Módulo 9

ALGA I. Operadores auto-adjuntos (simétricos e hermitianos). Teorema espectral

Contents

9.1 Operadores auto-adjuntos (simétricos e hermitianos)

► **9.1** Como já vimos numa secção anterior, se $\mathbf{L} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$ é um operador linear num espaço vectorial de dimensão finita, então a representação matricial de $\mathbf{L}$ varia com a escolha da base numa classe de conjugação de matrizes:

$$\boxed{\mathscr{C} \to \mathscr{C}P \qquad \Rightarrow \qquad [\mathbf{L}]_{\mathscr{C}} \to [\mathbf{L}]_{\mathscr{C}P} = P^{-1}\,[\mathbf{L}]_{\mathscr{C}}\,P} \tag{9.1.1}$$

Esta possibilidade de variar a representação matricial de $\mathbf{L}$, variando a base, conduz-nos naturalmente ao seguinte problema:

Como escolher a base de $\mathcal{V}$ de tal forma que a representação matricial de L seja o mais "simples" possível? Mais formalmente - se $[\mathbf{L}]_{\mathscr{C}}$ é a representação matricial de L numa certa base $\mathscr{C}$, como seleccionar na classe de conjugação de L:

$$\{[\mathbf{L}]_{\mathscr{C}P} = P^{-1}\,[\mathbf{L}]_{\mathscr{C}}\,P: \quad P \in G\ell(n)\}$$

o representante mais "simples" possível ?

▶ **9.2** Suponhamos agora que $\mathcal{V}$ é um espaço vectorial com um produto interno $\langle\,|\,\rangle$ (como sempre, Euclideano se $\mathcal{V}$ é real, ou Hermitiano, se $\mathcal{V}$ fôr complexo). É claro que nestes espaços, a classe de todas as bases ortonormadas desempenha um papel central.

▶ **9.3** Suponhamos que $\mathscr{C}$ e $\widehat{\mathscr{C}} = \mathscr{C}P$ são duas bases ortonormadas em $\mathcal{V}$. Então a matriz P é:

- uma matriz ortogonal, $P \in \mathcal{O}(n)$, se $\mathcal{V}$ é Euclideano.
- uma matriz unitária, $P \in \mathcal{U}(n)$, se $\mathcal{V}$ é Hermitiano.

De facto, se $\mathscr{C} = \{\mathbf{e}_i\}$ e $\widehat{\mathscr{C}} = \{\widehat{\mathbf{e}}_j\}$, com $\langle \mathbf{e}_i|\mathbf{e}_j\rangle = \delta_{ij}$ e anàlogamente $\langle \widehat{\mathbf{e}}_\ell|\widehat{\mathbf{e}}_k\rangle = \delta_{\ell k}$, então, como:

$$\widehat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{e}_\ell\, P_i^\ell$$

vem que (supondo que $\mathcal{V}$ é Hermitiano):

$$\begin{aligned}
\delta_{ij} &= \langle \widehat{\mathbf{e}}_i|\widehat{\mathbf{e}}_j\rangle \\
&= \langle \mathbf{e}_\ell\, P_i^\ell|\mathbf{e}_k\, P_j^k\rangle \\
&= P_i^\ell \overline{P_j^k}\langle \mathbf{e}_\ell|\mathbf{e}_k\rangle \\
&= P_i^\ell \overline{P_j^k}\delta_{\ell k} \\
&= \sum_k P_i^k \overline{P_j^k} \\
&= (P^t)_k^i \overline{P_j^k} \qquad \Rightarrow \qquad P^t\overline{P} = \mathrm{Id}
\end{aligned} \tag{9.1.2}$$

o que mostra que P é unitária: $P^\dagger P = \mathrm{Id}$. No caso Euclideano, a demonstração é análoga e, neste caso, P é ortogonal: $P^tP = \mathrm{Id}$.

▶ **9.4** Portanto, quando $\mathcal{V}$ é um espaço vectorial com um produto interno, a pergunta anterior deve ser reformulada da seguinte forma:

Como escolher a base ortonormada de $\mathcal{V}$ de tal forma que a representação matricial de L seja o mais "simples" possível? Mais formalmente - se $[\mathbf{L}]_{\mathscr{C}}$ é a representação matricial de L numa certa base ortonormada $\mathscr{C}$, como seleccionar na classe de conjugação de $[\mathbf{L}]_{\mathscr{C}}$:

$$\{[\mathbf{L}]_{\mathscr{C}P} = P^{-1}\,[\mathbf{L}]_{\mathscr{C}}\,P: \quad P \in \mathcal{U}(n)\}$$

o representante mais "simples" possível? (no caso Euclideano, $\mathcal{U}(n)$ será substituído por $\mathcal{O}(n)$, é claro!)

▶ **9.5** **Definição** ... Seja $(\mathcal{V}, \langle\,|\,\rangle)$ um espaço com um produto interno *(Euclideano se $\mathcal{V}$ é real, ou Hermitiano, se $\mathcal{V}$ fôr complexo)*. Um operador linear $\mathbf{S} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, diz-se **auto-adjunto** se $\mathbf{S}$ satisfaz a condição:

$$\boxed{\langle \mathbf{S}(\mathbf{v})|\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}|\mathbf{S}(\mathbf{w})\rangle \qquad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathcal{V}} \tag{9.1.3}$$

No caso Euclideano $\mathbf{S}$ diz-se um **operador simétrico**, enquanto que no caso Hermitiano, $\mathbf{S}$ diz-se um **operador Hermitiano**.

▶ **9.6** **Teorema** ... *A matriz $S = [S^i_j]$ de um operador auto-adjunto $\mathbf{S} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, num espaço com um produto interno $(\mathcal{V}, \langle\,|\,\rangle)$,* **relativamente a uma base ortonormada** *$\mathscr{B} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ de $\mathcal{V}$, é:*

- uma **matriz simétrica**, $S = S^t$, no caso Euclideano.
- uma **matriz Hermitiana**, $S = S^\dagger$, no caso Hermitiano[1].

Dem.: De facto (no caso Hermitiano), se $\mathbf{S}(\mathbf{e}_j) = S^k_j \mathbf{e}_k$, então:

$$\langle \mathbf{e}_i|\mathbf{S}(\mathbf{e}_j)\rangle = \langle \mathbf{e}_i|S^k_j\mathbf{e}_k\rangle = \overline{S^k_j}\,\langle \mathbf{e}_i|\mathbf{e}_k\rangle = \overline{S^k_j}\delta_{ik} = \overline{S^i_j}$$

enquanto que, por outro lado, atendendo a (9.1.3):

$$\langle \mathbf{e}_i|\mathbf{S}(\mathbf{e}_j)\rangle = \langle \mathbf{S}(\mathbf{e}_i)|\mathbf{e}_j\rangle = S^k_i\,\langle \mathbf{e}_k|\mathbf{e}_j\rangle = S^k_i\delta_{kj} = S^j_i = (S^t)^i_j$$

Portanto $S^t = \overline{S}$, ou ainda $S^\dagger = S$. O caso Euclideano é análogo.

■

▶ **9.7** **Teorema** ... *Seja $\mathbf{S} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, um operador auto-adjunto num espaço com um produto interno $(\mathcal{V}, \langle\,|\,\rangle)$. Então:*

- *Se $\mathbf{S}$ tem um valor próprio, esse valor próprio é real.*
- *Suponhamos que $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são vectores próprios, pertencentes respectivamente aos valores próprios distintos λ e η, de $\mathbf{S}$. Então $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ são ortogonais: $\langle \mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = 0$.*

Dem.:

1. Seja $\mathbf{v} \in \mathcal{V} - \{\mathbf{0}\}$, um vector próprio pertencente ao valor próprio λ:

$$\mathbf{S}(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v} \tag{9.1.4}$$

Usando o produto interno $\langle\,|\,\rangle$, podemos exprimir o valor próprio λ, na forma:

$$\lambda = \frac{\langle \mathbf{S}\mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} \tag{9.1.5}$$

---

[1]Se $U(\epsilon)$ é uma curva de matrizes unitárias, tais que:

$$U(0) = \mathrm{Id}, \qquad \text{e} \qquad U'(0) = iH$$

então:

$$U(\epsilon)^t\overline{U(\epsilon)} = \mathrm{Id} \quad\Rightarrow\quad U'(0)^t + \overline{U'(0)} = 0 \quad\Rightarrow\quad iH^t - i\overline{H} = 0 \quad\Rightarrow\quad H^t = \overline{H}$$

isto é, H é Hermitiana

onde $\mathbf{v}$ é um vector próprio pertencente ao valor próprio λ. De facto:

$$\mathbf{S}(\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{v} \qquad \Rightarrow \qquad \langle \mathbf{S}\mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle = \langle \lambda\mathbf{v}|\mathbf{v}\rangle = \lambda\,\|\mathbf{v}\|^2$$

o que implica (9.1.5), já que $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Portanto se $\mathbf{S}$ é auto-adjunto temos que:

$$\lambda = \frac{\langle \mathbf{S}(\mathbf{v})|\mathbf{v}\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} = \frac{\langle \mathbf{v}|\mathbf{S}(\mathbf{v})\rangle}{\|\mathbf{v}\|^2} = \overline{\lambda}$$

isto é $\lambda \in \mathbb{R}$.

2. Por hipótese, $\mathbf{S}(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ e $\mathbf{S}(\mathbf{w}) = \eta\mathbf{w}$. Por 1. sabemos já que $\lambda, \eta \in \mathbb{R}$. Temos então sucessivamente que (no caso Hermitiano):

$$\lambda\,\langle \mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = \langle \lambda\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{S}\mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}|\mathbf{S}\mathbf{w}\rangle = \langle \mathbf{v}|\eta\,\mathbf{w}\rangle = \overline{\eta}\,\langle \mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = \eta\,\langle \mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle$$

o que implica que $(\lambda - \eta)\,\langle \mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = 0$, e portanto $\langle \mathbf{v}|\mathbf{w}\rangle = 0$, já que $\lambda \neq \eta$. O caso Euclideano é análogo.

■

9.2 Teorema espectral para operadores auto-adjuntos

► **9.8** Notemos que um operador linear real pode não ter valores próprios reais (por exemplo, uma rotação em $\mathbb{R}^2$). No entanto, é possível provar que todo o operador auto-adjunto tem pelo menos um valor próprio que, pela proposição anterior, é real.

O facto de maior interesse sobre operadores auto-adjuntos em espaços com produto interno de dimensão finita, é que eles podem ser diagonalizados por conjugação pelo grupo ortogonal $\mathcal{O}(n)$ (no caso Euclideano, isto é, quando $\mathbf{S}$ é operador simétrico) ou pelo grupo unitário $\mathcal{U}(n)$ (no caso Hermitiano, isto é, quando $\mathbf{S}$ é operador Hermitiano). Mais precisamente, é válido o seguinte teorema fundamental.

► **9.9** **<u>Teorema</u> ... [Teorema espectral para operadores auto-adjuntos em espaços com produto interno de dimensão finita]** ...

Seja $\mathbf{S} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, *um operador auto-adjunto num espaço com produto interno* $(\mathcal{V}, \langle\,|\,\rangle)$, *de dimensão finita* n.

Então **existe uma base ortonormada** $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \cdots, \mathbf{u}_n\}$**, para** $\mathcal{V}$**, constituída por vectores próprios de** $\mathbf{S}$.

A matriz de $\mathbf{S}$ *nessa base é portanto a matriz diagonal* $\mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n)$, *onde* λ_k *é o valor próprio correspondente ao vector próprio* $\mathbf{u}_k$, *para* $(k = 1, \cdots, n)$.

Dem.: A demonstração far-se-á por indução sobre a dimensão n. Se $n = 1$, o resultado é trivial. Suponhamos que ele é válido, para todo o espaço vectorial com produto interno, com dim $\leq n - 1$.

Como se referiu acima, $\mathbf{S}$ admite sempre um valor próprio (real) λ_1. Seja $\mathbf{u}_1 \neq \mathbf{0}$ um vector próprio pertencente ao valor próprio λ_1: $\mathbf{S}(\mathbf{u}_1) = \lambda_1\,\mathbf{u}_1$. Podemos supôr que $\|\mathbf{u}_1\| = 1$. Seja $\mathbb{S}$ o subespaço ortogonal a $\mathbf{u}_1$, de tal forma que:

$$\mathcal{V} = \mathbb{R}\,\mathbf{u}_1 \oplus \mathbb{S} \tag{9.2.1}$$

Então $\mathbf{S}$ deixa $\mathbb{S}$ invariante: $\mathbf{S}(\mathbb{S}) \subseteq \mathbb{S}$ (porquê?). Além disso, $\mathbb{S}$ é um espaço vectorial com um produto interno, de dimensão $n-1$, e $\mathbf{S}|_{\mathbb{S}}$ é auto-adjunto. Resta aplicar a hipótese de indução para concluir a prova.

■

► **9.10** **Exemplo** ... Seja $\mathbf{S}$ o operador simétrico em $\mathbb{R}^3$, cuja matriz na base canónica de $\mathbb{R}^3$ é (a matriz simétrica):

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

A equação característica é:

$$p(t) = \det(S - t\,\mathrm{Id}) = \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 2 \\ 0 & 2 & 1-t \end{pmatrix} = 0$$

isto é:

$$(1-t)[(1-t)^2 - 4] = 0$$

Os valores próprios de S, são portanto $t = 1, -1, 3$. Calculemos uma base ortonormada de vectores próprios. Para isso substituímos sucessivamente t por $1, -1$ e 3, na equação matricial seguinte:

$$\begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ 0 & 1-t & 2 \\ 0 & 2 & 1-t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolvendo os correspondentes sistemas de equações, e tendo o cuidado de normalizar os vectores próprios para que eles tenham norma 1, obtemos a base seguinte:

$$\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{pertencente ao valor próprio } \lambda = 1$$

$$\mathbf{u}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{pertencente ao valor próprio } \lambda = -1$$

$$\mathbf{u}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{pertencente ao valor próprio } \lambda = 3$$

Designando por $\mathscr{C} = [\mathbf{i} \;\; \mathbf{j} \;\; \mathbf{k}]$ a base canónica de $\mathbb{R}^3$ e por $\mathscr{B} = [\mathbf{u}_1 \;\; \mathbf{u}_2 \;\; \mathbf{u}_3]$, a base constituída pelos vectores próprios de $\mathbf{S}$, atrás calculados, e pondo:

$$\mathcal{B} = \mathscr{C} P$$

vemos que a matriz P (que é ortogonal - ($P^{-1} = P^{tr}$ - como vimos), é dada por:

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Podemos verificar directamente que:

$$P^t S P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

9.3 Diagonalização de formas quadráticas reais

► **9.11** Suponhamos agora que $\mathcal{V}$ é um espaço vectorial real de dimensão n, com um produto interno Euclideano $\langle\,|\,\rangle$, e que:

$$\beta : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \longrightarrow \mathbb{R} \tag{9.3.1}$$

é uma forma bilinear simétrica em $\mathcal{V}$. A **forma quadrática** associada a β é, por definição, a função $Q = Q_\beta : \mathcal{V} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$Q(\mathbf{v}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{v}), \qquad \mathbf{v} \in \mathcal{V} \tag{9.3.2}$$

► **9.12** Seja $\mathscr{C} = \{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ uma base para $\mathcal{V}$. Por definição, a **matriz de Gram** de β na base $\mathscr{C}$, é a matriz simétrica $[\beta]_\mathscr{C} = [\beta_{ij}]$, dada por:

$$\beta_{ij} \overset{\text{def}}{=} \beta(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j), \qquad i, j = 1, \ldots, n \tag{9.3.3}$$

Se $\mathbf{v} = x^i \mathbf{e}_i$, então:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{v}) &= Q(x^i \mathbf{e}_i) \\ &\overset{\text{def}}{=} Q(x^1, \cdots, x^n) \\ &= \beta(x^i \mathbf{e}_i, x^j \mathbf{e}_j) \\ &= \sum_{ij} \beta_{ij}\, x^i x^j \\ &= [\mathbf{v}]^t_\mathscr{C} [\beta]_\mathscr{C} [\mathbf{v}]_\mathscr{C}, \qquad \text{em notação matricial} \end{aligned} \tag{9.3.4}$$

► **9.13** Se mudarmos a base $\mathscr{C}$, para uma nova base $\mathscr{C}P$:

$$\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}P$$

sabemos já que as coordenadas de um vector $\mathbf{v}$ mudam de acordo com a fórmula:

$$\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}P \qquad \Longrightarrow \qquad [\mathbf{v}]_{\mathscr{C}P} = P^{-1}[\mathbf{v}]_\mathscr{C}$$

Qual é a matriz de Gram de β na base $\mathscr{C}P$?

Por um lado:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{v}) &= [\mathbf{v}]^t_\mathscr{C} [\beta]_\mathscr{C} [\mathbf{v}]_\mathscr{C} \\ &= \left(P[\mathbf{v}]_{\mathscr{C}P}\right)^t [\beta]_\mathscr{C} P [\mathbf{v}]_{\mathscr{C}P} \\ &= [\mathbf{v}]^t_{\mathscr{C}P} P^t [\beta]_\mathscr{C} P [\mathbf{v}]_{\mathscr{C}P} \end{aligned} \tag{9.3.5}$$

e, por outro lado:

$$Q(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}]^t_{\mathscr{C}P} [\beta]_{\mathscr{C}P} [\mathbf{v}]_{\mathscr{C}P}$$

Comparando as duas expressões, concluímos que:

$$\boxed{\mathscr{C} \longrightarrow \mathscr{C}P \qquad \Longrightarrow \qquad [\beta]_{\mathscr{C}P} = P^t [\beta]_\mathscr{C} P} \tag{9.3.6}$$

► **9.14** À forma bilinear simétrica β, podemos associar um operador simétrico $\mathbf{S} = \mathbf{S}_\beta : \mathcal{V} \to \mathcal{V}$, tal que:

$$\beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \langle \mathbf{S}(\mathbf{u}) | \mathbf{v} \rangle, \qquad \forall \mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} \tag{9.3.7}$$

De facto, se $\mathbf{u} \in \mathcal{V}$, a fórmula (9.3.7) define $\mathbf{S}(\mathbf{u})$ como sendo o único vector de $\mathcal{V}$ tal que $\langle \mathbf{S}(\mathbf{u}) | \mathbf{v} \rangle = \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v})$, $\forall \mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Não há ambiguidade nesta definição uma vez que o produto interno $\langle \, | \, \rangle$ é não degenerado. Além disso:

$$\langle \mathbf{S}(\mathbf{u}) | \mathbf{v} \rangle = \beta(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{u}) = \langle \mathbf{S}(\mathbf{v}) | \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u} | \mathbf{S}(\mathbf{v}) \rangle$$

e portanto $\mathbf{S}$ é um operador simétrico.

É fácil ver que a matriz de $\mathbf{S}$, relativamente à base $\mathscr{C}$, é a matriz de Gram $[\beta]_{\mathscr{C}}$. Pelo teorema espectral da secção anterior, podemos encontrar uma base ortonormada $\mathcal{B} = \mathscr{C}P = \{\mathbf{u}_1, \cdots, \mathbf{u}_n\}$, de $\mathcal{V}$, constituída por vectores próprios de $\mathbf{S}$, e relativamente à qual a matriz de $\mathbf{S}$ é a matriz diagonal:

$$[\beta]_{\mathscr{C}P} = D = \mathbf{diag}[\lambda_1 \;\; \lambda_2 \;\; \cdots \;\; \lambda_n]$$

onde λ_k é o valor próprio correspondente ao vector próprio $\mathbf{u}_k$, para $(k = 1, \ldots, n)$.

► **9.15** Atendendo a (9.3.6), vemos que:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{v}) &= [\mathbf{v}]^t_{\mathscr{C}P} [\beta]_{\mathscr{C}P} [\mathbf{v}]_{\mathscr{C}P} \\ &= [\mathbf{v}]^t_{\mathscr{C}P} \mathbf{diag}[\lambda_1 \;\; \lambda_2 \;\; \cdots \;\; \lambda_n] [\mathbf{v}]_{\mathscr{C}P} \end{aligned} \tag{9.3.8}$$

Pondo $\mathbf{v} = x^i \mathbf{e}_i = y^j \mathbf{u}_j$, isto é:

$$[\mathbf{v}]_{\mathscr{C}} = [x^i], \qquad [\mathbf{v}]_{\mathscr{C}P} = [y^j]$$

concluímos que:

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{v}) &= Q(x^i \mathbf{e}_i) \\ &\overset{\text{def}}{=} Q(x^1, \ldots, x^n) \\ &= [\mathbf{v}]^t_{\mathscr{C}} [\beta]_{\mathscr{C}} [\mathbf{v}]_{\mathscr{C}} \\ &= Q(y^j \mathbf{u}_j) \\ &\overset{\text{def}}{=} Q(y^1, \ldots, y^n) \\ &= [\mathbf{v}]^t_{\mathscr{C}P} [\beta]_{\mathscr{C}P} [\mathbf{v}]_{\mathscr{C}P} \\ &= [\mathbf{v}]^t_{\mathscr{C}P} \mathbf{diag}[\lambda_1 \;\; \lambda_2 \;\; \cdots \;\; \lambda_n] [\mathbf{v}]_{\mathscr{C}P} \\ &= \sum_i \lambda_i (y^i)^2 \end{aligned} \tag{9.3.9}$$

Portanto, a forma quadrática associada a β, que nas x-coordenadas (relativamente à base $\mathscr{C}$) foi escrita na forma (ver (9.3.4)):

$$Q(x^1, \ldots, x^n) = \sum_{ij} b_{ij} \, x^i x^j$$

escreve-se agora, nas y-coordenadas (relativamente à base $\mathcal{B} = \mathscr{C}P$, que diagonaliza $\mathbf{S}$), na forma:

$$Q(y^1, \ldots, y^n) = \sum_i \lambda_i \, (y^i)^2$$

► **9.16** **Exemplo** ... Continuando o exemplo da secção anterior, consideremos a forma quadrática associada ao endomorfismo simétrico aí referido:

$$\begin{aligned} q(x^1, x^2, x^3) &= [x^1 \;\; x^2 \;\; x^3] \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x^1 \\ x^2 \\ x^3 \end{pmatrix} \\ &= (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 + 4x^2 x^3 \end{aligned}$$

Se designamos por $\begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ y^3 \end{pmatrix}$ as coordenadas de um vector $\mathbf{v}$, na base $\mathcal{B}$, então, se as coordenadas desse mesmo vector, na base $\mathscr{C}$, são $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, vem que:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}, \qquad \text{onde} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

isto é:

$$\begin{aligned} x^1 &= y^1 \\ x^2 &= \frac{1}{\sqrt{2}} y^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y^3 \\ x^3 &= -\frac{1}{\sqrt{2}} y^2 + \frac{1}{\sqrt{2}} y^3 \end{aligned}$$

e nas novas coordenadas (y^i), q escreve-se na forma:

$$q(y^1, y^2, y^3) = (y^1)^2 - (y^2)^2 + 3(y^3)^2$$

como aliás pode ser verificado directamente.

► **9.17** **Definição** ... Uma forma quadrática em $\mathbb{R}^3$, $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{S}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$, diz-se:

- **definida positiva**, se $Q(\mathbf{x}) > 0$, $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- **definida negativa**, se $Q(\mathbf{x}) < 0$, $\forall \mathbf{x} \neq \mathbf{0}$.
- **indefinida**, se Q toma valores positivos e negativos.

A proposição seguinte é consequência imediata da possibilidade de reduzir uma forma quadrática à forma diagonal.

► **9.18** **Teorema** ... *Uma forma quadrática em* $\mathbb{R}^3$*,* $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{S}\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$*, é:*

- **definida positiva**, se todos os valores próprios de $\mathbf{S}$ são estritamente positivos.
- **definida negativa**, se todos os valores próprios de $\mathbf{S}$ são estritamente negativos.
- **indefinida**, se os valores próprios de $\mathbf{S}$ são alguns positivos e alguns negativos (eventualmente nulos).

9.4 Propriedades extremais dos valores próprios

Vamos ver que os valores próprios de um operador simétrico em $\mathbb{R}^n$, podem ser obtidos considerando um certo problema de mínimo àcerca da forma quadrática associada.

Para já um lema preparatório:

► **9.19** **Lema** ... *Seja* $\mathbf{S} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *um operador simétrico em* $\mathbb{R}^n$*, para o qual a forma quadrática associada* $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{Sx} \cdot \mathbf{x}$ *é não negativa:*

$$Q(\mathbf{x}) = \mathbf{Sx} \cdot \mathbf{x} \geq 0, \qquad \forall \mathbf{x}$$

Se para um certo vector $\mathbf{u}$*:*

$$Q(\mathbf{u}) = \mathbf{Su} \cdot \mathbf{u} = 0$$

então $\mathbf{Su} = \mathbf{0}$.

Dem.: Seja $\mathbf{x} = \mathbf{u} + t\mathbf{h}$, onde $t \in \mathbb{R}$ e $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ são arbitrários. Então:

$$\begin{aligned}
Q(\mathbf{u} + t\mathbf{h}) &= \mathbf{S}(\mathbf{u} + t\mathbf{h}) \cdot (\mathbf{u} + t\mathbf{h}) \\
&= \mathbf{Su} \cdot \mathbf{u} + t(\mathbf{Su} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{Sh} \cdot \mathbf{u}) + t^2 \mathbf{Sh} \cdot \mathbf{h} \\
&= t(\mathbf{Su} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{Su}) + t^2 \mathbf{Sh} \cdot \mathbf{h} \qquad \text{(porquê?)} \\
&= t(\mathbf{Su} \cdot \mathbf{h} + \mathbf{h} \cdot \mathbf{Su}) + t^2 \mathbf{Sh} \cdot \mathbf{h} \qquad \text{(porquê?)} \\
&= 2t\,\mathbf{Su} \cdot \mathbf{h} + t^2 \mathbf{Sh} \cdot \mathbf{h} \qquad \text{(porquê?)}
\end{aligned}$$

Portanto:

$$2t\,\mathbf{Su} \cdot \mathbf{h} + t^2 \mathbf{Sh} \cdot \mathbf{h} \geq 0, \qquad \forall t$$

o que implica que $\mathbf{Su} \cdot \mathbf{h}$, $\forall \mathbf{h}$ e portanto $\mathbf{Su} = \mathbf{0}$. ■

No teorema que se segue, representamos por $\mathbb{S}$ a esfera unitária em $\mathbb{R}^n$:

$$\mathbb{S} \overset{\text{def}}{=} \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \, , \|\mathbf{x}\| = 1\}$$

► **9.20** **Teorema** ... *Seja* $\mathbf{S} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *um operador simétrico em* $\mathbb{R}^n$*, e* $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *a forma quadrática associada a* $\mathbf{S}$*, definida por* $Q(\mathbf{x}) = \mathbf{Sx} \cdot \mathbf{x}$*.*

Então a restrição de Q *à esfera unitária* $\mathbb{S}$*, assume o seu valor mínimo* λ_1 *num certo ponto* $\mathbf{u}_1$ *dessa esfera. Além disso:*

λ_1 *é valor próprio de* $\mathbf{S}$ *e* $\mathbf{u}_1$ *é um vector próprio associado.*

Dem.: Como a esfera unitária $\mathbb{S}$ é limitada e fechada, existe um ponto $\mathbf{u}_1 \in \mathbb{S}$ onde a restrição de Q a $\mathbb{S}$ assume o seu valor mínimo, digamos λ_1:

$$Q(\mathbf{u}_1) = \lambda_1, \quad \text{e} \quad Q(\mathbf{x}) \geq \lambda_1, \forall \mathbf{x} \in \mathbb{S}$$

Como $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$ podemos escrever a desigualdade na forma:

$$\mathbf{Sx} \cdot \mathbf{x} \geq \lambda_1 \, \mathbf{x} \cdot \mathbf{x}, \quad \text{onde} \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{x} = 1$$

Mas esta desigualdade é válida qualquer que seja x (porquê?). Portanto:

$$(\mathbf{Sx} - \lambda_1 \, \mathbf{x}) \cdot \mathbf{x} \geq 0, \quad \forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \tag{9.4.1}$$

e, em particular, para $\mathbf{x} = \mathbf{u}_1$:

$$(\mathbf{Su}_1 - \lambda_1 \mathbf{u}_1) \cdot \mathbf{u}_1 = 0 \tag{9.4.2}$$

Isto significa que o operador $\mathbf{S} - \lambda_1 \, \mathrm{Id}$ satisfaz as condições do lema anterior e, por isso:

$$\mathbf{Su}_1 - \lambda_1 \mathbf{u}_1 = \mathbf{0}$$

isto é:

$$\mathbf{Su}_1 = \lambda_1 \mathbf{u}_1$$

■

Para calcular o próximo vector próprio λ_2 consideramos a restrição de $\mathbf{S}$ ao hiperplano ortogonal a $\mathbf{u}_1$. Esta restrição é um operador simétrico ao qual podemos aplicar o mesmo argumento - o valor próprio λ_2 é o valor mínimo de $\mathbf{S}|_{\mathbf{u}_1^\perp}$ restrito à esfera unitária de $\mathbf{u}_1^\perp$. Um vector próprio associado é um ponto desta esfera onde $\mathbf{S}$ toma o valor mínimo λ_2. É claro que $\lambda_2 \leq \lambda_1$ e que $\mathbf{u}_2 \perp \mathbf{u}_1$. Procedendo sucessivamente desta forma obtemos o seguinte teorema.

▶ **9.21** **Teorema** ... *A base ortonormada* $\{\mathbf{u}_1\, \mathbf{u}_2 \ldots \mathbf{u}_n\}$*, de* $\mathbb{R}^n$*, constituída por vectores próprios de* $\mathbf{S}$ $(\mathbf{S}(\mathbf{u}_k) = \lambda_k\, \mathbf{u}_k,\ k = 1, ..., n)$*, e relativamente à qual a matriz de* $\mathbf{S}$ *é a matriz diagonal:*

$$D = \mathbf{diag}(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n)$$

pode ser escolhida de tal forma que, para cada $k = 1, ..., n$*,* $\lambda_k = Q(\mathbf{u}_k)$ *é o valor mínimo de* Q*, restrita à esfera unitária no subespaço de* $\mathbb{R}^n$*, perpendicular aos vectores* $\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, ..., \mathbf{u}_{k-1}$.

9.5 Operadores comutativos

▶ **9.22** **Lema** ... *Suponhamos que* $\mathbf{S}$ *e* $\mathbf{T}$ *são dois operadores num ev* $\mathcal{V}$ *de dimensão finita, que comutam, isto é:*

$$\mathbf{ST} = \mathbf{TS}$$

Seja λ *um valor próprio de* $\mathbf{S}$ *e* $\mathcal{E}(\lambda)$ *o correspondente espaço próprio. Então o operador* $\mathbf{T}$ *deixa invariante* $\mathcal{E}(\lambda)$*, isto é:*

$$\mathbf{T}(\mathcal{E}(\lambda)) \subseteq \mathcal{E}(\lambda) \tag{9.5.1}$$

Dem.:

Seja $\mathbf{v} \in \mathcal{E}(\lambda)$, de tal forma que $\mathbf{Sv} = \lambda\mathbf{v}$. Pretende-se mostrar que $\mathbf{Tv} \in \mathcal{E}(\lambda)$. De facto:

$$\mathbf{STv} = \mathbf{TSv} = \mathbf{T}(\lambda\mathbf{v}) = \lambda\,\mathbf{Tv} \quad \Longrightarrow \quad \mathbf{Tv} \in \mathcal{E}(\lambda)$$

■

▶ **9.23** **Corolário** ... *Se* $\mathbf{S}$ *e* $\mathbf{T}$ *são dois operadores comutativos (*$\mathbf{ST} = \mathbf{TS}$*) num ev complexo de dimensão finita, então* $\mathbf{S}$ *e* $\mathbf{T}$ *têm um vector próprio comum.*

▶ **9.24** **Teorema** ... *Suponhamos que* $\mathbf{S}$ *e* $\mathbf{T}$ *são dois operadores auto-adjuntos num ev Hermitiano* $\mathcal{V}$ *de dimensão finita.*
Então existe uma base ortogonal que diagonaliza simultâneamente os dois operadores $\mathbf{S}$ *e* $\mathbf{T}$ *se e só se eles são comutativos, isto é,* $\mathbf{ST} = \mathbf{TS}$.

Dem.: Se $\mathbf{ST} = \mathbf{TS}$ então, pelo corolário anterior, $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ têm um vector próprio $\mathbf{u}_1$ comum:

$$\mathbf{Su}_1 = \lambda\mathbf{u}_1 \qquad \text{e} \qquad \mathbf{Tu}_1 = \eta\mathbf{u}_1$$

Considere agora o ortogonal $\mathbf{u}_1^\perp$, as restrições de $\mathbf{S}$ e $\mathbf{T}$ a esse ortogonal e repita o argumento.

O recíproco é óbvio.

■.

9.6 Exercícios

▶ **Exercício 9.1** ... Em cada uma das alíneas que se seguem, determine:

I) Uma matriz simétrica A que represente a forma quadrática que se segue;

II) Os valores próprios de A;

III) Uma base ortonormal de vectores próprios;

IV) Uma matriz ortogonal diagonalizante C;

V) Diagonalize a forma quadrática.

a) $q(x_1, x_2) = 4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$;

b) $q(x_1, x_2) = x_1x_2$;

c) $q(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$;

d) $q(x_1, x_2) = 34x_1^2 - 24x_1x_2 + 41x_2^2$;

e) $q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_1x_2 + x_2x_3 + x_1x_3$;

f) $q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + 4x_1x_3$;

g) $q(x_1, x_2, x_3) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + 4x_2x_3 + 8x_1x_3 + 3x_3^2$.