Estudar **Matemática**
na FCUP

Álgebra Linear e Geometria Analítica

Módulo 2
ALGA em $\mathbb{R}^3$

J.N. Tavares

Last Revision Date: 13 de Outubro de 2009

jntavar@fc.up.pt

Iniciar Responda a cada uma das seguintes questões.
Objectivo: 100%.

1. (10^{pts}) Considere os subconjuntos seguintes de $\mathbb{R}^3$:

$$
\begin{aligned}
A &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + z^2 = 0\} \\
B &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = -1 \wedge y + x - 3z = 0\} \\
C &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + 2y = 0 = x - y - 3z\} \\
D &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 = 0\}
\end{aligned}
$$

Qual ou quais são subespaços vectoriais de $\mathbb{R}^3$?

- todos
- nenhum
- exactamente A, C e D
- apenas C e D

2. (10^{pts}) Considere os subconjuntos seguintes de $\mathbb{R}^3$:

$$
\begin{aligned}
\mathbb{S} &= \operatorname{span}\{(0,1,-2),(1,0,-1)\} \\
\mathbb{T} &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x + y - 3z = 0\}
\end{aligned}
$$

Então $\mathbb{S} \cap \mathbb{T}$ é:

- ☐ a recta gerada por $(7, -4, 1)$
- ☐ $\{\mathbf{0}\}$
- ☐ a recta gerada por $(1, 4, -1)$
- ☐ O plano perpendicular a $(0, 1, -1)$

3. (10^{pts}) Considere os vectores $\mathbf{u} = (1, 0, 3), \mathbf{v} = (0, 1, 2)$ e $\mathbf{w} = (2, -3, 0)$ em $\mathbb{R}^3$, e as afirmações seguintes:

A. $2\mathbf{u} - 3\mathbf{v} - \mathbf{w} = \mathbf{0}$

B. $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são linearmente independentes

C. $\text{span}(\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ é o plano $3x + 2y - z = 0$

D. $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$

Indique qual a afirmação correcta:

- ☐ todas são verdadeiras
- ☐ todas são falsas
- ☐ apenas A é verdadeira
- ☐ A e C são verdadeiras

4. (10^{pts}) Considere a aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (3x - y, x + 2y - z, y + 2z)$$

e as afirmações seguintes:

[A]. a matriz de $\mathbf{A}$ é $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$.

[B]. $\det \mathbf{A} = +17$

[C]. O núcleo de $\mathbf{A}$ é $\ker\mathbf{A}=\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \ x = 2y - z\}$.

Indique qual a afirmação correcta:

- [ ] todas são verdadeiras
- [ ] todas são falsas
- [ ] apenas B é verdadeira
- [ ] A e B são verdadeiras

5. (10^{pts}) Considere a aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (4z, x + 2y + z, 2x + 4y - 2z)$$

e as afirmações seguintes:

[A]. a matriz de $\mathbf{A}$ é $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$, relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$.
[B]. os valores próprios de $\mathbf{A}$ são -4, 0 e $+4$.
[C]. $\{(1,0,-1),(2,-1,0),(1,1,1)\}$ é uma base constituída por vectores próprios de $\mathbf{A}$.
[D]. $\mathbf{A}$ é diagonalizável.

Indique qual a afirmação correcta:

- ☐ todas são falsas
- ☐ todas são verdadeiras
- ☐ apenas A é verdadeira
- ☐ apenas B e D são verdadeiras

6. (10^{pts}) Considere a aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\mathbf{A}(x,y) = (-y+z, x-z, -x+y)$$

e as afirmações seguintes:

A. $\ker \mathbf{A} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\}$ B. $\mathbf{A}$ é injectiva
C. $\mathrm{im}\mathbf{A} = \mathrm{span}((0, 1, -1), (-1, 0, 1))$ D. $\ker \mathbf{A} \oplus \mathrm{im}\mathbf{A} = \mathbb{R}^3$

Então:

- ☐ todas são verdadeiras
- ☐ todas são falsas
- ☐ A, C e D são verdadeiras
- ☐ B e D são verdadeiras

7. (10^{pts}) Considere a aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\mathbf{A}(x, y, z) = (5x + y, -2x + 3y + z, y + z)$$

e o paralelipípedo $\mathcal{P}$ gerado pelos vectores $\mathbf{a} = (1, -3, 0)$, $\mathbf{b} = (2, 4, 1)$ e $\mathbf{c} = (0, 0, 1)$ O volume do paralelipípedo $\mathbf{A}(\mathcal{P})$ gerado pelos vectores $\mathbf{A}(\mathbf{a})$, $\mathbf{A}(\mathbf{b})$ e $\mathbf{A}(\mathbf{c})$ é igual a:

- ☐ 100
- ☐ 130
- ☐ 120
- ☐ 150

8. (10^{pts}) A distância entre o ponto $P = (1, 0, -1) \in \mathbb{R}^3$ e o seu simétrico relativamente ao plano de equação $2x - 2y + z = 0$ é igual a:

☐ $\frac{\sqrt{5}}{3}$ ☐ $\frac{2}{3}$ ☐ $\frac{8}{3}$ ☐ $\frac{11}{3}$

9. (10^{pts}) Considere o plano π passa no ponto $P = (3, 2, -1)$ e é perpendicular à recta definida por $x-y+z = 0 \wedge x+y-3z = -2$, e ainda a distância d de P a essa recta.
Então uma equação para π e a distância d são respectivamente:

☐ $x - 2y + z = 1; \quad d = \sqrt{5}/2$ ☐ $x + 2y + z = 6; \quad d = \sqrt{5}/2$
☐ $x - 2y + z = 1; \quad d = \sqrt{3}/2$ ☐ $x - 2y + z = 1; \quad d = \sqrt{3}/2$

10. (10^{pts}) Considere a aplicação linear $\mathbf{T} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por:

$$\mathbf{T}(x, y, z) = (3x - 2y, -x + 3y - z, -5x + 7y - z)$$

e as afirmações seguintes:
[A]. O polinómio característico de $\mathbf{T}$ é $p(\lambda) = \lambda^3 - 5\lambda^2 + 8\lambda - 4$
[B]. $\mathcal{B} = \{\mathbf{k}, \mathbf{T}(\mathbf{k}), \mathbf{T}^2(\mathbf{k})\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$, onde $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$
[C]. $\mathbf{T}^3(\mathbf{k}) = 5\mathbf{T}^2(\mathbf{k}) - 8\mathbf{T}(\mathbf{k}) + 4\mathbf{k}$
[D]. A matriz de $\mathbf{T}$ na base $\mathcal{B}$ é $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \end{pmatrix}$

Indique qual ou quais são verdadeiras:

- todas verdadeiras
- todas falsas
- apenas A e C são verdadeiras
- apenas B e D são verdadeiras

Fim Score: Correct

Pontuação:

Percentagem: