

Módulo 2

Álgebra Linear e Geometria Analítica em $\mathbb{R}^3$

Neste segundo módulo vamos generalizar os conceitos aprendidos no módulo 1, e também no ensino secundário, estudando Álgebra Linear e Geometria Analítica no espaço $\mathbb{R}^3$. Do ponto de vista conceptual a generalização é imediata - em vez de vectores com duas componentes temos agora vectores com três componentes. Há no entanto maior diversidade de conceitos e os cálculos tornam-se um pouco mais trabalhosos. Mas é apenas isso! No início tentamos usar as notações que são mais familiares, análogas às que usámos no módulo 1, mas, quando introduzimos o cálculo matricial, vamos começar a usar notações mais apropriadas que se revelarão muito úteis de futuro.

Contents

2.1	Álgebra Linear em $\mathbb{R}^3$	29
-----	--	----

Palavras chave

Vectores. $\mathbb{R}^3$ como espaço vectorial real. Subespaços. Dependência e independência linear. Base canónica. Bases, coordenadas e dimensão. Mudança de base e de coordenadas. Aplicações Lineares. Matriz de uma aplicação linear. $GL(2)$. Pontos de vista passivo e activo. Conjugação. Determinantes. Valores e vectores próprios.

Geometria Euclideana em $\mathbb{R}^3$. Produto interno (euclideo). Norma (euclideana). Ângulo. Ortogonalidade. Rectas vectoriais e afins. Planos vectoriais e afins. Produto vectorial em $\mathbb{R}^3$. Produto misto em $\mathbb{R}^3$. Projectão ortogonal. Interpretação geométrica de $\det$ e de $\det A$. Simetrias relativamente a uma recta e a um plano. Transformações ortogonais em $\mathbb{R}^3$. Os grupos $O(3)$ e $SO(3)$.

Notações

$\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w} \dots$ vectores, em vez de $\vec{x}, \vec{y}, \vec{u}, \vec{v}, \dots$

$a, b, c, \dots, \lambda, \eta, \mu, \xi, \dots$ escalares, isto é, números reais (para já).

► Site de apoio à disciplina

<http://www.fc.up.pt/cmup/alga>

► Site de apoio em temas de Matemática elementar

<http://www.fc.up.pt/cmup/apoiomat>

2.1 Álgebra Linear em $\mathbb{R}^3$

Vectorres

► **2.1** Um **vector** em $\mathbb{R}^3$ é por definição um terno ordenado de números reais, representado na forma $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$, ou dispostos segundo uma **matriz-coluna** de três linhas:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

Os números reais x_i , $i = 1, 2, 3$, dizem-se as **componentes** do vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$.

$\mathbb{R}^3$ como espaço vectorial real

► **2.2** Dados dois vectorres $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, em $\mathbb{R}^3$, define-se a respectiva **soma vectorial**, como sendo o vector $\mathbf{x} + \mathbf{y}$, dado por:

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ x_3 + y_3 \end{pmatrix}$$

Geomètricamente $\mathbf{x} + \mathbf{y}$ é novamente obtido através da regra do paralelogramo.

► **2.3** Dado um vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ em $\mathbb{R}^3$, e um **escalar** (i.e., um número real) $\lambda \in \mathbb{R}$, define-se a **multiplicação do escalar λ pelo vector $\mathbf{x}$** , como sendo o vector $\lambda \mathbf{x}$ dado por:

$$\lambda \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \\ \lambda x_3 \end{pmatrix}$$

► **2.4** É fácil provar que as duas operações definidas anteriormente, satisfazem

mais uma vez as propriedades seguintes:

$$[\text{EV1}]. \quad \mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x} \quad (2.1.1)$$

$$[\text{EV2}]. \quad (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z} = \mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) \quad (2.1.2)$$

$$[\text{EV3}]. \quad \mathbf{0} + \mathbf{x} = \mathbf{x} + \mathbf{0} = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.1.3)$$

$$[\text{EV4}]. \quad \forall \mathbf{x}, \exists (-\mathbf{x}) : \mathbf{x} + (-\mathbf{x}) = \mathbf{0} \quad (2.1.4)$$

$$[\text{EV5}]. \quad \lambda(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \lambda\mathbf{x} + \lambda\mathbf{y} \quad (2.1.5)$$

$$[\text{EV6}]. \quad (\lambda + \eta)\mathbf{x} = \lambda\mathbf{x} + \eta\mathbf{x} \quad (2.1.6)$$

$$[\text{EV7}]. \quad \lambda(\eta\mathbf{x}) = (\lambda\eta)\mathbf{x} \quad (2.1.7)$$

$$[\text{EV8}]. \quad 1\mathbf{x} = \mathbf{x} \quad (2.1.8)$$

onde $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$, $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ é o **vector nulo** de $\mathbb{R}^3$, e $-\mathbf{x} = (-1)\mathbf{x}$.

Por isso, diz-se que $\mathbb{R}^3$ é um **espaço vectorial real**.

Subespaços

► **2.5** Um subconjunto não vazio $\emptyset \neq \mathbb{S} \subseteq \mathbb{R}^3$ diz-se um **subespaço vectorial** de $\mathbb{R}^3$, se $\mathbb{S}$ é fechado relativamente às operações de soma de vectores e de multiplicação de escalares por vectores, i.e.:

$$\bullet \text{ Se } \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{S} \text{ também } \mathbf{x} + \mathbf{y} \in \mathbb{S} \quad (2.1.9)$$

$$\bullet \text{ Se } \lambda \in \mathbb{R}, \text{ e } \mathbf{x} \in \mathbb{S} \text{ também } \lambda \mathbf{x} \in \mathbb{S} \quad (2.1.10)$$

► **2.6** Em $\mathbb{R}^3$ os subespaços são de três tipos:

- **triviais**: $\mathbb{S} = \{\mathbf{0}\}$ e $\mathbb{S} = \mathbb{R}^3$
- **rectas vectoriais**: $\mathbb{S} = \{\lambda \mathbf{v} : \lambda \in \mathbb{R}\}$, onde $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, que representa uma recta que passa na origem, gerada por $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$.
- **planos vectoriais**: $\mathbb{S} = \{\lambda \mathbf{u} + \eta \mathbf{v} : \lambda, \eta \in \mathbb{R}\}$, onde $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são dois vectores não colineares em $\mathbb{R}^3$, que representa um plano que passa na origem, gerado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$.

► **Exercício 2.1** ... Diga quais dos seguintes conjuntos são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$:

- | | |
|---|---|
| a) $\mathbb{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$; | e) $\mathbb{E} = \{(a, -a, 5a) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$. |
| b) $\mathbb{B} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = 3z\}$; | f) $\mathbb{F} = \{(a, -a + 1, 5a) \in \mathbb{R}^3 : a \in \mathbb{R}\}$. |
| c) $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 3z \text{ e } z = 2y\}$; | g) $\mathbb{G} = \{(b, 2a + b, 1) : a, b \in \mathbb{R}\}$. |
| d) $\mathbb{D} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 0 \leq x^2 + y^2 \leq z\}$; | h) $\mathbb{H} = \{(a^2, b, 2a + b) : a, b \in \mathbb{R}\}$. |

Combinação linear

► **2.7** Dados n vectores em $\mathbb{R}^3$, digamos $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$, um vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ diz-se uma **combinação linear** dos vectores $\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ se existirem escalares $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tais que:

$$\mathbf{x} = \lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k \quad (2.1.11)$$

► **2.8** O conjunto de todas as **combinações lineares** dos vectores $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$, isto é, de todos os vectores da forma $\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k$, onde os escalares $\lambda_i \in \mathbb{R}$ são arbitrários, chama-se o **espaço gerado pelos vectores** $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k$ e representa-se por $\text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$:

$$\text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\} = \{\lambda_1 \mathbf{a}_1 + \lambda_2 \mathbf{a}_2 + \dots + \lambda_k \mathbf{a}_k : \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\} \quad (2.1.12)$$

► **Exercício 2.2** ... Mostre que $\mathbb{S} = \text{span}\{\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_k\}$ é um subespaço de $\mathbb{R}^3$.

► **Exercício 2.3** ... Em cada uma das alíneas que se seguem, verifique se $\mathbf{x} \in \text{span}\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$:

- a) $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, 0)$ e $\mathbf{c} = (1, 0, -1)$;
- b) $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{a} = (1, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, 0)$ e $\mathbf{c} = (1, 0, 1)$;
- c) $\mathbf{x} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{a} = (0, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (1, 1, 0)$ e $\mathbf{c} = (1, 0, 2)$;
- d) $\mathbf{x} = (0, 0, 1)$, $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (-1, 1, 0)$ e $\mathbf{c} = (1, 0, -1)$;
- e) $\mathbf{x} = (1, 2, 3)$, $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (-2, -2, 0)$ e $\mathbf{c} = (0, 0, -1)$.
- f) $\mathbf{x} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, $\mathbf{b} = (2, 2, 0)$ e $\mathbf{c} = (1, 0, -1)$.

► **Exercício 2.4** ... Em cada um dos casos, calcule o subespaço gerado por $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ e $\mathbf{c}$, onde

- a) $\mathbf{a} = (1, 1, -1)$, $\mathbf{b} = (2, 2, -2)$, $\mathbf{c} = (0, 0, 0)$, em $\mathbb{R}^3$;
- b) $\mathbf{a} = ((1, 0, 1)$, $\mathbf{b} = (5, 0, -1)$, $\mathbf{c} = (0, 1, 0)$, em $\mathbb{R}^3$;
- c) $\mathbf{a} = (2, -1, 1)$, $\mathbf{b} = (1, 0, 1)$, $\mathbf{c} = (1, 0, 1)$, em $\mathbb{R}^3$;
- d) $\mathbf{a} = (2, 1, 2)$, $\mathbf{b} = (0, 0, 0)$, em $\mathbb{R}^3$;

Dependência e independência linear

► **2.9** Dois vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^3$, dizem-se **linearmente dependentes**, se um deles é múltiplo escalar do outro. Se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (ou $\mathbf{y} = \mathbf{0}$) então $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são linearmente dependentes. Geométricamente $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são linearmente dependentes, sse eles são colineares.

► **2.10** Três vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ em $\mathbb{R}^3$, dizem-se **linearmente dependentes**, se um deles é múltiplo escalar dos restantes. Se $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (ou $\mathbf{y} = \mathbf{0}$, ou $\mathbf{z} = \mathbf{0}$) então $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ são linearmente dependentes. Geométricamente $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ são linearmente dependentes, sse eles são coplanares.

► **2.11** Dois vectores $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ em $\mathbb{R}^2$, dizem-se **linearmente independentes**, sse não são linearmente dependentes (o que implica que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$). Geométricamente $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são linearmente independentes, sse eles são não colineares. Simbolicamente:

$$(\mathbf{x} \text{ e } \mathbf{y} \text{ são lin. indep.}) \iff (\lambda \mathbf{x} + \eta \mathbf{y} = \mathbf{0} \implies \lambda = \eta = 0)$$

► **2.12** Três vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ em $\mathbb{R}^3$, dizem-se **linearmente independentes**, sse não são linearmente dependentes (o que implica que $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$, $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{z} \neq \mathbf{0}$). Geométricamente $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ são linearmente independentes, sse eles são não coplanares. Simbolicamente:

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y} \text{ e } \mathbf{z} \text{ são lin. indep.}) \iff (\lambda \mathbf{x} + \eta \mathbf{y} + \mu \mathbf{z} = \mathbf{0} \implies \lambda = \eta = \mu = 0)$$

► **Exercício 2.5** ... Verifique se os vectores que se seguem são linearmente dependentes ou independentes:

- a) $(1, 0, 1), (2, -1, 1)$ em $\mathbb{R}^3$; b) $(1, 0, 1), (2, 2, 0)$ em $\mathbb{R}^3$;
c) $(0, 0, 0), (0, 1, 1), (0, -1, 2)$ em $\mathbb{R}^3$; d) $(1, 1, 2), (2, 3, 0), (1, 1, -1)$ em $\mathbb{R}^3$;

Base canónica

► **2.13** Os vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{e}_1 = \mathbf{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_2 = \mathbf{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{e}_3 = \mathbf{k} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

são linearmente independentes, e têm a propriedade de que qualquer vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, se pode escrever como **combinação linear** de $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$. De facto:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x_1 \mathbf{e}_1 + x_2 \mathbf{e}_2 + x_3 \mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (2.1.13)$$

Diz-se então que $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é uma **base** (ordenada): a **base canónica** de $\mathbb{R}^3$.

Bases, coordenadas, dimensão

► **2.14** Qualquer conjunto $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ constituído por três vectores linearmente independentes, e que têm a propriedade de que qualquer vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, se pode escrever como combinação linear de $\mathbf{u}_1$, $\mathbf{u}_2$ e $\mathbf{u}_3$:

$$\mathbf{x} = a_1 \mathbf{u}_1 + a_2 \mathbf{u}_2 + a_3 \mathbf{u}_3 \quad (2.1.14)$$

para certos escalares (únicos) $a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, diz-se uma **base** de $\mathbb{R}^3$. Os escalares a_1, a_2, a_3 dizem-se as **coordenadas** do vector $\mathbf{x}$ na base $\mathcal{B}$ escreve-se:

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad (2.1.15)$$

Todas as bases de $\mathbb{R}^3$ têm sempre três elementos, e por isso, diz-se que a **dimensão** (real) de $\mathbb{R}^3$ é 3.

► **Exercício 2.6** ... Verifique se os conjuntos que se seguem, são ou não bases de cada um dos espaços vectoriais indicados em cada alínea. Calcule as coordenadas de $\mathbf{x} = (1, -1)$ relativamente aos que são bases:

- a) $\{(1, 1, 1), (1, -1, 5)\}$ em $\mathbb{R}^3$;
- b) $\{(1, 1, 1), (1, 2, 3), (2, -1, 1)\}$ em $\mathbb{R}^3$;
- c) $\{(1, 2, 3), (1, 0, -1), (3, -1, 0), (2, 1, -2)\}$ em $\mathbb{R}^3$;
- d) $\{(1, 1, 2), (1, 2, 5), (5, 3, 4)\}$ em $\mathbb{R}^3$;

► **Exercício 2.7** ... Calcule uma base de cada um dos subespaços que se seguem, e depois as coordenadas do vector u em cada uma das bases:

- a) $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z = 0\}$, $u = (1, 1, -2)$;
- b) $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = z\}$, $u = (3, 2, 4)$;
- b) $\mathbb{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y = 0 = x + y - z\}$, $u = (-1, 2, 3)$;

Aplicações Lineares

► **2.15** Uma aplicação $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ diz-se uma transformação linear, se $\mathbf{A}$ preserva as operações que definem a estrutura vectorial de $\mathbb{R}^3$, i.e.,:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \mathbf{A}(\mathbf{x}) + \mathbf{A}(\mathbf{y}) \quad (2.1.16)$$

$$\mathbf{A}(\lambda \mathbf{x}) = \lambda \mathbf{A}(\mathbf{x}) \quad (2.1.17)$$

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, e $\forall \lambda \in \mathbb{R}$.

► **2.16** Dada uma aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ define-se:

- o **núcleo de $\mathbf{A}$** :

$$\ker \mathbf{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}\} \quad (2.1.18)$$

- a **imagem de $\mathbf{A}$** :

$$\text{im } \mathbf{A} = \{\mathbf{y} : \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3, \text{ para algum } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3\} \quad (2.1.19)$$

- **Exercício 2.8** ... (i). Mostrar que $\ker \mathbf{A}$ e $\text{Im } \mathbf{A}$ são subespaços de $\mathbb{R}^3$.
 (ii). Mostrar que $\mathbf{A}$ é injectiva se e só se $\ker \mathbf{A} = \{\mathbf{0}\}$.

► **Exercício 2.9** ... Das aplicações que se seguem, indique aquelas que são lineares. Relativamente a essas, calcule o respectivo núcleo e diga quais as que são injectivas.

- a) $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; (x, y, z) \mapsto (x + y, x - y, x + z)$
- b) $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; (x, y) \mapsto (|x|, |y|, x - z^2)$
- c) $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; (x, y, z) \mapsto (x + 1, x - y, 3)$
- d) $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 ; (x, y, z) \mapsto (0, x + y, 0)$

► **Exercício 2.10** ... Sabendo que $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação linear, calcule em cada caso a imagem de um vector genérico:

- a) sendo que $\mathbf{A}(1, 0, 0) = (1, 1, -1)$, $\mathbf{A}(0, 1, 0) = (1, -2, 0)$; e $\mathbf{A}(0, 0, 1) = (1, 1, 1)$
- b) sendo $\mathbf{A}(1, -1, 1) = (1, 2, 0)$ e $\mathbf{A}(0, 3, -1) = (2, -2, 0)$; e $\mathbf{A}(1, 0, 0) = (1, 1, 1)$

Matriz de uma aplicação linear

► **2.17** Vamos nesta secção introduzir pela primeira vez as notações que serão usadas na parte mais avançada do curso. À primeira vista, estas notações parecem muito complicadas mas, após algum treino, veremos que elas facilitam substancialmente os cálculos e as deduções teóricas que vamos estudar. E não fossem elas usadas intensivamente por Einstein ... As principais diferenças são:

- para as coordenadas dos vectores usamos índices superiores $x^1, x^2, x^3, \dots$ em vez de índices inferiores $x_1, x_2, x_3, \dots$. O risco aqui é a possível confusão entre índices superiores $x^1, x^2, x^3, \dots$ e expoentes. Neste contexto, por exemplo, x^2 não representa “ x ao quadrado” mas sim a segunda componente do vector $\mathbf{x}$. Não faça pois essa confusão e esteja atento ao contexto.
- o uso de índices superiores e inferiores $A_1^1, A_2^3, A_3^3, \dots$ para as entradas de uma matriz, de tal forma que na matriz $\mathbf{A} = (A_j^i)$, o índice superior i é o **índice-linha** - o que numera as linhas - enquanto que o índice inferior j é o **índice-coluna** - o que numera as colunas:

$$A_{j \rightarrow}^{i \rightarrow} \begin{array}{l} \text{índice linha: numera as linhas de } A \\ \text{índice coluna: numera as colunas de } A \end{array}$$

► **2.18** Se $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3\}$ é uma base fixa de $\mathbb{R}^3$, podemos escrever que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_1) = A_1^1 \mathbf{u}_1 + A_1^2 \mathbf{u}_2 + A_1^3 \mathbf{u}_3 \quad (2.1.20)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_2) = A_2^1 \mathbf{u}_1 + A_2^2 \mathbf{u}_2 + A_2^3 \mathbf{u}_3 \quad (2.1.21)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}_3) = A_3^1 \mathbf{u}_1 + A_3^2 \mathbf{u}_2 + A_3^3 \mathbf{u}_3 \quad (2.1.22)$$

A matriz:

$$A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} \quad (2.1.23)$$

diz-se a **matriz de $\mathbf{A}$** na base $\mathcal{B}$, e nota-se por:

$$A = (\mathbf{A})_{\mathcal{B}}$$

► **2.19** Se as coordenadas de um vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$, na base $\mathcal{B}$, são $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$,
i.e., se:

$$\mathbf{x} = x^1 \mathbf{u}_1 + x^2 \mathbf{u}_2 + x^3 \mathbf{u}_3$$

então as coordenadas de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ na base $\mathcal{B}$ obtêm-se da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(x) &= \mathbf{A}(x^1 \mathbf{u}_1 + x^2 \mathbf{u}_2 + x^3 \mathbf{u}_3) \\ &= x^1 \mathbf{A}(\mathbf{u}_1) + x^2 \mathbf{A}(\mathbf{u}_2) + x^3 \mathbf{A}(\mathbf{u}_3) \\ &= x^1 (A_1^1 \mathbf{u}_1 + A_1^2 \mathbf{u}_2 + A_1^3 \mathbf{u}_3) + x^2 (A_2^1 \mathbf{u}_1 + A_2^2 \mathbf{u}_2 + A_2^3 \mathbf{u}_3) \\ &\quad + x^3 (A_3^1 \mathbf{u}_1 + A_3^2 \mathbf{u}_2 + A_3^3 \mathbf{u}_3) \\ &= (A_1^1 x^1 + A_2^1 x^2 + A_3^1 x^3) \mathbf{u}_1 + (A_1^2 x^1 + A_2^2 x^2 + A_3^2 x^3) \mathbf{u}_2 \\ &\quad + (A_1^3 x^1 + A_2^3 x^2 + A_3^3 x^3) \mathbf{u}_3 \end{aligned} \quad (2.1.24)$$

o que significa que as coordenadas de $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ na base $\mathcal{B}$:

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}))_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}}$$

se obtêm matricialmente através de:

$$\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \quad (2.1.25)$$

ou mais sucintamente:

$$(\mathbf{A}(\mathbf{x}))_{\mathcal{B}} = (\mathbf{A})_{\mathcal{B}} (\mathbf{x})_{\mathcal{B}} \quad (2.1.26)$$

ou ainda, em “**notação tensorial**”, pondo $(\mathbf{A})_{\mathcal{B}} = (A_j^i)$ e $y^i = (\mathbf{A}\mathbf{x})^i$:

$$y^i = \sum_{j=1}^3 A_j^i x^j = A_j^i x^j \quad (2.1.27)$$

onde, na segunda igualdade adoptamos a chamada “**convenção de Einstein**” que consiste em omitir o sinal de somatório, ficando subentendido que o facto de surgir o índice j repetido, uma vez em cima e outra em baixo, implica que se faça esse somatório no índice j .

Determinantes

► **2.20** Dada uma matriz $A = \begin{pmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{pmatrix}$, definimos o seu **determinante** $\det A$, como sendo o número real:

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} A_1^1 & A_2^1 & A_3^1 \\ A_1^2 & A_2^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} \\ &= A_1^1 \begin{vmatrix} A_2^2 & A_3^2 \\ A_2^3 & A_3^3 \end{vmatrix} - A_2^1 \begin{vmatrix} A_1^2 & A_3^2 \\ A_1^3 & A_3^3 \end{vmatrix} + A_3^1 \det \begin{vmatrix} A_1^2 & A_2^2 \\ A_1^3 & A_2^3 \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (2.1.28)$$

Veremos em breve uma interpretação geométrica para $\det A$.

► **2.21** Representemos por:

$$\mathbf{c}_1 = \begin{pmatrix} A_1^1 \\ A_1^2 \\ A_1^3 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{c}_2 = \begin{pmatrix} A_2^1 \\ A_2^2 \\ A_2^3 \end{pmatrix} \quad e \quad \mathbf{c}_3 = \begin{pmatrix} A_3^1 \\ A_3^2 \\ A_3^3 \end{pmatrix}$$

as colunas da matriz A , de tal forma que:

$$\det A = \det (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3) \quad (2.1.29)$$

É possível mostrar as seguintes propriedades do $\det$:

- (i). $\det (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3) \neq 0$ sse $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2, \mathbf{c}_3$ são linearmente independentes.
- (ii). $\det [\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3]$ muda de sinal, sempre que se permuta um par de colunas.
- (iii).

$$\det (\mathbf{c}_1 + \mathbf{c}'_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3) = \det (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3) + \det (\mathbf{c}'_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3) \quad (2.1.30)$$

$$\det (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 + \mathbf{c}'_2 \quad \mathbf{c}_3) = \det (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3) + \det (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}'_2 \quad \mathbf{c}_3) \quad (2.1.31)$$

$$\det (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3 + \mathbf{c}'_3) = \det (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3) + \det (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}'_3) \quad (2.1.32)$$

$$\begin{aligned} \det (\lambda \mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3) &= \lambda \det (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3) \\ &= \det (\mathbf{c}_1 \quad \lambda \mathbf{c}_2 \quad \mathbf{c}_3) \\ &= \det (\mathbf{c}_1 \quad \mathbf{c}_2 \quad \lambda \mathbf{c}_3) \quad \lambda \in \mathbb{R} \end{aligned} \quad (2.1.33)$$

e ainda que:

(iv).

$$\det \mathbf{I} = 1 \quad (2.1.34)$$

$$\det(AB) = \det A \det B \quad (2.1.35)$$

$$\det(A^{-1}) = (\det A)^{-1} \quad \forall A \in GL(3) \quad (2.1.36)$$

$$\det(P^{-1}AP) = \det A \quad \forall P \in GL(3) \quad (2.1.37)$$

$$\det(A) = \det(A^t) \quad (2.1.38)$$

onde A^t é a **transposta** de A .

(v). Além disso é possível provar que para uma matriz A :

$$A \text{ é inversível se e só se } \det A \neq 0$$

► **2.22** Finalmente, se $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma aplicação linear, define-se o respectivo **determinante** $\det \mathbf{A}$, como sendo o determinante da matriz de $\mathbf{A}$, relativamente a uma qualquer base de $\mathbb{R}^3$. Veremos, num próximo capítulo, que esta definição não depende da base escolhida.

Veremos em breve uma interpretação geométrica para $\det \mathbf{A}$.

► **Exercício 2.11** ... Calcule o determinante das aplicações lineares descritas no exercício ??.

Produto interno (euclideo)

► **2.23** Dados dois vectores $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, em $\mathbb{R}^3$, define-se o respectivo **produto interno (euclideo)**, como sendo o escalar $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \in \mathbb{R}$, dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3 \\ &= (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \\ &= \mathbf{x}^t \mathbf{y} \end{aligned} \quad (2.1.39)$$

► **2.24** O produto interno (euclideo), que acabámos de definir, verifica as propriedades seguintes:

- **é bilinear:**

$$\begin{aligned}(\mathbf{x} + \mathbf{y}) \cdot \mathbf{z} &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} + \mathbf{y} \cdot \mathbf{z} \\ \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} + \mathbf{x} \cdot \mathbf{z} \\ \lambda \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} &= \mathbf{x} \cdot \lambda \mathbf{y} = \lambda(\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\end{aligned}\tag{2.1.40}$$

- **é simétrica:**

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{x}\tag{2.1.41}$$

- **é não degenerada:**

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0 \quad \forall \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}\tag{2.1.42}$$

- **é definida positiva:**

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} \geq 0 \quad \text{e} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 0 \iff \mathbf{x} = \mathbf{0}\tag{2.1.43}$$

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3, \forall \lambda \in \mathbb{R}.$

► **Exercício 2.12** ... Verifique que o produto interno (2.1.39) satisfaz as propriedades acima referidas.

Norma (euclídeana)

► **2.25** Define-se a **norma euclídeana** $\|\mathbf{x}\|$, de um vector $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$, através da fórmula:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}\| &\equiv \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} \\ &= \sqrt{\mathbf{x}^t \mathbf{x}} \\ &= \sqrt{(x_1)^2 + (x_2)^2 + (x_3)^2}\end{aligned}\tag{2.1.44}$$

► **2.26** A norma euclídeana verifica as propriedades seguintes:

- **é positiva e não degenerada:**

$$\|\mathbf{x}\| \geq 0 \quad \text{e} \quad \|\mathbf{x}\| = 0 \quad \text{sse} \quad \mathbf{x} = \mathbf{0}\tag{2.1.45}$$

- **é homogênea (positiva):**

$$\|\lambda \mathbf{x}\| = |\lambda| \|\mathbf{x}\|\tag{2.1.46}$$

- verifica a **desigualdade triangular**:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\| \quad (2.1.47)$$

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2, \forall \lambda \in \mathbb{R}$.

Todas as propriedades são de demonstração imediata com excepção da desigualdade triangular, que resulta imediatamente de uma outra importante desigualdade que passamos a enunciar, e cuja prova é em tudo análoga à que foi feita no capítulo anterior:

- **Desigualdade de Cauchy-Schwarz**:

$$|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \quad (2.1.48)$$

$\forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^2$.

Ângulo, ortogonalidade

► **2.27** Dados dois vectores não nulos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, deduzimos da desigualdade de Cauchy-Schwarz que:

$$-1 \leq \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \leq 1 \quad (2.1.49)$$

o que permite definir o **ângulo (não orientado)** $\theta \in [0, \pi]$, entre os referidos vectores não nulos $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, como sendo o único $\theta \in [0, \pi]$, tal que:

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}}{\|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|} \in [-1, 1] \quad (2.1.50)$$

Portanto:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \cos \theta \quad (2.1.51)$$

Dois vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$ dizem-se **ortogonais** se $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 0$.

Rectas vectoriais e afins

► **2.28** Dado um vector não nulo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, o conjunto dos vectores $\mathbf{x}$ que são da forma:

$$\mathbf{x} = t\mathbf{v} \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.1.52)$$

diz-se a **recta (vectorial)** gerada por $\mathbf{v}$. Se $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, então (3.3.4) é equivalente ao sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 = t v_1 \\ x_2 = t v_2 \\ x_3 = t v_3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

que se dizem as **equações paramétricas** da referida recta.

► **2.29** Dado um ponto $A \in \mathbb{R}^3$ e um vector não nulo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, o conjunto dos pontos P que são da forma:

$$P = A + t\mathbf{v} \quad t \in \mathbb{R} \quad (2.1.53)$$

isto é, tais que $\overrightarrow{AP} = t\mathbf{v}$, diz-se a **recta (afim) que passa em A e é gerada por $\mathbf{v}$** .

Se $P = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$, e $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, então (2.1.53) é equivalente ao sistema de equações:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + t v_1 \\ x_2 = a_2 + t v_2 \\ x_3 = a_3 + t v_3 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

que se dizem as **equações paramétricas** da referida recta.

Resolvendo em ordem a t podemos escrever as chamadas **equações homogéneas** da referida recta, na forma:

$$\frac{x_1 - a_1}{v_1} = \frac{x_2 - a_2}{v_2} = \frac{x_3 - a_3}{v_3}, \quad \text{se } v_1 v_2 v_3 \neq 0 \quad (2.1.54)$$

Planos vectoriais e afins

► **2.30** Dados dois vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$, linearmente independentes, ao **subespaço gerado** por esses dois vectores, i.e., ao conjunto constituído por todas as combinações lineares de $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$:

$$\text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\} \equiv \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} = \lambda \mathbf{u} + \eta \mathbf{v} \quad \lambda, \eta \in \mathbb{R}\} \quad (2.1.55)$$

chama-se o **plano (vectorial)** gerado por $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$. Se P é um ponto genérico desse plano, com vector de posição $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, e se $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$,

$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$, a **equação vectorial**:

$$\mathbf{x} = \lambda \mathbf{u} + \eta \mathbf{v} \quad \lambda, \eta \in \mathbb{R}$$

que define o referido plano, é equivalente às seguintes **equações paramétricas**:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda u_1 + \eta v_1 \\ x_2 = \lambda u_2 + \eta v_2 \\ x_3 = \lambda u_3 + \eta v_3 \end{cases} \quad \lambda, \eta \in \mathbb{R} \quad (2.1.56)$$

► **2.31** Dado um ponto $A \in \mathbb{R}^3$ e dois vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$, linearmente independentes, ao conjunto dos pontos P que são da forma:

$$P = A + \lambda \mathbf{u} + \eta \mathbf{v} \quad \lambda, \eta \in \mathbb{R} \quad (2.1.57)$$

chama-se o **plano (afim) que passa em p e é gerada por u e v** .

As **equações paramétricas** de um tal plano, são do tipo:

$$\begin{cases} x_1 = a_1 + \lambda u_1 + \eta v_1 \\ x_2 = a_2 + \lambda u_2 + \eta v_2 \\ x_3 = a_3 + \lambda u_3 + \eta v_3 \end{cases} \quad \lambda, \eta \in \mathbb{R} \quad (2.1.58)$$

► **2.32** Dado um vector não nulo $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$, o conjunto dos pontos P cujos vectores de posição $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ são ortogonais a $\mathbf{n}$:

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = 0\} \quad (2.1.59)$$

formam um subespaço de dimensão 2 em $\mathbb{R}^3$, que se diz o **plano (vectorial) ortogonal a $\mathbf{n}$** . Se $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ e se $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, a equação $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = 0$, é equivalente à seguinte **equação cartesiana**:

$$n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 = 0 \quad (2.1.60)$$

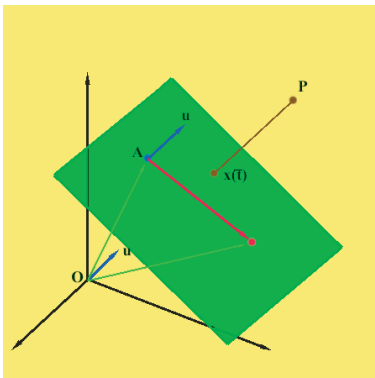
► **2.33** Dado um ponto arbitrário $A \in \mathbb{R}^3$ e um vector não nulo $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$, o conjunto dos pontos P que verificam a equação:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad (2.1.61)$$

diz-se o **plano afim que passa em A e é ortogonal a $\mathbf{n}$** . Se $\overrightarrow{OP} = \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix}$, a **equação cartesiana** de um tal plano é do tipo:

$$n_1 (x_1 - a_1) + n_2 (x_2 - a_2) + n_3 (x_3 - a_3) = 0 \quad (2.1.62)$$

► **2.34 Exemplo ...** Calcular a distância entre um ponto P e um hiperplano afim em $\mathbb{E}^n$.



Res... Suponhamos que esse hiperplano é perpendicular ao vector $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ e passa num ponto $\mathbf{a}$ e, portanto, tem equação:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{a}) \cdot \mathbf{u} = 0$$

ou

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} + c = 0, \quad c = -\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}$$

A recta que passa em $P \simeq \overrightarrow{OP} = \mathbf{p}$ e tem a direcção do vector $\mathbf{u}$, tem equação:

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{p} + t\mathbf{u}$$

O ponto desta recta que pertence ao plano referido, corresponde ao valor do parâmetro $\bar{t}$ que verifica:

$$0 = \mathbf{x}(\bar{t}) \cdot \mathbf{u} + c = (\mathbf{p} + \bar{t}\mathbf{u}) \cdot \mathbf{u} + c = \mathbf{p} \cdot \mathbf{u} + \bar{t}\|\mathbf{u}\|^2 + c \Rightarrow \bar{t} = -\frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} + c}{\|\mathbf{u}\|^2}$$

A distância entre um ponto $P \simeq \mathbf{p}$ e o hiperplano afim é pois dada por:

$$d = \|\mathbf{p} - \mathbf{x}(\bar{t})\| = \left\| \mathbf{p} - \mathbf{p} + \frac{\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} + c}{\|\mathbf{u}\|^2} \mathbf{u} \right\| = \frac{|\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} + c|}{\|\mathbf{u}\|}$$

Assim por exemplo:

- No plano, a distância entre um ponto $P = (\alpha, \beta)$ e a recta afim $ax + by + c = 0$ é:

$$d = \frac{|\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} + c|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{|(\alpha, \beta) \cdot (a, b) + c|}{\|(a, b)\|} = \frac{|a\alpha + b\beta + c|}{(a^2 + b^2)^{1/2}}$$

- No espaço, a distância entre um ponto $P = (\alpha, \beta, \gamma)$ e o plano afim $ex + fy + gz + h = 0$ é:

$$d = \frac{|\mathbf{p} \cdot \mathbf{u} + c|}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{|(\alpha, \beta, \gamma) \cdot (e, f, g) + h|}{\|(e, f, g)\|} = \frac{|e\alpha + f\beta + g\gamma + h|}{(e^2 + f^2 + g^2)^{1/2}}$$

► **2.35 Exemplo** ... Calcular a distância entre um ponto P e uma recta afim em $\mathbb{E}^3$, quando:

1. essa recta é definida parametricamente.
2. essa recta é definida como intersecção de dois planos afins.

Produto vectorial em $\mathbb{E}^3$

► **2.36** Definamos agora o chamado **produto vectorial de dois vectores no espaço Euclideo $\mathbb{E}^3$** :

Dados dois vectores $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$, em $\mathbb{E}^3$, define-se o **produto vectorial**, $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, de $\mathbf{x}$ por $\mathbf{y}$, como sendo o seguinte vector de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} \equiv (x_2 y_3 - x_3 y_2)\mathbf{i} + (x_3 y_1 - x_1 y_3)\mathbf{j} + (x_1 y_2 - x_2 y_1)\mathbf{k} \quad (2.1.63)$$

O produto vectorial $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, pode ser obtido desenvolvendo segundo a primeira linha, o determinante formal:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

► **2.37** O produto vectorial verifica as propriedades seguintes:

- é **bilinear**:

$$\begin{aligned} (\mathbf{x} + \mathbf{y}) \times \mathbf{z} &= \mathbf{x} \times \mathbf{z} + \mathbf{y} \times \mathbf{z} \\ \mathbf{x} \times (\mathbf{y} + \mathbf{z}) &= \mathbf{x} \times \mathbf{y} + \mathbf{x} \times \mathbf{z} \\ \lambda \mathbf{x} \times \mathbf{y} &= \mathbf{x} \times \lambda \mathbf{y} = \lambda (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \end{aligned} \quad (2.1.64)$$

- é **antissimétrico**:

$$\mathbf{x} \times \mathbf{y} = -\mathbf{y} \times \mathbf{x} \quad (2.1.65)$$

- verifica a **identidade de Jacobi**:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} + (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) \times \mathbf{x} + (\mathbf{z} \times \mathbf{x}) \times \mathbf{y} = \mathbf{0} \quad (2.1.66)$$

Além disso, se $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ e $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^3$, são ambos não nulos, então:

- $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ é perpendicular a $\mathbf{x}$ e a $\mathbf{y}$, i.e.:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{x} = 0 = (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \cdot \mathbf{y} \quad (2.1.67)$$

Se $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são linearmente independentes, $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ é perpendicular ao plano gerado por $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

-

$$\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\| \sin \theta \quad (2.1.68)$$

onde θ é o ângulo entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$. Portanto, $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$ é igual à área do paralelogramo cujos lados adjacentes são $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$.

- $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = \mathbf{0} \Leftrightarrow \mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ são linearmente dependentes.
- O produto vectorial não é associativo. De facto, são válidas as seguintes **identidades de Lagrange**:

$$(\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \times \mathbf{z} = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{y} \cdot \mathbf{z})\mathbf{x} \quad (2.1.69)$$

enquanto que:

$$\mathbf{x} \times (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) = (\mathbf{x} \cdot \mathbf{z})\mathbf{y} - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y})\mathbf{z} \quad (2.1.70)$$

► **2.38** Em particular, se consideramos o paralelogramo de lados adjacentes $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ 0 \end{pmatrix}$, contido no plano $x_3 = 0$, vemos que a respectiva área é dada por:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\| &= \left| \det \begin{pmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_1 & x_2 & 0 \\ y_1 & y_2 & 0 \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ y_1 & y_2 \end{pmatrix} \right| \end{aligned} \quad (2.1.71)$$

► **2.39** Uma equação (cartesiana) para o plano vectorial $\text{span}\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$, gerado por dois vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$, linearmente independentes, é:

$$\mathbf{x} \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = 0 \quad (2.1.72)$$

Produto misto (ou triplo) em $\mathbb{R}^3$. Interpretação geométrica do det

► **2.40** Definamos agora, ainda em $\mathbb{E}^3$, o chamado **produto misto (ou triplo)**.

Dados três vectores $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ em $\mathbb{R}^3$, define-se o **produto misto (ou triplo)** $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$, de $\mathbf{x}, \mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ (por esta ordem), através de:

$$[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] \equiv \mathbf{x} \cdot (\mathbf{y} \times \mathbf{z}) \quad (2.1.73)$$

É fácil ver que $[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]$ é dado por:

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] &= \det [\mathbf{x} \ \mathbf{y} \ \mathbf{z}] \\ &= \det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (2.1.74)$$

► 2.41 O produto misto verifica as propriedades seguintes:

•

$$\begin{aligned} [\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}] &= [\mathbf{y}, \mathbf{z}, \mathbf{x}] = [\mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{y}] = -[\mathbf{y}, \mathbf{x}, \mathbf{z}] \\ &= -[\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{y}] = -[\mathbf{z}, \mathbf{y}, \mathbf{x}] \end{aligned} \quad (2.1.75)$$

- O volume $\text{vol}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z})$, do paralelepípedo de lados adjacentes $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^3$, é igual ao módulo do produto misto:

$$\text{vol}(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}) = |[\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}]| \quad (2.1.76)$$

De facto, o volume de um paralelepípedo é igual ao produto da área da base pela sua altura. A base é o paralelogramo de lados adjacentes $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$, e por isso, a sua área é $\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|$. A altura é igual à norma da projecção de $\mathbf{z}$ sobre um vector perpendicular à base. Mas $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$ é perpendicular à base, e atendendo a (2.1.87), a projecção de $\mathbf{z}$ sobre $\mathbf{x} \times \mathbf{y}$, é igual a:

$$\frac{\mathbf{z} \cdot (\mathbf{x} \times \mathbf{y})}{\|\mathbf{x} \times \mathbf{y}\|^2} (\mathbf{x} \times \mathbf{y}) \quad (2.1.77)$$

donde se deduz facilmente o resultado .

Quando $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_3$ são linearmente independentes, de tal forma que:

$$\det [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3] \neq 0$$

dizemos que a **base ordenada** $\{\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{x}_3\}$ é

- **positiva** se $\det [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3] > 0$, e
- **negativa** se $\det [\mathbf{x}_1 \ \mathbf{x}_2 \ \mathbf{x}_3] < 0$.

Interpretação geométrica de $\det A$

► 2.42 Consideremos agora uma aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$. A imagem do cubo $\mathcal{Q} \subset \mathbb{R}^3$, gerado pelos vectores da base canónica (que é positiva) $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$:

$$\mathcal{Q} = \{a\mathbf{e}_1 + b\mathbf{e}_2 + c\mathbf{e}_3 : 0 \leq a, b, c \leq 1\}$$

é o paralelepípedo $\mathbf{A}(\mathcal{Q})$, de lados adjacentes $\mathbf{A}(\mathbf{e}_1)$, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_2)$ e $\mathbf{A}(\mathbf{e}_3)$.

Pondo $\mathbf{A}(\mathbf{e}_1) = a_1^1 \mathbf{e}_1 + a_1^2 \mathbf{e}_2 + a_1^3 \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} a_1^1 \\ a_1^2 \\ a_1^3 \end{bmatrix}$, $\mathbf{A}(\mathbf{e}_2) = a_2^1 \mathbf{e}_1 + a_2^2 \mathbf{e}_2 + a_2^3 \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} a_2^1 \\ a_2^2 \\ a_2^3 \end{bmatrix}$, e $\mathbf{A}(\mathbf{e}_3) = a_3^1 \mathbf{e}_1 + a_3^2 \mathbf{e}_2 + a_3^3 \mathbf{e}_3 = \begin{bmatrix} a_3^1 \\ a_3^2 \\ a_3^3 \end{bmatrix}$ sabemos que o volume deste paralelepípedo é igual a:

$$\begin{aligned} \text{vol } \mathbf{A}(\mathcal{Q}) &= |[\mathbf{A}(\mathbf{e}_1), \mathbf{A}(\mathbf{e}_2), \mathbf{A}(\mathbf{e}_3)]| \\ &= |\det [\mathbf{A}(\mathbf{e}_1) \ \mathbf{A}(\mathbf{e}_2) \ \mathbf{A}(\mathbf{e}_3)]| \\ &= \left| \det \begin{bmatrix} a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 \\ a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 \\ a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 \end{bmatrix} \right| \\ &= |\det \mathbf{A}| \end{aligned} \quad (2.1.78)$$

Portanto:

$$\text{vol } \mathbf{A}(\mathcal{Q}) = |\det \mathbf{A}| \quad (2.1.79)$$

► **2.43** Mais geralmente, se $\mathcal{P}$ é um paralelepípedo gerado pelos vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$, então a imagem $\mathbf{A}(\mathcal{P})$ é o paralelepípedo gerado por $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, $\mathbf{A}(\mathbf{y})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{z})$, e é fácil provar que o volume dessa imagem é igual a:

$$\begin{aligned} \text{vol } \mathbf{A}(\mathcal{P}) &= |[\mathbf{A}(\mathbf{x}), \mathbf{A}(\mathbf{y}), \mathbf{A}(\mathbf{z})]| \\ &= |\det [\mathbf{A}(\mathbf{x}) \ \mathbf{A}(\mathbf{y}) \ \mathbf{A}(\mathbf{z})]| \\ &= |\det \mathbf{A}| \text{ vol } (\mathcal{P}) \end{aligned} \quad (2.1.80)$$

Em particular, se os vectores $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ e $\mathbf{z}$ são linearmente independentes, de tal forma que $\text{vol } \mathcal{P} \neq 0$, então:

$$|\det \mathbf{A}| = \frac{\text{vol } \mathbf{A}(\mathcal{P})}{\text{vol } \mathcal{P}} \quad (2.1.81)$$

► **2.44** Diz-se que uma aplicação linear inversível $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$

- **preserva a orientação** (ou é positiva) se $\det \mathbf{A} > 0$, e que
- **inverte a orientação** (ou é negativa) se $\det \mathbf{A} < 0$

Valores e vectores próprios

► **2.45** Seja $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma aplicação linear. Um escalar $\lambda \in \mathbb{R}$ diz-se um **valor próprio** de $\mathbf{A}$ se existir um vector não nulo $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ tal que:

$$\mathbf{A}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} \quad (2.1.82)$$

Neste caso, o vector não nulo $\mathbf{v}$, diz-se um **vector próprio** pertencente ao valor próprio λ .

► **2.46** O conjunto constituído pelo vector nulo $\mathbf{0}$ e por todos os vectores próprios pertencentes a um certo valor próprio λ , de $\mathbf{A}$, é um subespaço de $\mathbb{R}^3$, chamado o **subespaço próprio** de $\mathbf{A}$, pertencente ao valor próprio λ , e nota-se por:

$$\mathbb{E}_{\mathbf{A}}(\lambda) = \mathbb{E}(\lambda) = \{\mathbf{x} : \mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x}\} \quad (2.1.83)$$

A restrição de $\mathbf{A}$ a $\mathbb{E}(\lambda)$ é pois uma **homotetia** de razão λ (eventualmente λ pode ser 0), i.e.:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \lambda \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{E}(\lambda)$$

► **2.47** Em particular, se $\lambda = 0$ é valor próprio de $\mathbf{A}$, isto significa que o núcleo de $\mathbf{A}$;

$$\ker \mathbf{A} = \mathbb{E}_{\mathbf{A}}(0)$$

não se reduz ao vector nulo $\mathbf{0}$, e portanto $\mathbf{A}$ é não inversível (ou **singular**), ou de forma equivalente, $\det \mathbf{A} = 0$.

Quando $\lambda \neq 0$, dizer que λ é valor próprio de $\mathbf{A}$, é equivalente a dizer que 0 é valor próprio de $\mathbf{A} - \lambda \text{Id}$, o que, pelo parágrafo anterior, é equivalente a dizer que $\mathbf{A} - \lambda \text{Id}$ é não inversível (ou **singular**), ou ainda que:

$$\det(\mathbf{A} - \lambda \text{Id}) = 0 \quad (2.1.84)$$

► **2.48** O polinómio $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \text{Id})$ diz-se o **polinómio característico** de $\mathbf{A}$. Portanto as raízes reais da chamada **equação característica** de $\mathbf{A}$:

$$p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \text{Id}) = 0 \quad (2.1.85)$$

(se existirem), são exactamente os valores próprios (reais) de $\mathbf{A}$.

Num capítulo posterior demonstrar-se-á que o polinómio característico de uma aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, não depende da representação matricial de $\mathbf{A}$.

► **2.49** Note ainda que o polinómio característico $p(\lambda) = \det(\mathbf{A} - \lambda \text{Id})$, de uma aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é sempre um polinómio do 3.º grau, do tipo:

$$p(\lambda) = -\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d \quad b, c, d \in \mathbb{R}$$

e por isso admite sempre uma raiz real $\lambda \in \mathbb{R}$ (eventualmente nula). Se $\lambda \neq 0$, concluímos portanto que, neste caso, existe sempre um subespaço próprio invariante $\mathbb{E}(\lambda) \subseteq \mathbb{R}^3$, de dimensão superior ou igual a 1, tal que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbb{E}(\lambda)) &\subseteq \mathbb{E}(\lambda) \\ \mathbf{A}(\mathbf{x}) &= \lambda \mathbf{x} \quad \mathbf{x} \in \mathbb{E}(\lambda) \end{aligned}$$

Exemplo...

Calcule os valores e vectores próprios (reais) da aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuja matriz na base canónica de $\mathbb{R}^3$ é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

A equação característica de $\mathbf{A}$ é:

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(\mathbf{A} - \lambda \text{Id}) \\ &= \begin{vmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ -5 & 2-t & 0 \\ 2 & 3 & 7-t \end{vmatrix} \\ &= (1-t)(2-t)(7-t) = 0 \end{aligned} \quad (2.1.86)$$

cujas raízes reais (os valores próprios de $\mathbf{A}$) são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 7$.

Para calcular os vectores próprios $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, pertencentes ao valor próprio $\lambda_2 = 2$, devemos resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ -5 & 2-2 & 0 \\ 2 & 3 & 7-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

isto é:

$$\begin{cases} -x_1 & = & 0 \\ -5x_1 & = & 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 & = & 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é:

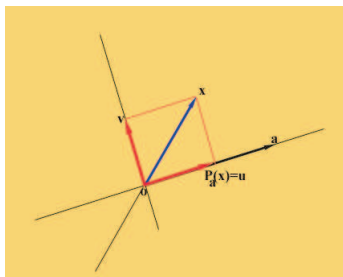
$$\begin{cases} x_1 & = & 0 \\ x_2 & = & -\frac{5}{3}s \\ x_3 & = & s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Portanto os vectores próprios de $\mathbf{A}$, pertencentes ao valor próprio $\lambda_2 = 2$, são da forma:

$$s \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Procedendo da mesma forma relativamente aos outros valores próprios $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_3 = 7$, podemos calcular os correspondentes vectores próprios.

projecção ortogonal sobre uma recta gerada por $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$



Sejam $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ e $\mathbf{x}$ dois vectores em $\mathbb{R}^3$, com $\mathbf{a}$ não nulo. Então existe um único vector $\mathbf{u}$, na recta gerada por $\mathbf{a}$, e um único vector $\mathbf{v}$, ortogonal a $\mathbf{a}$, tais que $\mathbf{x} = \mathbf{u} + \mathbf{v}$. O vector $\mathbf{u}$, notado por $\mathbf{P}_a(\mathbf{x})$, diz-se a **projecção ortogonal** de $\mathbf{x}$ sobre a recta gerada por $\mathbf{a}$, e é dado por:

$$\mathbf{P}_a(\mathbf{x}) = \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{a}}{\|\mathbf{a}\|^2} \mathbf{a} \quad (2.1.87)$$

► **2.50** A aplicação $\mathbf{P}_a : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (7.7.7), é linear. Note que $\mathbf{P}_a^2 = \mathbf{P}_a$. Uma vez que $\mathbf{P}_a(\mathbf{a}) = \mathbf{a}$ vemos que $\mathbf{a}$ é vector próprio de $\mathbf{P}_a$, pertencente ao valor próprio 1. Por outro lado, se considerarmos um qualquer vector $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ ortogonal a $\mathbf{a}$ (i.e.: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$), vemos que $\mathbf{P}_a(\mathbf{b}) = \mathbf{0}$ e portanto:

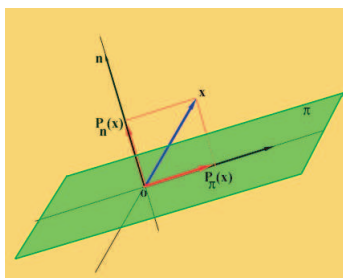
$$\ker \mathbf{P}_a = \text{span}\{\mathbf{b}\} = \{\mathbf{b} \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} = 0\} = \mathbf{a}^\perp$$

é o plano vectorial ortogonal a $\mathbf{a}$.

A matriz de $\mathbf{P}_a$ numa base $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, onde $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ geram o $\ker \mathbf{P}_a$, é portanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Projecção ortogonal sobre um plano vectorial, em $\mathbb{E}^3$



Consideremos um plano vectorial ortogonal a um vector $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ (se esse plano é gerado por dois vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ linearmente independentes, podemos tomar $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$). Notemos esse plano por $\pi = \mathbf{n}^\perp$. Dado um vector $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, ao vector:

$$\mathbf{P}_\pi(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} - \mathbf{P}_n(\mathbf{x})$$

chamamos a **projecção ortogonal** de $\mathbf{x}$ sobre o plano vectorial $\pi = \mathbf{n}^\perp$, ortogonal a $\mathbf{n}$.

► **2.51** De acordo com (2.1.87), temos que:

$$\mathbf{P}_\pi(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{x} - \mathbf{P}_n(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} \mathbf{n}$$

isto é:

$$\mathbf{P}_\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} \mathbf{n} \quad (2.1.88)$$

A aplicação $\mathbf{P}_\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por (7.7.8), é linear. Note que $\mathbf{P}_\pi^2 = \mathbf{P}_\pi$. Se $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = 0$, i.e., se $\mathbf{x}$ é ortogonal a $\mathbf{n}$, então $\mathbf{P}_\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$, enquanto que, por outro lado, $\mathbf{P}_\pi(\mathbf{n}) = \mathbf{0}$. Portanto vemos que:

$$\ker \mathbf{P}_\pi = \text{span}\{\mathbf{n}\}$$

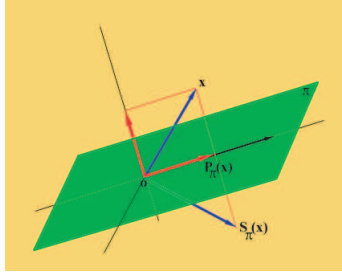
e:

$$\mathbf{P}_\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \pi = \mathbf{n}^\perp$$

Portanto a matriz de $\mathbf{P}_\pi$ numa base $\{\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, onde $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ geram o plano π , é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexão num plano vectorial



Consideremos novamente um plano vectorial $\pi = \mathbf{n}^\perp$, ortogonal a um vector $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^3 - \{\mathbf{0}\}$ (se esse plano é gerado por dois vectores $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ linearmente independentes, podemos tomar $\mathbf{n} = \mathbf{u} \times \mathbf{v}$).

A **simetria** relativamente ao plano vectorial $\pi = \mathbf{n}^\perp$, ou **reflexão** em π , é a aplicação linear $\mathbf{S}_\pi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definida pela condição:

$$\frac{1}{2}(\mathbf{S}_\pi(\mathbf{x}) + \mathbf{x}) = \mathbf{P}_\pi(\mathbf{x}) \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.1.89)$$

isto é, o ponto médio do segmento que une $\mathbf{x}$ a $\mathbf{S}_\pi(\mathbf{x})$ deve ser igual à projecção de $\mathbf{x}$ sobre o plano vectorial $\pi = \mathbf{n}^\perp$.

► **2.52** Atendendo a (2.1.88), vemos que:

$$\mathbf{S}_\pi(\mathbf{x}) = 2\mathbf{P}_\pi(\mathbf{x}) - \mathbf{x} = 2\left(\mathbf{x} - \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} \mathbf{n}\right) - \mathbf{x} = \mathbf{x} - 2 \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} \mathbf{n}$$

isto é:

$$\mathbf{S}_\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} - 2 \frac{\mathbf{x} \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{n}\|^2} \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.1.90)$$

Note que $\mathbf{S}_\pi^2 = \text{Id}$. Além disso, é fácil ver que :

$$\mathbf{S}_\pi(\mathbf{n}) = -\mathbf{n}$$

o que significa que $\mathbf{n}$ é vector próprio de $\mathbf{S}_\pi$, pertencente ao valor próprio -1 , e ainda que:

$$\mathbf{S}_\pi(\mathbf{x}) = \mathbf{x} \quad \forall \mathbf{x} \in \pi$$

Portanto a matriz de $\mathbf{S}_\pi$ numa base $\{\mathbf{n}, \mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2\}$, onde $\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2$ geram o plano π , é:

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

o que mostra que $\det \mathbf{S}_\pi = -1 < 0$, i.e., $\mathbf{S}_\pi$ inverte orientação.

Isometrias em $\mathbb{R}^3$. Rotações. Os grupos $\mathcal{O}(3)$ e $\mathcal{SO}(3)$

► **2.53** Uma aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ diz-se uma **transformação ortogonal** ou uma **isometria** de $\mathbb{R}^3$, se $\mathbf{A}$ preserva o produto interno (Euclideano) usual de $\mathbb{R}^3$, i.e.:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{y}) = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.1.91)$$

Esta condição é equivalente a:

$$\|\mathbf{A}(\mathbf{x})\| = \|\mathbf{x}\| \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^3 \quad (2.1.92)$$

i.e., $\mathbf{A}$ preserva os comprimentos dos vectores. Se A é a matriz de uma tal transformação ortogonal, relativamente a uma qualquer base ortonormada $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ de $\mathbb{R}^3$ (por exemplo, a base canónica), A é uma matriz ortogonal, isto é, $A^t A = \mathbf{I}$. Portanto $A \in \mathcal{O}(3)$. Vejamos como é a forma geral de uma tal matriz.

► **2.54** Se $\mathbf{c}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{e}_1), \mathbf{c}_2 = \mathbf{A}(\mathbf{e}_2), \mathbf{c}_3 = \mathbf{A}(\mathbf{e}_3)$ são as colunas de A , então:

$$\mathbf{c}_i \cdot \mathbf{c}_j = \delta_{ij}$$

o que significa que $\mathbf{c}_1, \mathbf{c}_2$ e $\mathbf{c}_3$ são ortonormais. Portanto $\mathbf{A}$ transforma bases ortonormadas em bases ortonormadas, preservando ou invertendo orientação, conforme $\det \mathbf{A} = +1$ ou $\det \mathbf{A} = -1$, respectivamente. Por exemplo, a reflexão $\mathbf{S}_\pi$, descrita em (2.1.89), é uma transformação ortogonal com $\det$ igual a -1 .

► **2.55** Como já vimos $\mathbf{A}$ admite sempre um valor próprio real. De facto, se $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ é uma isometria então esse valor próprio (real) ou é 1 ou -1 . Com efeito, se $\lambda \in \mathbb{R}$ é valor próprio de $\mathbf{A}$, e $\mathbf{v}$ é um vector próprio pertencente a λ , temos que:

$$\|\mathbf{v}\| = \|\mathbf{A}(\mathbf{v})\| = \|\lambda \mathbf{v}\| = |\lambda| \|\mathbf{v}\|$$

o que implica que $|\lambda| = 1$ (uma vez que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$), i.e., $\lambda = \pm 1$.

Analisemos agora a estrutura das isometrias de $\mathbb{R}^3$ com determinante igual a 1, isto é, a estrutura das matrizes $A \in \mathcal{SO}(3)$. Seja $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ uma tal isometria, com:

$$\det \mathbf{A} = 1$$

Pelo parágrafo anterior, $\mathbf{A}$ admite o valor próprio 1 ou -1 . Vamos analisar cada um destes casos:

(i). $\lambda = 1$ é valor próprio de $\mathbf{A}$ (e $\det \mathbf{A} = 1$) ... Seja $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ um vector próprio de $\mathbf{A}$, pertencente ao valor próprio 1:

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = \mathbf{u}$$

Podemos supôr também que $\|\mathbf{u}\| = 1$. Se $\Pi = \mathbf{u}^\perp$ é o plano ortogonal a $\mathbf{u}$, é fácil ver que $\mathbf{A}$ deixa Π invariante:

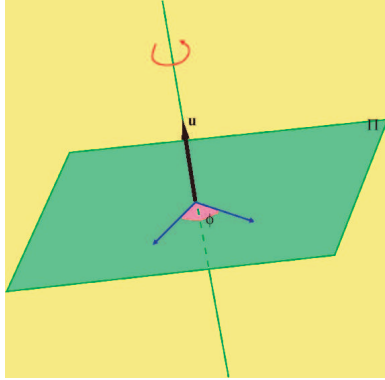
$$\mathbf{A}(\Pi) \subseteq \Pi$$

e que a restrição de $\mathbf{A}$ a Π é uma isometria de Π . Portanto existe uma base ortonormada $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ de Π , relativamente à qual a matriz da restrição de $\mathbf{A}$ a Π , é de um dos seguintes dois tipos:

$$(i1). \quad \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.1.93)$$

ou:

$$(i2). \quad \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.1.94)$$



A matriz de $\mathbf{A}$, relativamente à base ortonormada $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ de $\mathbb{R}^3$ é portanto no caso **(i1)**:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.1.95)$$

que tem de facto determinante 1, e representa uma rotação em torno da recta gerada por $\mathbf{u} \in \Pi$ (que se diz o **eixo da rotação**), de ângulo φ .

Por outro lado, no caso **(i2)**, a matriz de $\mathbf{A}$, relativamente à base ortonormada $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ de $\mathbb{R}^3$, é:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.1.96)$$

que tem determinante -1 e por isso não pode ser a matriz de $\mathbf{A}$.

(i). $\lambda = -1$ é valor próprio de $\mathbf{A}$ (e $\det \mathbf{A} = 1$) ... Seja $\mathbf{u} \neq \mathbf{0}$ um vector próprio de $\mathbf{A}$, pertencente ao valor próprio -1 :

$$\mathbf{A}(\mathbf{u}) = -\mathbf{u}$$

Podemos supôr também que $\|\mathbf{u}\| = 1$.

Mais uma vez, se $\Pi = \mathbf{u}^\perp$ é o plano ortogonal a $\mathbf{u}$, $\mathbf{A}$ deixa Π invariante:

$$\mathbf{A}(\Pi) \subseteq \Pi$$

e a restrição de $\mathbf{A}$ a Π é uma isometria de Π . Portanto existe uma base ortonormada $\{\mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ de Π , relativamente à qual a matriz da restrição de $\mathbf{A}$ a Π , é de um dos seguintes dois tipos:

$$(ii\ 1). \quad \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi \\ \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.1.97)$$

ou:

$$(ii\ 2). \quad \begin{bmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ \sin \varphi & -\cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.1.98)$$

Como vimos anteriormente, esta é uma matriz de uma simetria relativamente a uma recta no plano Π , e portanto podemos escolher uma base ortonormada $\{\mathbf{e}', \mathbf{f}'\}$ para Π , relativamente à qual a matriz dessa simetria é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

A matriz de $\mathbf{A}$, relativamente à base ortonormada $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}, \mathbf{f}\}$ de $\mathbb{R}^3$ é portanto no caso (ii 1):

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.1.99)$$

que tem determinante -1 , e por isso não pode ser a matriz de $\mathbf{A}$.

Finalmente no caso (ii 2), a matriz de $\mathbf{A}$, relativamente à base ortonormada $\{\mathbf{u}, \mathbf{e}', \mathbf{f}'\}$ de $\mathbb{R}^3$, é:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (2.1.100)$$

que tem determinante 1 , e representa uma rotação em torno da recta gerada por $\mathbf{e}' \in \Pi$, de ângulo π .

► **2.56 Resumindo** ... Uma isometria $\mathbf{A}$ em $\mathbb{R}^3$, com $\det \mathbf{A} = 1$, é sempre uma rotação em torno de uma certa recta $\mathbb{R}\{\mathbf{u}\}$ (o eixo de rotação), e de ângulo

φ no sentido directo. Representamos uma tal rotação por $\mathbf{R}_{(\mathbf{u};\varphi)}$. As matrizes das rotações em torno dos eixos coordenados de $\mathbb{R}^3$, e de ângulo φ no sentido directo, são respectivamente:

$$\mathbf{R}_1(\varphi) = \mathbf{R}_{(\mathbf{e}_1;\varphi)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\sin \varphi \\ 0 & \sin \varphi & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.1.101)$$

$$\mathbf{R}_2(\varphi) = \mathbf{R}_{(\mathbf{e}_2;\varphi)} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & 0 & \sin \varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \quad (2.1.102)$$

$$\mathbf{R}_3(\varphi) = \mathbf{R}_{(\mathbf{e}_3;\varphi)} = \begin{bmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.103)$$

Os grupos $O(3)$ e $SO(3)$

O conjunto de todas as transformações ortogonais de $\mathbb{R}^3$, constituem um grupo que se diz o **grupo ortogonal** $O(3)$. Este grupo é isomorfo ao grupo das matrizes ortogonais, também notado por $O(3)$.

O subgrupo de $O(3)$ constituído por todas as transformações ortogonais de $\mathbb{R}^3$, que têm determinante 1 (isto é, constituído por todas as rotações em $\mathbb{R}^3$) diz-se o **grupo ortogonal especial** e nota-se por $SO(3)$. Este grupo é isomorfo ao grupo das matrizes ortogonais de determinante 1, também notado por $SO(3)$.

► **Exercício 2.13** ... Demonstre as afirmações anteriores.

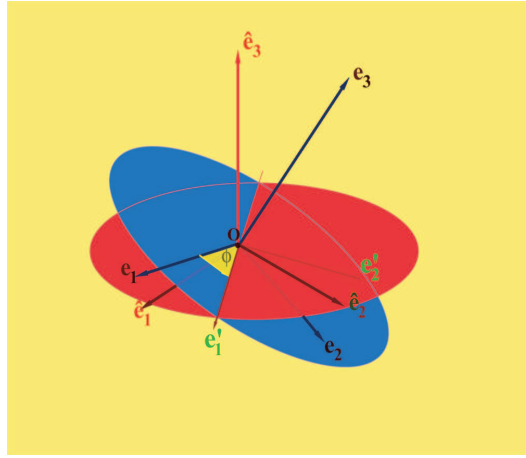
* Ângulos de Euler

► **2.57 Ângulos de Euler** ... Qualquer rotação pode ser escrita como um produto de rotações dos tipos acima indicados.

Com efeito consideremos uma qualquer rotação $\mathbf{R} \in SO(3)$ e duas bases ortonormadas de $\mathbb{R}^3$:

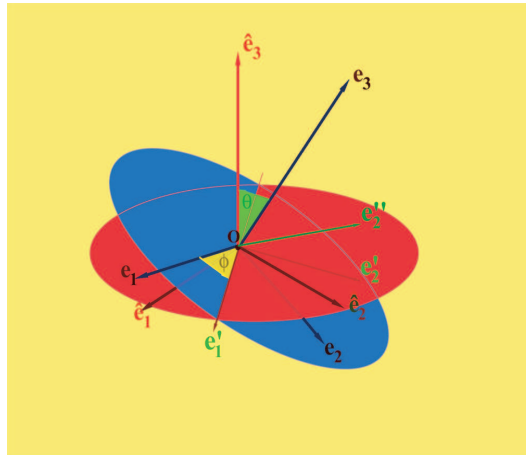
$$\begin{aligned} \mathcal{B} &= \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\} \\ \widehat{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \mathbf{R} &= \{\widehat{\mathbf{e}}_1, \widehat{\mathbf{e}}_2, \widehat{\mathbf{e}}_3\} \end{aligned} \quad (2.1.104)$$

com a mesma orientação. A base $\widehat{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \mathbf{R}$ pode ser obtida através das seguintes três fases sucessivas:



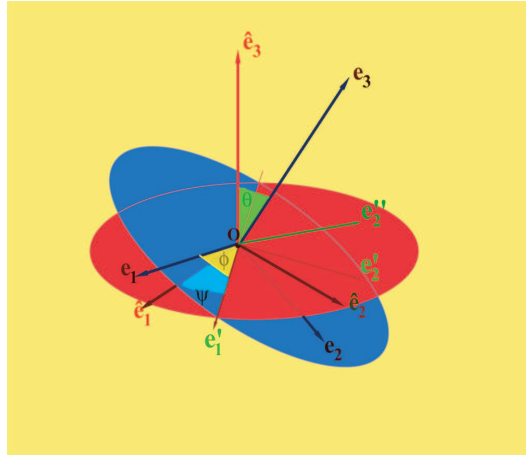
1. Obter uma base ortonormada $\mathcal{B}' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3\}$, através de uma rotação $\mathbf{R}_3(\phi)$, em torno de $\mathbf{e}_3$ e de ângulo ϕ , onde ϕ é o ângulo entre $\mathbf{e}_1$ e a chamada **linha dos nodos** (a recta de intersecção dos planos gerados respectivamente por $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ e $\{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2\}$):

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \mathbf{R}_3(\phi) \quad (2.1.105)$$



2. Obter uma base ortonormada $\mathcal{B}'' = \{\mathbf{e}'_1, \mathbf{e}'_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$, através de uma rotação $\mathbf{R}_2(\theta)$, em torno da linha dos nodos, gerada por $\mathbf{e}'_1$, e de ângulo θ , onde θ é o ângulo entre $\mathbf{e}_3$ e $\hat{\mathbf{e}}_3$:

$$\mathcal{B}'' = \mathcal{B}' \mathbf{R}_2(\theta) \quad (2.1.106)$$



3. Finalmente, obter a base ortonormada $\hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B} \mathbf{R} = \{\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3\}$, através de uma rotação $\mathbf{R}_2(\varphi)$, em torno de $\hat{\mathbf{e}}_3$, e de ângulo ψ , onde ψ é o ângulo entre a linha dos nodos e $\hat{\mathbf{e}}_1$:

$$\hat{\mathcal{B}} = \mathcal{B}'' \mathbf{R}_3(\psi) \quad (2.1.107)$$

► 2.58 Portanto:

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{B}} &= \mathcal{B} \mathbf{R} \\ &= \mathcal{B} \mathbf{R}_3(\phi) \mathbf{R}_2(\theta) \mathbf{R}_3(\psi) \end{aligned} \quad (2.1.108)$$

e:

$$\begin{aligned} \mathbf{R} &= \mathbf{R}_3(\phi) \mathbf{R}_2(\theta) \mathbf{R}_3(\psi) \\ &= \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi & 0 \\ \sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & 0 & \sin \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin \theta & 0 & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \psi & -\sin \psi & 0 \\ \sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Os ângulos ϕ, θ, ψ chamam-se **ângulos de Euler**.