &=& y \\ a-b+c &=& z \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcr} a+2b+7c &=& x \\ 5b+10c &=& 2x+y \\ -3b-6c &=& -x+z \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcc} a+2b+7c &=& x \\ b+2c &=& (2x+y)/5 \\ 0 &=& x+3y+5z \end{array}\right.$$

Concluindo: para que o esse sistema tenha solução, (x, y, z) tem que satisfazer a relação linear $x + 3y + 5z = 0$. Isto é, o subespaço de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ é o plano vectorial cuja equação cartesiana é $x + 3y + 5z = 0$.

Uma base para este plano é, por exemplo, constituída pelos vectores $\mathbf{a} = (-5, 0, 1)$ e $\mathbf{b} = (-3, 1, 0)$.

$\blacksquare$.

▶ **Exercício 2** ... *Considere a aplicação linear* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por* $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + 2y, y - z, x + 2z)$.

a. *Calcule o núcleo* $\ker \mathbf{F}$ *e a imagem* $\mathrm{im}\,\mathbf{F}$*, definido-os por equações cartesianas e identificando-os geomètricamente.*

b. *Calcule bases para o núcleo* $\ker \mathbf{F}$ *e para a imagem* $\mathrm{im}\,\mathbf{F}$*, respectivamente.*

c. *Calcule a matriz que representa* $\mathbf{F}$ *relativamente à base*

$$\mathscr{B} = \{(1, 0, 1), (0, 1, -2), (2, -1, -1)\}$$

d. *Calcule a imagem* $\mathbf{F}(\mathbf{v})$*, onde* $\mathbf{v} = (1, -1, 2)$*, usando a matriz calculada na alínea anterior.*

Res...

a.

$$\ker \mathbf{F} = \left\{(x, y, z) : \left\{\begin{array}{ccccccc} x &+& 2y & & &=& 0 \\ & & y &-& z &=& 0 \\ x & & &+& 2z &=& 0 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccr} x &=& -2t \\ y &=& t \\ z &=& t \end{array}\right., t \in \mathbb{R}\right\}$$

que é a recta gerada por $(-2, 1, 1)$.

$$\begin{array}{rcl} \mathrm{im}\,\mathbf{F} &=& span\{\mathbf{F}(1,0,0), \mathbf{F}(0,1,0), \mathbf{F}(0,0,1)\} \\ &=& span\{(1,0,1), (2,1,0), (0,-1,2)\} \\ &=& \{(x,y,z) : \quad (x,y,z) = a(1,0,1) + b(2,1,0) + c(0,-1,2)\} \end{array}$$

Daí que:

$$\left\{\begin{array}{ccccccc} a &+& 2b & & &=& x \\ & & b &-& c &=& y \\ a & & &+& 2c &=& z \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{ccccccr} a &+& 2b & & &=& x \\ & & b &-& c &=& y \\ & & & & 0 &=& -x+2y+z \end{array}\right.$$

e portanto $\mathrm{im}\,\mathbf{F}$ é o plano de equação cartesiana $-x + 2y + z = 0$.

b. Uma base para $\ker \mathbf{F}$ é, por exemplo, constituída pelo vector $(-2,1,1)$.

Uma base para $\operatorname{im} \mathbf{F}$ é, por exemplo, constituída pelos vectores $(0,1,-2)$ e $(1,0,1)$.

c.

$$\begin{array}{lllll}
\mathbf{F}(1,0,1) & = & (1,-1,3) & = & a(1,0,1)+b(0,1,-2)+c(2,-1,-1) \\
\mathbf{F}(0,1,-2) & = & (2,3,-4) & = & d(1,0,1)+e(0,1,-2)+f(2,-1,-1) \\
\mathbf{F}(2,-1,-1) & = & (0,0,4) & = & g(1,0,1)+h(0,1,-2)+k(2,-1,-1)
\end{array}$$

donde:

$$(\mathbf{F})_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{pmatrix}$$

d. $\mathbf{v}=(1,-1,2)=\alpha(1,0,1)+\beta(0,1,-2)+\gamma(2,-1,-1)$, donde:

$$(\mathbf{F}(v))_{\mathscr{B}} = (\mathbf{F})_{\mathscr{B}}(\mathbf{v})_{\mathscr{B}}$$

isto é:

$$F(v)_{\mathscr{B}} = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$$

Falta fazer os cálculos, que são imediatos....

$\blacksquare$.

▶ **Exercício 3** ... *Considere a aplicação linear:*

$$\begin{array}{rccl}
\mathbf{T}: & \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\
 & (x,y,z) & \longmapsto & \mathbf{T}(x,y,z)=(4z,x+2y+z,2x+4y-2z)
\end{array}$$

a. *Calcular a matriz de* $\mathbf{T}$ *relativamente à base canónica de* $\mathbb{R}^3$*. Calcular o núcleo e a imagem de* $\mathbf{T}$*.*

b. *Calcular os valores próprios de* $\mathbf{T}$ *e, se possível, uma base de* $\mathbb{R}^3$ *constituída por vectores próprios de* $\mathbf{T}$*. Calcule a matriz de* $\mathbf{T}$ *relativamente a esta nova base.*

c. *Usando os resultados das alíneas anteriores, calcule* $\mathbf{T}^3(0,0,-4)$*, onde* $\mathbf{T}^3 = \mathbf{T}\circ\mathbf{T}\circ\mathbf{T}$*.*

Res...

a. A matriz de $\mathbf{T}$ relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Por definição

$$\ker \mathbf{T} = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : \mathbf{T}(x,y,z)=(4z,x+2y+z,2x+4y-2z)=(0,0,0)\}$$

o que conduz aos sistema:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4z & = & 0 \\ x+2y+z & = & 0 \\ 2x+4y-2z & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ x+2y & = & 0 \\ 2x+4y & = & 0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} z & = & 0 \\ x+2y & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -2t \\ y & = & t \\ z & = & 0 \end{array}\right. \qquad t \in \mathbb{R}$$

isto é

$$\ker \mathbf{T} = \{t(-2,1,0) : t \in \mathbb{R}^3\} = \operatorname{span}\{(-2,1,0)\}$$

que é a recta de $\mathbb{R}^3$ gerada por $(-2,1,0)$ e de equações cartesianas $x+2y=0$ e $z=0$.

A imagem de $\mathbf{T}$ é gerada por

$$\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = (0,1,2), \mathbf{T}(\mathbf{e}_2) = (0,2,4), \mathbf{T}(\mathbf{e}_3) = (4,1,-2)$$

isto é:

$$\begin{array}{rcl} \operatorname{im}\mathbf{T} & = & \operatorname{span}\{(0,1,2),(0,2,4),(4,1,-2)\} \\ & = & \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : (x,y,z) = a(0,1,2)+b(0,2,4)+c(4,1,-2), \quad a,b,c \in \mathbb{R}\} \end{array}$$

Portanto:

$$\left\{\begin{array}{rcl} 4c & = & x \\ a+2b+c & = & y \\ 2a+4b-2c & = & z \end{array}\right. \Rightarrow \text{........} \Rightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+2b+c & = & y \\ 4c & = & 2y-z \\ 0 & = & x-2y+z \end{array}\right.$$

isto é, $\operatorname{im}\mathbf{T}$ é o plano $x-2y+z=0$ em $\mathbb{R}^3$.

b. A equação característica é

$$\det(T-\lambda \mathrm{Id}) = \det\begin{pmatrix} -\lambda & 0 & 4 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ 2 & 4 & -2-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 16\lambda = 0$$

cujas raízes são $\lambda = -4, 0, +4$. Pela forma habitual, descrita no curso, calculam-se os espaços próprios:

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{E}(\mathbf{T};-4) & = & \operatorname{span}\{(1,0,-1)\} \\ \mathbb{E}(\mathbf{T};0) & = & \operatorname{span}\{(-2,1,0)\} \\ \mathbb{E}(\mathbf{T};-4) & = & \operatorname{span}\{(1,1,1)\} \end{array}$$

e os vectores $\{\mathbf{e}_1 = (1,0,-1), \mathbf{e}_2 = (-2,1,0), \mathbf{e}_3 = (1,1,1)\}$ constituem uma base (porquê?) $\mathscr{B}$ de vectores próprios de $\mathbf{T}$ que é, por isso, diagonalizável. Nesta base a matriz de $\mathbf{T}$ é $(\mathbf{T})_{\mathscr{B}} = \operatorname{diag}(-4,0,4)$.

c. Calculando as componentes do vector $(0,0,-4)$ na base de vectores próprios de $\mathbf{T}$, calculada anteriormente, vem que:

$$(0,0,-4) = a(1,0,-1) + b(-2,1,0) + c(1,1,1) = (a-2b+c, b+c, -a+c)$$

donde se deduz que $a=-1, b=1, c=-1$. Portanto:

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{T}^3(0,0,-4) & = & -\mathbf{T}^3(1,0,-1) + \mathbf{T}^3(-2,1,0) - \mathbf{T}^3(1,1,1) \\ & = & -(-4)^3(1,0,-1) + 0^3(-2,1,0) - 4^3(1,1,1) \\ & = & (0,-64,-128) \end{array}$$

■.

▶ **Exercício 4** ... *Considere o espaço vectorial* $\mathbb{R}^3$*, munido do produto interno Euclideano usual.*

a. *Calcule a fórmula, em coordenadas relativas à base canónica de* $\mathbb{R}^3$*, para a simetria (ou reflexão) ortogonal* $\mathbf{S}$*, relativa ao plano:*

$$\pi = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \quad 2x - y - 2z = 0\}$$

Calcule os valores próprios de $\mathbf{S}$ *e indique uma base que diagonalize* $\mathbf{S}$*.*

b. *Calcule o simétrico do ponto* $P = (-2, 5, 0)$ *relativo ao plano* π*.*

c. *Calcule o núcleo e a imagem de* $\mathbf{S}$*.*

d. *Calcule a distância entre o ponto* $A = (-2, -1, 4)$ *e o plano* π*.*

Res...

a. Como se deduziu nas aulas,

$$\mathbf{S}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\,\mathbf{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2\,\frac{\langle \mathbf{x}|\mathbf{n}\rangle}{\|\mathbf{n}\|^2}\,\mathbf{n}$$

onde $\mathbf{n} = (2, -1, -2)$ é um vector perpendicular ao plano π. Portanto:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(x, y, z) &= (x, y, z) - 2\,\frac{\langle (x, y, z)|(2, -1, -2)\rangle}{9}\,(2, -1, -2) \\ &= (x, y, z) - 2\,\frac{2x - y - 2z}{9}\,(2, -1, -2) = \ldots.. \end{aligned}$$

b. Substituir $(x, y, z) = (-2, 5, 0)$ na fórmula anterior e fazer os cálculos para obter $\mathbf{S}(-2, 5, 0) = (2, 3, -4)$.

c. $\ker \mathbf{S} = \{\mathbf{0}\}$ e $\mathrm{im}\mathbf{S} = \mathbb{R}^3$.

d. aplicar a fórmula dada nas aulas :

$$d(A, \pi) = \|\mathbf{P}_{\mathbf{n}}(\mathbf{x})\| = \left\| \frac{\langle \mathbf{x}|\mathbf{n}\rangle}{\|\mathbf{n}\|^2}\,\mathbf{n} \right\| = \frac{|\langle \mathbf{x}|\mathbf{n}\rangle|}{\|\mathbf{n}\|}$$

onde $\mathbf{x} = \overrightarrow{OA}$. Portanto:

$$d(A, \pi) = \frac{|\langle(-2, -1, 4)|(2, -1, -2)\rangle|}{3} = 11/3$$

■.

▶ **Exercício 5** ...

a. *Calcule a intersecção dos planos* α *e* β*, em* $\mathbb{R}^3$*, onde* α *é o plano perpendicular a* $\mathbf{n} = (1, -2, 3)$ *e que passa no ponto* $A = (-1, 2, 1)$*, e* β *é o plano gerado pelos vectores* $\mathbf{u} = (0, 1, -1)$ *e* $\mathbf{v} = (-1, 0, 1)$*, e que passa no ponto* $B = (2, -1, 0)$*.*

b. *Calcule as equações paramétricas da recta* ℓ *que passa no ponto* $P = (2, -1, -1)$ *e é perpendicular ao plano* α *da alínea anterior.*

c. *Calcule o ponto de intersecção da recta* ℓ *com o plano* α *da alínea anterior, e ainda a distância de* P *a* α*.*

Res...

a. Se $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \alpha$, então $(\mathbf{x} - \overrightarrow{OA}) \cdot \mathbf{n} = 0$, isto é:

$$((x, y, z) - (-1, 2, 1)) \cdot (1, -2, 3) = 0, \quad \Rightarrow \quad (x + 1) - 2(y - 2) + 3(z - 1) = 0$$
$$\Rightarrow \quad x - 2y + 3z = -2$$

Se $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \beta$, então $\mathbf{x} - \overrightarrow{OB} = a\mathbf{u} + b\mathbf{v}$, para certos escalares $a, b \in \mathbb{R}$. Portanto $(x - 2, y + 1, z) = a(0, 1, -1) + b(-1, 0, 1)$ e daí que:

$$\left\{\begin{array}{rcrcl} & & -b & = & x-2 \\ a & & & = & y+1 \\ -a & + & b & = & z \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcr} a & = & y+1 \\ -b & = & x-2 \\ 0 & = & x+y+z-1 \end{array}\right.$$

isto é, $x + y + z = 1$ é a equação cartesiana de β. A intersecção de α com β é constituída pelos $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ tais que:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} x & - & 2y & + & 3z & = & -2 \\ x & + & y & + & z & = & 1 \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -5t/3 \\ y & = & 2t/3 + 1 \\ z & = & t \end{array}\right.$$

que é a equação paramétrica da recta gerada por $(-5/3, 2/3, 1)$ e que passa no ponto $C = (0, 1, 0)$.

b. Se $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \ell$, então $(\mathbf{x} - \overrightarrow{OP}) = t\mathbf{n}$, isto é:

$$((x, y, z) - (2, -1, -1)) = t(1, -2, 3), \quad \Rightarrow \quad \left\{\begin{array}{rcl} x & = & t+2 \\ y & = & -2t-1 \\ z & = & 3t-1 \end{array}\right., \qquad t \in \mathbb{R}$$

c. O ponto de intersecção de ℓ com α, por ser de ℓ será da forma $(t + 2, -2t - 1, 3t - 1)$ e por ser de α terá de verificar a equação de α, $x - 2y + 3z = -2$. Portanto:

$$(t + 2) - 2(-2t - 1) + 3(3t - 1) = -2 \quad \Rightarrow \quad t = -3/14$$

O ponto de intersecção tem coordenadas $1/14\,(25, -8, -23)$.

A distância de P a α é dada por $\|(2, -1, -1) - 1/14\,(25, -8, -23)\,\|$.

$\blacksquare$.

▶ **Exercício 6** ... *Considere a aplicação linear* $\mathbf{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definida por:*

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x - y, 2x + 3y + 2z, x + y + 2z)$$

a. *Calcule os valores próprios de* $\mathbf{F}$.

b. *Calcule bases para cada um dos espaços próprios de* $\mathbf{F}$.

c. *Diga, justificando, se* $\mathbf{F}$ *é ou não diagonalizável.*

Res...

a. Seja A a matriz de $\mathbf{F}$ relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$. Vem então que:

$$\det(A - \lambda \mathrm{Id}) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ 2 & 3-\lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2-\lambda \end{pmatrix}$$
$$= (1 - \lambda)[(3 - \lambda)(2 - \lambda) - 2] + [2(2 - \lambda) - 2]$$
$$= (1 - \lambda)(2 - \lambda)(3 - \lambda) = 0$$

e os valores próprios de $\mathbf{F}$ são $\lambda = 1, \lambda = 2$ e $\lambda = 3$.

b). Cálculos de rotina

c). $\mathbf{F}$ é diagonalizável por ter 3 valores próprios distintos e estar definida em $\mathbb{R}^3$, que tem dimensão 3 (este é o conteúdo de um teorema que será provado num capítulo posterior).

■.

▶ **Exercício 7** ... *Considere o operador linear* $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *definido por:*

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (-y + 2z, -y, -x + y - 3z), \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

a. *Calcule os valores próprios de A e, se possível, uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de A. A é diagonalizável? Justifique.*

b. *Considere o produto escalar Euclideano usual em $\mathbb{R}^3$. Calcule o adjunto de A.*

Res...

a. A matriz de A, relativamente à base canónica $\mathscr{C} = \{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$ é:

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Os valores próprios calculam-se pela equação característica:

$$\begin{aligned} \det \begin{pmatrix} -\lambda & -1 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & 1 & -3-\lambda \end{pmatrix} &= (-1-\lambda)[(-3-\lambda)(-\lambda) + 2] \\ &= (-1-\lambda)(3\lambda + \lambda^2 + 2) = 0 \end{aligned}$$

cujas raízes são $\lambda = -1$ (com multiplicidade 2) e $\lambda = -2$.

Cálculo dos vectores próprios associados a $\lambda = -1$:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad x - y + 2z = 0 \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& s - 2r \\ y &=& s \\ z &=& r \end{array} \right.$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(\mathbf{A}; -1) &= \{(s - 2r, s, r) : s, r \in \mathbb{R}\} \\ &= \{s(1, 1, 0) + r(-2, 0, 1) : s, r \in \mathbb{R}\} \\ &= \mathbb{R}\langle(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\rangle \end{aligned}$$

Cálculo dos vectores próprios associados a $\lambda = -2$:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \therefore \quad x + z = 0 \text{ e } y = 0 \quad \therefore \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x &=& -t \\ y &=& 0 \\ z &=& t \end{array} \right.$$

Portanto:

$$\mathbb{E}(\mathbf{A}; -2) = \{(-t, 0, t) : t \in \mathbb{R}\} = \{t(-1, 0, 1) : t \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}\langle(-1, 0, 1)\rangle$$

Conclusão: $\mathbf{A}$ é diagonalizável e uma base de vectores próprios é

$$\mathscr{B} = \{(1,1,0), (-2,0,1), (-1,0,1)\}$$

Nesta base $(\mathbf{A})_{\mathscr{B}} = \mathbf{diag}(-1,-1,-2)$.

b. O adjunto de $\mathbf{A}$ define-se através da equação

$$\langle \mathbf{A}^*\mathbf{x}|\mathbf{y}\rangle = \langle \mathbf{x}|\mathbf{A}\mathbf{y}\rangle, \ \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$$

A matriz de $\mathbf{A}^*$, relativamente a uma base ortonormada $\mathscr{C}$, é a transposta da matriz $(\mathbf{A})_{\mathscr{C}}$. Portanto, tomando com $\mathscr{C}$ a base canónica:

$$(A^*)_{\mathscr{C}} = (A)^t_{\mathscr{C}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}^t = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

e:

$$\mathbf{A}^*(x,y,z) = (2z, -x-y+z, -x-3z)$$

■.

▶ **Exercício 8** ... *Considere a simetria* $\mathbf{S} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *relativamente ao plano* $\pi : x - y + z = 0$. *Calcule, em forma vectorial, uma fórmula para o simétrico de um ponto* $P = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. *Calcule o simétrico do ponto* $(1,0,-1)$.

Res...

Como se viu no curso:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{x}) &= \mathbf{x} - 2\,\frac{\mathbf{x}\cdot\mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2}\mathbf{n} \\ &= (x,y,z) - 2\,\frac{(x,y,z)\cdot(1,-1,1)}{\|(1,-1,1)\|^2}(1,-1,1) \\ &= (x,y,z) - 2\,\frac{x-y+z}{3}(1,-1,1) \\ &= \frac{1}{3}\,(x+2y-2z, 2x+y+2z, -2x+2y+z) \qquad (0.0.1) \end{aligned}$$

■.