

Módulo 8

ALGA I. Subespaços invariantes. Subespaços próprios. Valores próprios

Contents

8.1	Conjugação	119
8.2	Subespaços invariantes	122
8.3	Valores e vectores próprios de um operador linear. Operadores diagonalizáveis	123
8.4	Cálculo de valores e vectores próprios	124
8.5	Sistemas dinâmicos lineares discretos	127
8.6	Números de Fibonacci. Número de ouro	128
8.7	Exercícios	133

8.1 Conjugação

► **8.1 Mudança de base** ... Suponhamos que $\mathcal{V}$ é um espaço vectorial e que:

$$\mathcal{C} = (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n)$$

é uma base qualquer, escrita como um vector-linha com entradas vectoriais $\mathbf{e}_i$. Se $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$ é um vector qualquer em $\mathcal{V}$, designemos por v^i as suas componentes na base $\mathcal{C}$, isto é:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_i v^i \mathbf{e}_i \\ &= (\mathbf{e}_1 \quad \mathbf{e}_2 \quad \cdots \quad \mathbf{e}_n) \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{pmatrix} \\ &= \mathcal{C}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} \end{aligned} \tag{8.1.1}$$

Suponhamos agora que mudamos de base:

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}P = \widehat{\mathcal{C}} = (\hat{\mathbf{e}}_1 \quad \hat{\mathbf{e}}_2 \quad \cdots \quad \hat{\mathbf{e}}_n) \tag{8.1.2}$$

que escrevemos na forma matricial seguinte:

$$\begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \cdots & \hat{\mathbf{e}}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} P_1^1 & P_2^1 & \cdots & P_n^1 \\ P_1^2 & P_2^2 & \cdots & P_n^2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ P_1^n & P_2^n & \cdots & P_n^n \end{pmatrix} \quad (8.1.3)$$

ou muito simplesmente:

$$\widehat{\mathcal{C}} = \mathcal{C}P$$

Se $\hat{v}^i$ são as componentes do mesmo vector $\mathbf{v}$ na base $\widehat{\mathcal{C}}$, isto é, se:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \sum_i \hat{v}^i \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= \widehat{\mathcal{C}}[\mathbf{v}]_{\widehat{\mathcal{C}}} \end{aligned} \quad (8.1.4)$$

então vem que:

$$\mathcal{C}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \mathbf{v} = \widehat{\mathcal{C}}[\mathbf{v}]_{\widehat{\mathcal{C}}} = \mathcal{C}P[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}P}$$

donde se conclui que:

$$\mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}P \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}P} = P^{-1}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} \quad (8.1.5)$$

► **8.2** Suponhamos agora que $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ é um operador linear, cuja matriz relativamente à base $\mathcal{C} = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \dots, \mathbf{e}_n\}$, para $\mathcal{V}$, é:

$$[\mathbf{L}]_{\mathcal{C}} = [L_j^i] \quad (8.1.6)$$

Recorde que isto significa que:

$$\mathbf{L}(\mathbf{e}_j) = \sum_i L_j^i \mathbf{e}_i$$

Portanto, se $\mathbf{v} = \mathcal{C}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} \in \mathcal{V}$, isto é, se o vector das coordenadas de $\mathbf{v}$, relativamente à base $\mathcal{C}$ é:

$$[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} v^1 \\ v^2 \\ \vdots \\ v^n \end{bmatrix}$$

então:

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{L}(v^j \mathbf{e}_j) = v^j \mathbf{L}(\mathbf{e}_j) = v^j (L_j^i \mathbf{e}_i) = (L_j^i v^j) \mathbf{e}_i$$

isto é, o vector das coordenadas de $\mathbf{L}(\mathbf{v})$, relativamente à base $\mathcal{C}$, é obtido multiplicando a matriz $[\mathbf{L}]_{\mathcal{C}}$ pelo vector-coluna $[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$:

$$[\mathbf{L}\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = [\mathbf{L}]_{\mathcal{C}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} \quad (8.1.7)$$

► **8.3 Conjugação ...** Suponhamos agora que escolhemos uma nova base para $\mathcal{V}$:

$$\widehat{\mathcal{C}} = \mathcal{C}P$$

Como muda a representação matricial de $\mathbf{L}$? Isto é, se a matriz de $\mathbf{L}$ nesta nova base é $\widehat{L}_j^i$, como é que esta matriz se relaciona com a matriz L_j^i ?

Para responder a esta questão, consideremos um vector arbitrário $\mathbf{v} \in \mathcal{V}$. Podemos então escrever:

$$\mathbf{v} = \mathcal{C}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}P)[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}P} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{v}]_{\mathcal{C}P} = P^{-1}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$$

Portanto:

- por um lado:

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \mathcal{C}[\mathbf{L}(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}} = \mathcal{C}[\mathbf{L}]_{\mathcal{C}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} \quad (8.1.8)$$

- e, por outro lado:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{v}) &= (\mathcal{C}P)[\mathbf{L}(\mathbf{v})]_{\mathcal{C}P} \\ &= (\mathcal{C}P)[\mathbf{L}]_{\mathcal{C}P}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}P} \\ &= (\mathcal{C}P)[\mathbf{L}]_{\mathcal{C}P}P^{-1}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} \end{aligned} \quad (8.1.9)$$

Comparando (8.1.8) com (8.1.9), vem que:

$$\mathcal{C}[\mathbf{L}]_{\mathcal{C}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = (\mathcal{C}P)[\mathbf{L}]_{\mathcal{C}P}P^{-1}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{L}]_{\mathcal{C}}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}} = P[\mathbf{L}]_{\mathcal{C}P}P^{-1}[\mathbf{v}]_{\mathcal{C}}$$

e como esta igualdade é válida $\forall \mathbf{v}$, temos que:

$$[\mathbf{L}]_{\mathcal{C}P} = P^{-1}[\mathbf{L}]_{\mathcal{C}}P \quad (8.1.10)$$

Concluindo:

Se $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ é um operador linear num espaço vectorial de dimensão finita, então a representação matricial de $\mathbf{L}$ varia, com a escolha da base, numa classe de conjugação de matrizes:

$$\boxed{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}P \quad \Rightarrow \quad [\mathbf{L}]_{\mathcal{C}P} = P^{-1}[\mathbf{L}]_{\mathcal{C}}P} \quad (8.1.11)$$

► **8.4** Esta possibilidade de variar a representação matricial de $\mathbf{L}$, variando a base, conduz-nos naturalmente ao seguinte problema:

Como escolher a base de $\mathcal{V}$ de tal forma que a representação matricial de $\mathbf{L}$ seja o mais “simples” possível? Mais formalmente - se $L = [\mathbf{L}]_{\mathcal{C}}$ é a representação matricial de $\mathbf{L}$ numa certa base $\mathcal{C}$, como seleccionar na classe de conjugação de L :

$$\{P^{-1}LP : P \in Gl(n)\}$$

o representante mais “simples” possível?

► **8.5** Uma solução intuitiva para este problema consiste, grosso modo, em decompôr o espaço vectorial $\mathcal{V}$ em “blocos simples” onde a acção de $\mathbf{L}$ seja fácil de descrever. Os conceitos que intervêm nesta discussão são os seguintes:

- subespaços invariantes, em particular, subespaços próprios (e valores próprios associados)

- decomposição de $\mathcal{V}$ como soma directa de subespaços invariantes
- estrutura da restrição de $\mathbf{L}$ a cada subespaço invariante

Vamos de seguida discutir estes conceitos e posteriormente, no capítulo 8, vamos dar uma solução do problema anterior para uma classe muito importante de operadores - a classe de operadores hermiticos em espaços unitários (em particular, os operadores simétricos em espaços Euclidianos).

8.2 Subespaços invariantes

► **8.6 Definição** ... Seja $\mathcal{V}$ um espaço vectorial e $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ um operador linear. Um subespaço $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ diz-se um **subespaço invariante do operador $\mathbf{L}$** se:

$$\mathbf{L}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S} \quad (8.2.1)$$

Um subespaço invariante de dimensão um diz-se um **subespaço próprio do operador $\mathbf{L}$** .

► **8.7 Teorema** ... Seja $\mathcal{V}$ um espaço vectorial e $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ um operador linear. Então $\mathcal{V}$, $\{0\}$, $\ker \mathbf{L}$ e $\text{im } \mathbf{L}$ são subespaços invariantes do operador $\mathbf{L}$.

Dem.: Basta aplicar directamente as definições.

► **8.8 Teorema** ... Seja $\mathcal{V}$ um espaço vectorial de dimensão finita n , e $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ um operador linear.

1. Suponhamos que $\mathcal{S}$ é um subespaço invariante de dimensão $k \leq n$. Então existe uma representação matricial de $\mathbf{L}$ da forma:

$$L = \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad (8.2.2)$$

onde A é uma matriz $k \times k$, B uma matriz $k \times (n - k)$ e D uma matriz $(n - k) \times (n - k)$.

2. Suponhamos que $\mathcal{S}$ e $\mathcal{T}$ são subespaços invariantes de dimensão k e $n - k$, respectivamente, tais que:

$$\mathcal{V} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{T}$$

Então existe uma representação matricial de $\mathbf{L}$ da forma:

$$L = \begin{pmatrix} A & 0 \\ 0 & D \end{pmatrix} \quad (8.2.3)$$

onde A é uma matriz $k \times k$ e D uma matriz $(n - k) \times (n - k)$.

Dem.: 1. Seja $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k\}$ uma base para $\mathcal{S}$, e completemos essa base a uma base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_k, \mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$ de $\mathcal{V}$ (isto é possível, pelo teorema da base incompleta). É claro que o subespaço $\mathcal{T} = \text{span}\{\mathbf{e}_{k+1}, \dots, \mathbf{e}_n\}$ não é, em geral, um subespaço invariante de $\mathbf{L}$, embora $\mathcal{V} = \mathcal{S} \oplus \mathcal{T}$. De qualquer forma, podemos sempre pôr:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}(\mathbf{e}_i) &= \sum_{j=1}^k A_i^j \mathbf{e}_j + \sum_{\beta=k+1}^n C_i^\beta \mathbf{e}_\beta, \quad i = 1, \dots, k \\ \mathbf{L}(\mathbf{e}_\alpha) &= \sum_{j=1}^k B_\alpha^j \mathbf{e}_j + \sum_{\beta=k+1}^n D_\alpha^\beta \mathbf{e}_\beta, \quad \alpha = k+1, \dots, n \end{aligned}$$

Mas como, por hipótese, $\mathbf{L}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S}$, temos que $C_i^\beta = 0, \forall i, \beta$, e portanto a representação matricial de $\mathbf{L}$, na base indicada, é:

$$L = \begin{pmatrix} A_i^j & B_\alpha^j \\ 0 & D_\alpha^\beta \end{pmatrix}$$

2. Análogo.

■.

8.3 Valores e vectores próprios de um operador linear. Operadores diagonalizáveis

► **8.9** Suponhamos que $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{V}$ é um subespaço próprio do operador $\mathbf{L}$, isto é, $\mathcal{S}$ é um subespaço invariante de dimensão um. Como $\dim \mathcal{S} = 1$, $\mathcal{S}$ é gerado por um qualquer dos seus vectores não nulos. Suponhamos que $\mathbf{v} \in \mathcal{S} - \{\mathbf{0}\}$. Então, como $\dim \mathcal{S} = 1$, tem-se que:

$$\boxed{\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}} \quad (8.3.1)$$

para algum escalar $\lambda \in \mathbb{K}$.

► **8.10 Definições** ... $\lambda \in \mathbb{K}$ diz-se um **valor próprio de $\mathbf{L}$** se existir um vector não nulo $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$, em $\mathcal{V}$, tal que:

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} \quad (8.3.2)$$

Neste caso, $\mathbf{v}$ diz-se um **vector próprio pertencente ao valor próprio λ** . Ao subespaço gerado por todos os vectores próprios, associados ao valor próprio λ , chama-se o **espaço próprio de $\mathbf{L}$, associado ao valor próprio λ** e nota-se usualmente por $\mathcal{E}_{\mathbf{L}}(\lambda)$, ou simplesmente por $\mathcal{E}(\lambda)$. Portanto:

$$\boxed{\mathcal{E}(\lambda) = \mathcal{E}_{\mathbf{L}}(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v} \in \mathcal{V} : \mathbf{L}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v}\}} \quad (8.3.3)$$

À dimensão $\dim \mathcal{E}(\lambda)$ chama-se a **multiplicidade geométrica** do valor próprio λ . O valor próprio λ diz-se **degenerado** quando $\dim \mathcal{E}(\lambda) \geq 2$.

► **8.11 Teorema** ... Suponhamos que $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathcal{V} - \{\mathbf{0}\}$ são vectores próprios pertencentes respectivamente aos valores próprios *distintos* $\lambda, \eta \in \mathbb{K}$, de um operador linear $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$. Então $\mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$ são linearmente independentes.

Dem.: De facto, se por exemplo $\mathbf{v} = r\mathbf{u}$, para algum $r \in \mathbb{K} - \{0\}$, então viria que:

$$\eta r\mathbf{u} = \eta \mathbf{v} = \mathbf{L}(\mathbf{v}) = \mathbf{L}(r\mathbf{u}) = r\mathbf{L}(\mathbf{u}) = r\lambda\mathbf{u}$$

e portanto:

$$r(\lambda - \eta)\mathbf{u} = \mathbf{0}$$

o que implica, uma vez que $\lambda \neq \eta$ e $r \neq 0$, que $\mathbf{u} = \mathbf{0}$, o que é absurdo.

■

► **8.12 Definição [Operador diagonalizável]** ... Um operador linear $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ diz-se **diagonalizável** se qualquer das seguintes condições equivalentes se verifica:

- Existe uma base de $\mathcal{V}$, relativamente à qual a matriz de $\mathbf{L}$ é uma matriz diagonal.
- $\mathcal{V}$ decompõe-se numa soma directa de subespaços próprios (*subespaços invariantes de dimensão um*) de $\mathbf{L}$.

8.4 Cálculo de valores e vectores próprios

► **8.13** Suponhamos que $\lambda \in \mathbb{K}$ é um valor próprio do operador $\mathbf{L} : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}$ e que $\mathcal{E}(\lambda)$ é espaço próprio associado. Como já vimos, a restrição de $\mathbf{L}$ a $\mathcal{E}(\lambda)$ é uma **homotetia** de razão λ (eventualmente λ pode ser 0), isto é:

$$\mathbf{L}(\mathbf{v}) = \lambda \mathbf{v} \quad \forall \mathbf{v} \in \mathcal{E}(\lambda)$$

Em particular, se $\lambda = 0$ é valor próprio de $\mathbf{L}$, isto significa que o núcleo de $\mathbf{L}$:

$$\ker \mathbf{L} = \mathcal{E}(0)$$

não se reduz ao vector nulo $\mathbf{0}$, e portanto $\mathbf{L}$ é não inversível (por outras palavras, $\mathbf{L}$ é **singular**), ou de forma equivalente, $\det \mathbf{L} = 0$.

Quando $\lambda \neq 0$, dizer que λ é valor próprio de $\mathbf{L}$, é equivalente a dizer que 0 é valor próprio de $\mathbf{L} - \lambda \text{Id}$, o que, pelo parágrafo anterior, é equivalente a dizer que $\mathbf{L} - \lambda \text{Id}$ é singular, ou ainda que:

$$\det (\mathbf{L} - \lambda \text{Id}) = 0 \quad (8.4.1)$$

► **8.14 Definição** ... O polinómio:

$$p(t) = \det (\mathbf{L} - t \text{Id}) \quad (8.4.2)$$

diz-se o **polinómio característico** de $\mathbf{L}$.

Portanto as raízes em $\mathbb{K}$ da chamada **equação característica** de $\mathbf{L}$:

$$p(t) = \det (\mathbf{L} - t \text{Id}) = 0 \quad (8.4.3)$$

(se existirem), são exactamente os valores próprios de $\mathbf{L}$ em $\mathbb{K}$.

► **8.15** Para calcular o polinómio característico de $\mathbf{L}$, usamos uma representação matricial qualquer L do operador $\mathbf{L}$, e põmos $p(t) = \det (L - t \text{Id})$. Note que o polinómio característico não depende da representação matricial de $\mathbf{L}$. De facto, qualquer outra representação matricial de $\mathbf{L}$, é do tipo PLP^{-1} , onde P é uma matriz inversível, e tem-se que:

$$\begin{aligned} \det (PLP^{-1} - t \text{Id}) &= \det (PLP^{-1} - tPP^{-1}) = \det (P(L - t \text{Id})P^{-1}) \\ &= \det (L - t \text{Id}) = p(t) \end{aligned}$$

► **8.16 Exemplo** [Cálculo de valores próprios] ... Calcule os valores e vectores próprios (reais) do operador linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, cuja matriz na base canónica de $\mathbb{R}^2$ é:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$$

A equação característica de $\mathbf{A}$ é:

$$\begin{aligned} p(t) &= \det(A - t \text{Id}) \\ &= \det \begin{pmatrix} 3-t & 4 \\ 4 & -3-t \end{pmatrix} \\ &= t^2 - 25 = 0 \end{aligned} \quad (8.4.4)$$

cujas raízes reais (os valores próprios reais de $\mathbf{A}$) são $\lambda_1 = 5$ e $\lambda_2 = -5$.

Para calcular os vectores próprios $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$, pertencentes ao valor próprio $\lambda = 5$, devemos resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} 3-5 & 4 \\ 4 & -3-5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

isto é:

$$\begin{cases} -2x^1 + 4x^2 = 0 \\ 4x^1 - 8x^2 = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é:

$$\begin{cases} x^1 = 2s \\ x^2 = s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Portanto os vectores próprios de $\mathbf{A}$, pertencentes ao valor próprio $\lambda_1 = 5$, são da forma:

$$s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Por outras palavras, o espaço próprio $\mathcal{E}(5)$ é:

$$\mathcal{E}(5) = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

Procedendo da mesma forma relativamente ao outro valor próprio $\lambda_2 = -5$, podemos calcular que os vectores próprios de $\mathbf{A}$, pertencentes ao valor próprio $\lambda_2 = -5$, são da forma:

$$s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Note que neste exemplo os vectores próprios $\mathbf{u}_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ e $\mathbf{u}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ formam uma base $\mathcal{B} = \{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ relativamente à qual a matriz de $\mathbf{A}$ é diagonal:

$$[\mathbf{A}]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

portanto $\mathbf{A}$ é um operador diagonalizável.

► **8.17 Exemplo [Cálculo de valores próprios]** ... Calcule os valores e vectores próprios (reais) do operador linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, cuja matriz na base canónica de $\mathbb{R}^3$ é:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

A equação característica de $\mathbf{A}$ é:

$$\begin{aligned} p(t) &= \det(A - t \text{Id}) \\ &= \det \begin{pmatrix} 1-t & 0 & 0 \\ -5 & 2-t & 0 \\ 2 & 3 & 7-t \end{pmatrix} \\ &= (1-t)(2-t)(7-t) = 0 \end{aligned} \quad (8.4.5)$$

cujas raízes reais (os valores próprios reais de $\mathbf{A}$) são $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ e $\lambda_3 = 7$. Para calcular os vectores próprios $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, pertencentes ao valor próprio $\lambda_2 = 2$, devemos resolver o sistema:

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 0 & 0 \\ -5 & 2-2 & 0 \\ 2 & 3 & 7-2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

isto é:

$$\begin{cases} -x^1 & = 0 \\ -5x^1 & = 0 \\ 2x^1 + 3x^2 + 5x^3 & = 0 \end{cases}$$

cuja solução geral é:

$$\begin{cases} x^1 & = 0 \\ x^2 & = -\frac{5}{3}s \\ x^3 & = s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}$$

Portanto os vectores próprios de $\mathbf{A}$, pertencentes ao valor próprio $\lambda_2 = 2$, são da forma:

$$s \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{5}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R} - \{0\}$$

Procedendo da mesma forma relativamente aos outros valores próprios $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_3 = 7$, podemos calcular os correspondentes vectores próprios.

Notas ...

1. Note que o polinómio característico $p(t) = \det(\mathbf{L} - t \text{Id})$, de um operador linear $\mathbf{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, é sempre um polinómio do 3.º grau, do tipo:

$$p(t) = -t^3 + bt^2 + ct + d \quad b, c, d \in \mathbb{R}$$

e por isso admite sempre uma raiz real $\lambda \in \mathbb{R}$ (eventualmente nula). Se $\lambda \neq 0$, concluímos portanto que, neste caso, existe sempre um subespaço próprio invariante $\mathcal{E}(\lambda) \subseteq \mathbb{R}^3$, de dimensão superior ou igual a 1.

2. Todo o operador linear $\mathbf{L} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tem quando muito 3 valores próprios distintos. Se $\mathbf{L}$ tem exactamente 3 valores próprios distintos, então os correspondentes vectores próprios formam uma base de $\mathbb{R}^3$, e a matriz de $\mathbf{L}$ nessa base, é uma matriz diagonal cujas entradas da diagonal principal, são esses valores próprios.

8.5 Sistemas dinâmicos lineares discretos

► **8.18** Um sistema dinâmico linear discreto é um sistema recursivo do tipo:

$$\boxed{\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k)} \quad (8.5.1)$$

onde $\mathbf{A}$ é uma matriz $n \times n$, e

$$\mathbf{x} : \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$$

é uma função que a cada "instante de tempo" discreto $k = 0, 1, 2, \dots$, associa um vector (ou um ponto) $\mathbf{x}(k)$ em $\mathbb{R}^n$.

A equação (8.5.1) indica pois a lei de evolução do sistema: conhecido o **valor inicial** do sistema:

$$\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_o \quad (8.5.2)$$

os valores nos instantes seguintes são calculados sucessivamente através de:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(1) &= \mathbf{A}\mathbf{x}_o \\ \mathbf{x}(2) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(1) = \mathbf{A}^2\mathbf{x}_o \\ \mathbf{x}(3) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(2) = \mathbf{A}^3\mathbf{x}_o \\ &\vdots \\ \mathbf{x}(k) &= \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}_o \\ &\vdots \end{aligned} \quad (8.5.3)$$

► **8.19** Quando a matriz $\mathbf{A}$ de evolução é diagonalizável, o cálculo explícito da evolução através da equação (8.5.3):

$$\boxed{\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}^k\mathbf{x}(0)} \quad (8.5.4)$$

torna-se particularmente simples.

De facto, suponhamos que $\mathcal{B} = [\mathbf{v}_1 \ \mathbf{v}_2 \ \dots \ \mathbf{v}_n]$ é uma base de $\mathbb{R}^n$ constituída por vectores próprios (não necessariamente distintos) da matriz $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}\mathbf{v}_j = \lambda_j\mathbf{v}_j, \quad j = 1, 2, \dots, n \quad (8.5.5)$$

Se $\mathcal{C} = [\mathbf{e}_1 \ \mathbf{e}_2 \ \dots \ \mathbf{e}_n]$ é a base canónica de $\mathbb{R}^n$, pômos, como habitualmente:

$$\mathcal{B} = \mathcal{C}P \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x}_{\mathcal{B}} = \mathbf{x}_{\mathcal{C}P} = P^{-1}\mathbf{x}_{\mathcal{C}} \quad (8.5.6)$$

Portanto, pondo $\mathbf{x}_{\mathcal{C}}(k) = \mathbf{x}(k)$ em (8.5.4), vem que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\mathcal{B}}(k) &= P^{-1}\mathbf{x}_{\mathcal{C}}(k) \\ &= P^{-1}\mathbf{A}^k\mathbf{x}_{\mathcal{C}}(0) \\ &= P^{-1}\mathbf{A}^kP\mathbf{x}_{\mathcal{B}}(0) \\ &= (P^{-1}\mathbf{A}P)^k\mathbf{x}_{\mathcal{B}}(0) \\ &= (\text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n))^k\mathbf{x}_{\mathcal{B}}(0) \\ &= \text{diag}(\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k)\mathbf{x}_{\mathcal{B}}(0) \end{aligned} \quad (8.5.7)$$

Isto é, a i -componente de $\mathbf{x}(k)$ na base $\mathcal{B}$, que diagonaliza $\mathbf{A}$, é obtida muito simplesmente multiplicando a potência de expoente k , do valor próprio λ_i , pela i -componente do vector inicial $\mathbf{x}(0)$ na base $\mathcal{B}$:

$$x_{\mathcal{B}}^i(k) = (\lambda_i)^k x_{\mathcal{B}}^i(0) \quad (8.5.8)$$

Note que no membro direito da equação anterior não há soma no índice i !

Na prática procedemos como segue:

- [1]. Escrevemos o vector inicial $\mathbf{x}(0)$ na base $\mathcal{B}$, calculando assim as componentes $c^i = x_{\mathcal{B}}^i(0)$:

$$\mathbf{x}(0) = \mathcal{B}\mathbf{x}_{\mathcal{B}}(0) = \sum_i c^i \mathbf{v}_i$$

- [2]. Pômos:

$$\mathbf{x}(k) = \mathcal{C}\mathbf{x}_{\mathcal{C}}(k) = \mathcal{B}\mathbf{x}_{\mathcal{B}}(k) = \sum_i (c^i \lambda_i^k) \mathbf{v}_i$$

Concluindo :

$$\mathbf{x}(k) = \sum_i (c^i \lambda_i^k) \mathbf{v}_i, \quad \text{onde} \quad \mathbf{x}(0) = \sum_i c^i \mathbf{v}_i \quad (8.5.9)$$

8.6 Números de Fibonacci. Número de ouro

► **8.20 Números de Fibonacci** ... são definidos pela lei recursiva (de segunda ordem) seguinte:

$$x(k+2) = x(k+1) + x(k) \quad (8.6.1)$$

isto é, cada número de Fibonacci é obtido somando os dois anteriores. As condições iniciais são:

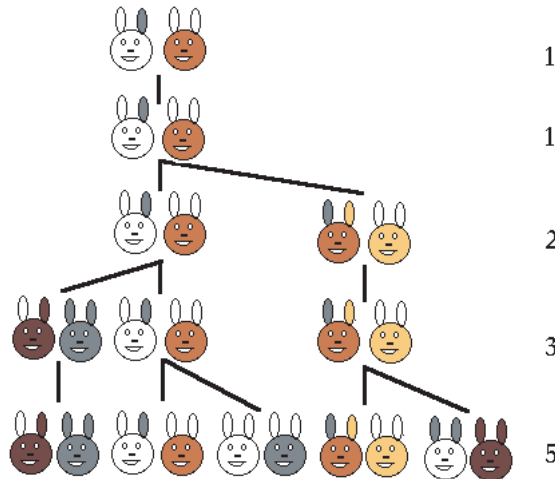
$$x(0) = a, \quad x(1) = b \quad (8.6.2)$$

Por exemplo, para:

$$x(0) = a = 0, x(1) = b = 1 \quad (8.6.3)$$

obtem-se:

$$0 \quad 1 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 5 \quad 8 \quad 13 \quad 21 \quad 34 \quad \dots \quad (8.6.4)$$



Foram criados pelo matemático italiano Fibonacci como um modelo simplificado do crescimento de uma população de coelhos. Neste modelo:

$$x(n) = \text{número total de pares de coelhos no ano } n \quad (8.6.5)$$

O processo inicia-se no ano $n = 0$ com um único par de coelhos jovens. Ao fim de cada ano, cada par dá origem a um novo par de descendentes. No entanto, cada par necessita de um ano para procriar o seu par de descendentes.

► **8.21 Números de Fibonacci. Escrita matricial** ... Definamos, para cada $k \in \mathbb{N}$, um vector $\mathbf{x}(k) \in \mathbb{R}^2$ através de:

$$\mathbf{x}(k) = \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k+1) \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \quad (8.6.6)$$

Então (8.6.1) pode ser escrita na forma matricial:

$$\begin{pmatrix} x(k+1) \\ x(k+2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(k) \\ x(k+1) \end{pmatrix} \quad (8.6.7)$$

isto é:

$$\mathbf{x}(k+1) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k), \quad \text{onde } \mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad (8.6.8)$$

► **8.22 Cálculo explícito dos números de Fibonacci** ... Para calcular a forma explícita dos números de Fibonacci, usamos o método descrito no número 8.19.

Para isso, determinamos os valores e vectores próprios da matriz $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Um cálculo simples mostra que eles são:

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618034\dots, & \mathbf{v}_1 &= \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\ \lambda_2 &= \frac{1-\sqrt{5}}{2} = -0.618034\dots, & \mathbf{v}_2 &= \begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (8.6.9)$$

Escrevemos agora o vector inicial na base $\mathcal{B}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{\mathcal{B}}(0) &= P^{-1}\mathbf{x}_{\mathcal{C}}(0) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} & \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{2a+(1+\sqrt{5})b}{2\sqrt{5}} \\ -\frac{2a+(1-\sqrt{5})b}{2\sqrt{5}} \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \end{aligned} \quad (8.6.10)$$

isto é:

$$\mathbf{x}(0) = \frac{2a+(1+\sqrt{5})b}{2\sqrt{5}}\mathbf{v}_1 - \frac{2a+(1-\sqrt{5})b}{2\sqrt{5}}\mathbf{v}_2 \quad (8.6.11)$$

Usando a fórmula (8.5.9) vem então que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= \frac{2a+(1+\sqrt{5})b}{2\sqrt{5}}\lambda_1^k\mathbf{v}_1 - \frac{2a+(1-\sqrt{5})b}{2\sqrt{5}}\lambda_2^k\mathbf{v}_2 \\ &= \frac{2a+(1+\sqrt{5})b}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k\begin{pmatrix} \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} - \\ &\quad \frac{2a+(1-\sqrt{5})b}{2\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\begin{pmatrix} \frac{-1-\sqrt{5}}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

donde se deduz que:

$$x(k) = \frac{(-1 + \sqrt{5})a + 2b}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k + \frac{(1 + \sqrt{5})a - 2b}{2\sqrt{5}} \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \quad (8.6.12)$$

► **8.23 Fórmula de Binet** ... Para os valores iniciais $a = 0$ e $b = 1$, obtemos a chamada **fórmula de Binet**:

$$x(k) = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^k - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^k \right) \quad (8.6.13)$$

► **8.24 Número de ouro** ... Os valores próprios da matriz $\mathbf{A}$, verificam as desigualdades seguintes:

$$0 < |\lambda_2| = \frac{\sqrt{5} - 1}{2} < 1 < \lambda_1 = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} \quad (8.6.14)$$

Portanto os termos que envolvem λ_1^k divergem para ∞ , enquanto que os que envolvem λ_2^k convergem para 0.

O valor próprio dominante $\lambda_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618034\dots$ é o chamado **número de ouro** (ou **razão de ouro**). Desempenha um papel muito importante em crescimento em espiral em vários fenómenos naturais bem como em certas criações artísticas em arquitectura e pintura.

► **8.25 Exercício** ... Considere a aplicação linear:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}: \quad \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) &\longmapsto \mathbf{T}(x, y, z) = (4z, x + 2y + z, 2x + 4y - 2z) \end{aligned}$$

a.) Calcular a matriz de $\mathbf{T}$ relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$. Calcular o núcleo e a imagem de $\mathbf{T}$.

b.) Calcular os valores próprios de $\mathbf{T}$ e, se possível, uma base de $\mathbb{R}^3$ constituída por vectores próprios de $\mathbf{T}$. Calcule a matriz de $\mathbf{T}$ relativamente a esta nova base.

c.) Usando os resultados das alíneas anteriores, calcule $\mathbf{T}^3(0, 0, -4)$, onde $\mathbf{T}^3 = \mathbf{T} \circ \mathbf{T} \circ \mathbf{T}$.

Resolução ...

a.) A matriz é $T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & -2 \end{pmatrix}$. $\ker \mathbf{T} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : \mathbf{T}(x, y, z) = (4z, x + 2y + z, 2x + 4y - 2z) = (0, 0, 0)\}$ o que implica que:

$$\begin{aligned} \begin{cases} 4z = 0 \\ x + 2y + z = 0 \\ 2x + 4y - 2z = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} z = 0 \\ x + 2y = 0 \\ 2x + 4y = 0 \end{cases} \Rightarrow \\ \begin{cases} z = 0 \\ x + 2y = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = -2t \\ y = t \\ z = 0 \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

isto é $\ker \mathbf{T} = \{t(-2, 1, 0) : t \in \mathbb{R}^3\} = \text{span}\{(-2, 1, 0)\}$ que é a recta de $\mathbb{R}^3$ gerada por $(-2, 1, 0)$ e de equações cartesianas $x + 2y = 0$ e $z = 0$.

A imagem de $\mathbf{T}$ é gerada por $\mathbf{T}(\mathbf{e}_1) = (0, 1, 2)$, $\mathbf{T}(\mathbf{e}_2) = (0, 2, 4)$ e $\mathbf{T}(\mathbf{e}_3) = (4, 1, -2)$, isto é:

$$\begin{aligned}\text{im}\mathbf{T} &= \text{span}\{(0, 1, 2), (0, 2, 4), (4, 1, -2)\} \\ &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y, z) = a(0, 1, 2) + b(0, 2, 4) + c(4, 1, -2), \quad a, b, c \in \mathbb{R}\}\end{aligned}$$

Portanto:

$$\begin{cases} 4c = x \\ a + 2b + c = y \\ 2a + 4b - 2c = z \end{cases} \Rightarrow \dots \Rightarrow \begin{cases} a + 2b + c = y \\ 4c = 2y - z \\ 0 = x - 2y + z \end{cases}$$

isto é, $\text{im}\mathbf{T}$ é o plano $x - 2y + z = 0$ em $\mathbb{R}^3$.

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\mathbf{T}; -4) &= \text{span}\{(1, 0, -1)\} \\ \mathcal{E}(\mathbf{T}; 0) &= \text{span}\{(-2, 1, 0)\} \\ \mathcal{E}(\mathbf{T}; 4) &= \text{span}\{(1, 1, 1)\}\end{aligned}$$

e os vectores $\{\mathbf{e}_1 = (1, 0, -1), \mathbf{e}_2 = (-2, 1, 0), \mathbf{e}_3 = (1, 1, 1)\}$ constituem uma base de vectores próprios de $\mathbf{T}$ que é, por isso, diagonalizável. Nesta base a matriz de $\mathbf{T}$ é $\text{diag}(-4, 0, 4)$.

c.) Calculando as componentes do vector $(0, 0, -4)$ na base de vectores próprios de $\mathbf{T}$, calculada anteriormente, vem que:

$$(0, 0, -4) = a(1, 0, -1) + b(-2, 1, 0) + c(1, 1, 1) = (a - 2b + c, b + c, -a + c)$$

donde se deduz que $a = -1, b = 1, c = -1$. Portanto:

$$\begin{aligned}\mathbf{T}^3(0, 0, -4) &= -\mathbf{T}^3(1, 0, -1) + \mathbf{T}^3(-2, 1, 0) - \mathbf{T}^3(1, 1, 1) \\ &= -(-4)^3(1, 0, -1) + 0^3(-2, 1, 0) - 4^3(1, 1, 1) \\ &= (0, -64, -128)\end{aligned}$$

► **8.26 Exercício** ... Considere a aplicação linear $\mathbf{A} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$\mathbf{A}(x, y) = (6x - 2y, -2x + 9y)$$

a.) Mostrar que $\mathbf{A}$ é diagonalizável e calcular uma base ortonormada para $\mathbb{R}^2$ (com a estrutura Euclideana usual) constituída por vectores próprios de $\mathbf{A}$.

b.) Considere as sucessões (x_n) e (y_n) , definidas pelas fórmulas de recorrência seguintes:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 6x_n - 2y_n \\ y_{n+1} = -2x_n + 9y_n \end{cases}, \quad n \geq 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} x_0 = 1 \\ y_0 = 1 \end{cases}$$

Calcule x_n e y_n como funções de n .

Resolução ...

a.) A matriz de $\mathbf{A}$ relativamente à base canónica de $\mathbb{R}^3$ é a matriz simétrica:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

Os valores próprios calculam-se por:

$$\det(A - \lambda \text{Id}) = \det \begin{pmatrix} 6 - \lambda & -2 \\ -2 & 9 - \lambda \end{pmatrix} = (6 - \lambda)(9 - \lambda) - 4 = 0 \Rightarrow$$

Como existem dois ($= \dim \mathbb{R}^2$) valores próprios distintos, $\mathbf{A}$ é diagonalizável. Os espaços próprios calculam-se da forma habitual e são:

$$\mathcal{E}(5) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \mathcal{E}(10) = \mathbb{R} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Estes espaços são ortogonais (tinham que o ser, pelo teorema espectral!). Um base ortonormada para $\mathbb{R}^2$ constituída por vectores próprios de $\mathbf{A}$ é:

$$\mathcal{B} = \left\{ \mathbf{u}_1 = \frac{(2, 1)}{\sqrt{5}}, \quad \mathbf{u}_2 = \frac{(1, -2)}{\sqrt{5}} \right\}$$

a.) Pondo $\mathbf{x}_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$, as fórmulas de recorrência dadas escrevem-se na forma vectorial:

$$\mathbf{x}_{n+1} = A\mathbf{x}_n, \quad \mathbf{x}_0 = (1, 1)$$

onde $A = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$. Os cálculos devem ser feitos na base $\mathcal{B}$ que diagonaliza o operador $\mathbf{A}$. Escrevendo o vector $\mathbf{x}_n$ na base $\mathcal{B}$, vem que:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n &= (\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{u}_1)\mathbf{u}_1 + (\mathbf{x}_n \cdot \mathbf{u}_2)\mathbf{u}_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}}(2x_n + y_n)\mathbf{u}_1 + \frac{1}{\sqrt{5}}(x_n - 2y_n)\mathbf{u}_2 \end{aligned} \quad (8.6.15)$$

isto é, as componentes de $\mathbf{x}_n$ na base $\mathcal{B}$ são $\tilde{x}_n = \frac{2x_n + y_n}{\sqrt{5}}, \tilde{y}_n = \frac{x_n - 2y_n}{\sqrt{5}}$.

Na base $\mathcal{B}$ as fórmulas de recorrência escrevem-se na forma:

$$\begin{pmatrix} \tilde{x}_{n+1} \\ \tilde{y}_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\tilde{x}_n \\ 10\tilde{y}_n \end{pmatrix}$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{y}_1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5\tilde{x}_0 \\ 10\tilde{y}_0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}_2 \\ \tilde{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5\tilde{x}_1 \\ 10\tilde{y}_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5^2\tilde{x}_0 \\ 10^2\tilde{y}_0 \end{pmatrix} \\ \dots \quad \begin{pmatrix} \tilde{x}_n \\ \tilde{y}_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 5^n\tilde{x}_0 \\ 10^n\tilde{y}_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mas $\tilde{x}_0 = \frac{2x_0 + y_0}{\sqrt{5}} = \frac{3}{\sqrt{5}}, \tilde{y}_0 = \frac{x_0 - 2y_0}{\sqrt{5}} = \frac{-1}{\sqrt{5}}$. Portanto:

$$\begin{cases} \tilde{x}_n &= \frac{2x_n + y_n}{\sqrt{5}} &= 5^n \frac{3}{\sqrt{5}} \\ \tilde{y}_n &= \frac{x_n - 2y_n}{\sqrt{5}} &= 10^n \frac{-1}{\sqrt{5}} \end{cases}$$

e resolvendo em ordem a x_n e y_n obtemos:

$$x_n = 2 \times 5^{n-1}(3 - 2^{n-1}), \quad y_n = 5^{n-1}(3 + 4 \times 2^{n-1})$$

8.7 Exercícios

► **Exercício 8.1** ... Seja f um endomorfismo de $\mathbb{R}_2(X)$ tal que $X + X^2$ é um vector próprio associado ao valor próprio 2, $-1 + X$ é um vector próprio associado ao valor próprio 5 e X^2 é um vector próprio associado ao valor próprio -3. Determine $f(a_0 + a_1X + a_2X^2)$.

► **Exercício 8.2** ... Seja f um endomorfismo de $\mathbb{C}_2(X)$ munido da estrutura usual de espaço vectorial complexo. Suponha que :

$1 + iX$ é um vector próprio de valor próprio i ,

$1 - X$ é um vector próprio de valor próprio 1 e

X^2 é um vector próprio de valor próprio -1 .

Calcule $f(a + bX + cX^2)$.

► **Exercício 8.3** ... Seja f um automorfismo de um espaço vectorial E . Qual a relação entre os valores próprios de f e os valores próprios de f^{-1} ?

► **Exercício 8.4** ... Sejam f e g endomorfismos de E .

a) Mostre que, se $\mathbf{u}$ é um vector próprio de f , com valor próprio associado λ então $\mathbf{u}$ é um vector próprio de $f \circ f$ com valor próprio associado λ^2 .

b) Mostre que, se $\mathbf{u}$ é um vector próprio de f e de g , então $\mathbf{u}$ é um vector próprio de $g \circ f$ e de qualquer combinação linear de f e de g , $af + bg$.

c) Mostre que, se todos os elementos não nulos de E são vectores próprios de f , então f tem um único valor próprio (e, portanto, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que, para qualquer $\mathbf{u} \in E$, $f(\mathbf{u}) = \alpha\mathbf{u}$).

► **Exercício 8.5** ... Seja $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ um endomorfismo tal que:

$$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y = z\} \text{ e } \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y + z = 0\}$$

são subespaços próprios associados respectivamente aos valores próprios 1 e 2. Determine $f((x, y, z))$.

► **Exercício 8.6** ... Em cada um dos seguintes casos, determine, se existirem, os valores próprios de f , os subespaços próprios associados e as respectivas dimensões e diga se f é diagonalizável; no caso de f ser diagonalizável, indique uma base do domínio de f composta por vectores próprios de f e indique a matriz de f relativamente a essa base.

a) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (2x - y, y)$; b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (-x, -y)$;

c) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (3x + y, 12x + 2y)$;

d) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (3x + y + z, 3y + z, 3z)$;

e) $f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y, z) = (3x + y + z, 3y, 3z)$;

f) $f : \mathbb{R}_2(X) \longrightarrow \mathbb{R}_2(X)$, $f(P) = P(0) + XP(1) + X^2P(-1)$;

g) $f : \mathbb{R}_3(X) \longrightarrow \mathbb{R}_3(X)$, $f(P) = P + (X + 1)P'$;

h) $f : M_{2,2}(\mathbb{R}) \longrightarrow M_{2,2}(\mathbb{R})$,

$$f \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a + 2b + c + d & 2a + 3b + c - d \\ 2c & -c \end{pmatrix}.$$

i) $f : \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, $f(u, v) = (iu, u + v)$;

► **Exercício 8.7** ... Calcular fórmulas explícitas para as soluções das seguintes fórmulas recursivas:

a). $\begin{cases} x(k+1) = x(k) - 2y(k) \\ y(k+1) = -2x(k) + y(k) \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$

b). $\begin{cases} x(k+1) = \frac{1}{2}x(k) + y(k) \\ y(k+1) = y(k) - 2z(k) \\ z(k+1) = \frac{1}{3}z(k) \end{cases}, \quad \begin{cases} x(0) = 1 \\ y(0) = -1 \\ z(0) = 1 \end{cases}$

c). $x(k+2) = -x(k+1) + 2x(k)$, $x(0) = 1$, $x(1) = 2$

d). $x(k+3) = 2x(k+2) + x(k+1) - 2x(k)$, $x(0) = 0$, $x(1) = 2$, $x(2) = 3$

► **Exercício 8.8** ... Classifique as seguintes isometrias em $\mathbb{R}^2$:

a) $f(x, y) = (\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y)$.

b) $f(x, y) = (\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y, -\frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y)$.

c) $f(x, y) = (-\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}y, -\frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y)$.

d) $f(x, y) = (x, y)$.

e) $f(x, y) = (-y, x)$.

► **Exercício 8.9** ... Em cada um dos casos que se seguem, determine $\mathbf{S}_r(x, y)$, ${}_b M_b(\mathbf{S}_r)$ e uma base b de $\mathbb{R}^2$ tal que ${}_b M_b(\mathbf{S}_r) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

a) r é a recta de equação $y = 2x$;

b) r é a recta de equação $3x - y = 0$;

c) r é a recta de equação $y = (tg \frac{\pi}{5})x$;

► **Exercício 8.10** ... Em cada um dos seguintes casos, mostre que o endomorfismo f de $\mathbb{R}^2$ ou $\mathbb{R}^3$ é uma isometria linear e descreva f geometricamente (isto é, diga se f é uma simetria ou uma rotação; no caso de ser uma simetria, diga relativamente a que recta, no caso de ser uma rotação determine o ângulo).

a) $f(x, y) = (y, x)$;

b) $f(x, y) = (y, -x)$;

c) $f(x, y) = (\frac{\sqrt{2}x - \sqrt{2}y}{2}, \frac{\sqrt{2}x + \sqrt{2}y}{2})$;

d) $f(x, y) = ((-\cos \frac{\pi}{8})x + (\sin \frac{\pi}{8})y, (\sin \frac{\pi}{8})x + (\cos \frac{\pi}{8})y)$;

► **Exercício 8.11** ... Dado:

a) $\mathbf{a} = (1, 4, -3)$, calcule $\mathbf{P}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ sendo $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcule $\ker \mathbf{P}_{\mathbf{a}}$. Defina $\mathbf{S}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$.

b) $\mathbf{a} = (0, 1, 2)$, calcule $\mathbf{P}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ sendo $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcule $\ker \mathbf{P}_{\mathbf{a}}$. Defina $\mathbf{S}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$.

c) $\mathbf{a} = (1, 1, 1)$, calcule $\mathbf{P}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ sendo $\mathbf{x} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcule $\ker \mathbf{P}_{\mathbf{a}}$. Defina $\mathbf{S}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$.

d) $\mathbf{a} = (1, 1)$, calcule $\mathbf{P}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ sendo $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcule $\ker \mathbf{P}_{\mathbf{a}}$. Defina $\mathbf{S}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$.

e) $\mathbf{a} = (1, 0)$, calcule $\mathbf{P}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$ sendo $\mathbf{x} = (x, y) \in \mathbb{R}^2$. Calcule $\ker \mathbf{P}_{\mathbf{a}}$. Defina $\mathbf{S}_{\mathbf{a}}(\mathbf{x})$.

► **Exercício 8.12** ... Defina a simetria relativamente à recta $2x - y = 0$ em $\mathbb{R}^2$.

► **Exercício 8.13** ... Em cada uma das alíneas que se seguem, calcule $\mathbf{P}_{\pi}(\mathbf{x})$ e $\ker \mathbf{P}_{\pi}$, em $\mathbb{R}^3$ sendo π cada um dos planos que se seguem. Calcule também em cada caso, os valores próprios e os vectores próprios de $\mathbf{P}_{\pi}$. Finalmente, defina $\mathbf{S}_{\pi}(\mathbf{x})$.

a) $2x - y + 3z = 0$;

b) $x + y + z = 0$;

c) $3x + y + 2z = 0$.

► **Exercício 8.14** ... As matrizes que se seguem, representam rotações em $\mathbb{R}^3$ relativamente à base canónica. Mostre que são matrizes ortogonais de determinante igual a 1. Calcule o eixo e o ângulo de rotação:

$$\begin{aligned} \text{a) } A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; & \text{b) } A &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}; & \text{c) } A &= \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$