Exercícios de Elementos de Matemática I

Soluções:

(1a) Não é derivável em 0; (9b) Não é derivável em 0. (2a) $y = 2x + 1$; (2b) $y - 3 = 6(x - 1)$; (2c) $y - 6 = 5(x - 2)$; (2d) $y - \sqrt{2}/2 = -(x - \sqrt{2}/2)$. (3) Como $f'(1) = g'(1)$, é comum a tangente aos gráficos de f e de g no ponto $(1, 3)$. (4a) $(2 + \sqrt{7}, 14 + 4\sqrt{7})$ e $(2 - \sqrt{7}, 14 - 4\sqrt{7})$; (4b) $y - 9 = (10 + 2\sqrt{19})(x - 5)$ e $y - 9 = (10 - 2\sqrt{19})(x - 5)$; (4c) $y - 7 = 4(x - 2)$. (5a) $35x^4 + 6x$; (5b) $\frac{27x^2+12x+70}{(2-9x)^2}$; (5c) $2x - 2/x^3$; (13d) $(5x)^{-4/5}$; (5e) $\frac{2(27x^2+12x+70)}{5(3x^2-x+8)^{3/5}(2-9x)^{7/5}}$; (5f) $(5/2)(x^{3/2} + x^{-7/2})$; (5g) $\frac{-(1/2)\,x^{5/2}+(3/2)\,x^{1/2}-(1/2)\,x-1}{(1-x^2)^{3/2}}$; (5h) $\frac{3x^4+1}{\sqrt{x^4+1}}$; (5i) $\frac{(5/6)\,x^{3/2}-(1/3)\,x+1/3}{x^{5/3}}$; (5j) $\frac{-5x^4-9x^2-4x}{6(x^3-1)^{3/2}(x^2+1)^{2/3}}$; (5k $cos(cos(x))sen(x)$; (5l) $cos(2x)$; (5m) $\frac{(x^3+x)cos(x)+(1-x^2)sen(x)}{(1+x^2)^2}$; (5n) $\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}\,cos(\frac{x}{1+x^2})$; (5o) $\frac{-sen(x)cos(x)}{(1+sen^2(x))^{3/2}}$; (5p) $(1/3)(x - 1)^{-4/3} sen((x - 1)^{-1/3})$;

(6) $1/3$ e $1/5$. (7a) $-66(3x + 1)^{-3}$; (7b) 0; (7c) $x(1 - x^2)^{-3/2}$; (7d) $-2cos(x)sen(x)$; (7e) $sen(x)$; (7f) $(x^2 - 12)sen(x) - 8xcos(x)$ (8a) $6 < f(x) < 34$ f é limitada mas não tem máximo nem mínimo; (8b) g não é limitada e não tem máximo nem mínimo; (8c) $-1 \le h(x) \le 1$ h é limitada. Atinge o valor máximo $= 1$ em $\pi/2$ e o valor mínimo $= -1$ em $-\pi/2$; (8d) $-1 \le j(x) \le 1$ j é limitada. Atinge o valor máximo $= 1$ em $\pi/2 + 2k\pi$ e o valor mínimo $= -1$ em $-\pi/2 + (2k + 1)\pi$ para k inteiro; (8e) $1/5 \le k(x) \le 1$ k é limitada. Atinge o valor máximo $= 1$ em 1 e o valor mínimo $= 1/5$ em 5; (9a) $f \circ f(x) = |x|$, $D_{f \circ f} = [-1, 1] = D_f$, $f \circ f \circ f = f$ (9c) $(f \circ f \circ f)'(x) = -x(1 - x^2)^{-1/2}$, $D_{f \circ f \circ f} =]-1, 1[$; (10) $x = y = 201$;

(11) $(-1/2, \sqrt{2}/2)$, $(-1/2, -\sqrt{2}/2)$; (13b) A função atinge um mínimo no ponto de viragem; (14c) $\psi''(x) = -\sqrt{2/l}\frac{9\pi^2}{l^2} sen(\frac{3\pi x}{l})$,, ψ atinge um máximo em $x = l/6(2k + 1)$ se k for par, caso contrário atinge um mínimo. (15) Não existem números reais a, b, c, d, e tais que f verifique as condições do problema.

(18a) Não, porque f não é derivável em $0 \in]-1, 1[$; (18b) Não, porque $f(1) \neq f(2)$; (18c) Não, porque o intervalo $]-1, 1[$ não é fechado; (18d) Sim, $(0, 1)$; (18e) Sim, $(\pi/2, 1)$, $(3\pi/2, -1)$.

(21a) Sim, 3; (21b) Sim, todos os pontos do intervalo $]-1, 1[$; (21c) Não, porque g não é derivável em $1 \in]-2, 4[$. (23a) $y = 3x - 2$, erro inferior a $9/8$; (23b) $1 + 3(x - 1) + 3(x - 1)^2$, erro cometido com a aproximação dada pela parábola $= 1/8$, erro cometido com a aproximação dada pela recta $= 7/8$; (24) $-2 + (-2)(x - 1) + (3/2)(x - 1)^2 - (6/3!)(x - 1)^3 = -x^3 + (9/2)\,x^2 - 8\,x + 5/2$; (25a) $70 + 145(x - 2) + 128(x - 2)^2 + 56(x - 2)^3 + 12(x - 2)^4 + (x - 2)^5$; (25b) $1 + x + x^2/2 + x^3/6 + x^4/24$; (25c) $e + e(x - 1) + e/2(x - 1)^2 + e/6(x - 1)^3 + e/24(x - 1)^4$; (25d) $1/2 - \sqrt{3}(x - \pi/6) - (x - \pi/6)^2 + 2\sqrt{3}/3(x - \pi/6)^3$;

(26a) 0; (26b) $1/2$; (26c) $-1/3$; (26d) $2/9$; (26e) $+\infty$; (26f) $1/5$; (26g) $1/12$; (27a) $-2x\,e^{-x^2}$; (27b) $-(2/x^3)\,e^{1/x^2}$; (27c) $1/2\,(e^x + e^{-x})$; (27d) $2/x^3\,(x^2 - 1)e^{x^2}$ (27e) $2(e^x - 1)(e^x + e - x)$; (27f) $4/x$; (27g) $\frac{4}{x\,ln(10)}$; (27h) $2x(\frac{1}{x^2+1} - \frac{e^{x^2+1}(x^2 ln(x^2)+1)}{x^2})$; (27i) $7\,3^{7x}\,ln(3)$; (27j) $\frac{(ln(3)\,3^x+ln(7)\,7^x)(e^x+2)-(3^x+7^x)e^x}{(e^x+2)^2}$; (28a) 1; (28b) 2;

(28c) $+\infty$; (28d) $+\infty$; (28e) $+\infty$; (28f) 0; (28g) $+\infty$; (28h) 0; (29a) $n = 4$, $a = 0$, 0.9508; (29b) $n = 9$, $a = 0$, $2,71828$; (29c) $n = 5$, $a = e$, $0,691$; (29d) $n = 4$, $a = 0$, $11/24$; (30a) -1; (30b) 0; (30c) $-e$; (30d) -2.

(31) 3 e $166/27$; (32a) 145 m, (32b) 172 m; (33a) $7/3$, (33b) $2/5$; (34a) 30, (34b) $119/6$, (34c) 0, (34d) $268/3$, (34e) $3/7(2^{7/3} - 1)$, (34f) $(12/5)\pi(2^{5/3} - 1)$, (34g) $2/5$, (34h) 2, (34i) $11/1800$, (34j) $(3/2)\pi + (7/24)\pi^3$, (34k) $29/6$,

(34l) 319/24, (34m) 91/24, (34n) $-7/12$, (34o) $19/3+(32/3)\sqrt{2}$, (34p) 260/3; (35a) 2627/15, (35b) 203/240, (35c) 67/10;

(36a) $2/9\ (2x^3+5)^{9/2}$, (36b) $1/27\ (2x^3+5)^{9/2}$, (36c) $1/7\ (x-5)^7$, (36d) $2/3\sqrt{3x+4}$, (36e) $1/12\ (x-3)^3$, (36f) $(x^2+2s-1)^2/2+x^3+3(2s-1)x$, (36g) $(x+1)^4/4-3(x+1)^2$, (36h) $2/5\ (2+x^{5/3})^{3/2}$, (36i) $-\frac{(1-xv^{-1})^{3/2}}{x}-v^{-1}\sqrt{1-xv^{-1}}-\frac{v^{-1}}{2}ln\frac{|\sqrt{1-xv^{-1}}-1|}{\sqrt{1-xv^{-1}}+1}$, (36j) $2/3\ x^3-1/2\ x^2$, (36k) $(1/5)x^2(1+x^2)^{5/2}-2/35\ (1+x^2)^{7/2}$, (36l) $2/3\ x(1+x)^{3/2}-4/15\ (1+x)^{5/2}$; (37) $-193/48$; (38a) 7, (38b) 9, (38c) -8, (38d) -40; (39) 1/512; (40a) $3(t^4+t^3+1)^{-1}$, (40b) $-t^2(1+t)^5$, (40c) $-t^4/(t^2+1)^3$;

(41a) $1/2\ arctg(2x-1)$, (41b) $arctg(x+1)$, (41c) $1/2\ arctg(sen^2(\theta))$, (41d) $\sqrt{16x^2-1}-arctg(\sqrt{16x^2-1})$, (41e) $2\ arctg(\sqrt{x-1})$, (41f) $1/2\ arctg(tg^2(x))$, (41g) $x^3/3+e^x$, (41h) $sen(x)+1/4\ e^{4x}$, (41i) $1/4\ e^{4x}-ln(x)$, (41j) $x^2/2+ln(x)$, (41k) $x+ln(x-1)$, (41l) $ln(y+1)$ (41m) $-e^{-x}$, (41n) $3^x/ln3$, (41o) $x^3/3+x^2/2+x+ln(x)-1/x$; (42a) $-1/5\,(2x+3)\,cos(5x)+3/25\ sen(5x)+C$, (42b) $-(1-x)^{21}(x^4/21+2x^3/231\ (1-x)+2x^2/1771\ (1-x)^2+x/10626\ (1-x)^3+1/265650\ (1-x)^4+C$ (42c) $1/3\ (1+x^2)^{3/2}+C$, (42d) $cos(1/2)-cos(1)$, (42e) $-3^{10}/20$, (42f) $-2\ \sqrt{x-1}\,cos(\sqrt{x-1})+2\ sen(\sqrt{x-1})+C$, (42g) $1/4\ sen^2(x^2)+C$, (42h) $-2/9\ (1+3cos^2(\phi))^{3/2}+16/9$, (42i) $ln((x-2)(x+5))+C$, (42j) $ln(\frac{(x+2)^2}{(x+1)^{1/2}(x+3)^{3/2}})+C$, (42k) $(x-1)^2/2-x+ln(\frac{x^4+2x^3}{x-1})+C$, (42l) $ln(x+1)+\frac{3}{2x+1}-\frac{3}{(2x+1)^2}+C$, (42m) $ln(\frac{x^2}{x+1})+C$, (42n) $ln(x-2)-\frac{4}{x-2}+C$, (42o) $1/3\ ln(\frac{(x-1)^2}{x^2+x+1})+C$, (42p) $(\sqrt{2}/8)\ ln(\frac{x^2+\sqrt{2}x+1}{x^2-\sqrt{2}x+1})+(\sqrt{2}/4)[arctg(\sqrt{2}\ x-1)+arctg(\sqrt{2}\ x+1)+C$; (44) $2\,m^2$; (45) $20\,l$;

(46) (Partindo do princípio de que as placas podem ser partidas de modo a optimizar a sua utilização) 20 000\$00; (47) $36\,cm^3$; (48) -4.000; (49a) $12,5\,seg$, (49b) $22\,cm$, (49c) $17,5\,seg$; (50) $2\pi^{1/2}\alpha^{-3/2}$;

(51i - a) $406.5\leq\int_5^7(x^3+x+2)\,dx\leq 516.5$, (51i - b) 461.5, (51i - c) 460.0, (51ii - a) $0.561314\leq\int_5^{10}\frac{1}{x+1}\,dx\leq 0.656011$, (51ii - b) 0.608663, (51ii - c) 0.606188, (51iii - a) $48.8895\leq\int_1^{10}(\sqrt{x}+3)\,dx\leq 54.2952$, (51iii - b) 51.5924, (51iii - c) 51.5945, (51iv - a) $2.03874\leq\int_5^7\frac{x^2+2x+2}{x^2+2x+1}\,dx=\int_5^7(1+\frac{1}{(x+1)^2})\,dx\leq 2.04482$, (51iv - b) 2.04178, (51iv - c) 2.04167; (52) 127.6; (53a) -1, (53b) $+\infty$, (53c) $+\infty$, (53d) $+\infty$, (53e) $+\infty$, (53f) 2, (53g) o integral é divergente, (53h) $-\infty$, (53i) $+\infty$, (53j) 1, (53k) $+\infty$, (53l) $+\infty$, (53m) $+\infty$, (53n) o integral é divergente, (53o) $+\infty$; (54) 6π; (55) 48;

(56) $(4/3)\pi r^3$; (57) (não é um sólido de revolução) 80π; (58) (não é um sólido de revolução) 40π; (59) $3\pi/10$; (60) $\frac{2^{14}\times\pi}{3\times5\times7}$;

(61a) 3 e 6, (61b) $(1-xy)\,e^{-xy}$ e $-x^2e^{-xy}+3$, (61c) $\frac{-x^2+y^2-2xy+1}{(x^2+y^2+1)^2}$ e $\frac{x^2-y^2-2xy+1}{(x^2+y^2+1)^2}$, (61d) $\frac{1}{3}$ e 0, (61e) $2xz^3+y$, x e $3x^2z^2-sec^2(z)$, (61f) $\sqrt{3}$, $-\sqrt{3}$ e $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, (61g) 1, $2ln2$ e $2ln2$, (61h) $2y^3$, $6x^2y-126xy^5$, $6xy^2-21y^6$ e $6xy^2-21y^6$, (61i)-2 e $-\pi$, (61j) 2, 4, 0 e 0, (61k) $2y^3z^4$, $6x^2yz^4$, $6xyz^4$ e $6xyz^4$. (61l) $-48xy$ e $6y^2-24x^2$, (61m) $2y^3\,(2+xy^2)\,e^{xy^2}$, (61n) $48x^3y^3z^2$ e $24x^3y^4z$, (61o) $(2x^2z+x^3yz^2)\,e^{xyz}$, (61p) 0; (61q) $\frac{\partial f}{\partial x}=f$ e $\frac{\partial f}{\partial y}=2f$, (61r) $\sqrt{2}$; (62) $\frac{\partial g}{\partial u}=2u$ e $\frac{\partial g}{\partial v}=0$; (63a) -1 e $-3/2$, (63b) 0 e -1; (64a) f atinge um mínimo local em $(0,0)$ e os pontos $(2\sqrt{2},4)$ e $(-2\sqrt{2},4)$ são pontos sela, (64b) f atinge um mínimo local em $(0,0)$ e os pontos $(-\sqrt{2},-1)$ e $(\sqrt{2},-1)$ são pontos sela, (64c) f atinge um mínimo local nos pontos $(0,\pi/2+(2k+1)\pi)$ e os pontos $(0,\pi/2+2k\pi)$ são pontos sela, para k inteiro, (64d)f atinge um mínimo local em $(0,0)$ e o ponto $(2,0)$ é um ponto sela; (65) os números inteiros devem ser todos iguais a 100;

(66) a caixa deve ter a forma de um cubo de aresta $1m$; (67) $5\sqrt{3}/6$; (68a) 19, (68b) 220/3, (68c) $1/2\,(e^4-e-1+e^{-3})$, (68d) $\pi-2$, (68e) 1/12, (68f) $(3\sqrt{2}\pi-11)/4$, (68g) 2, (68h) $(1-cos(1))/2$, (68i) $e^3-e^2/2-e+1/e-1/2$, (68j) 99/40, (68k) 41/15, (68l) 81/8. (69) a) e b) divergem; c) e d) convergem. (70) a) diverge; b), c) e d) convergem.

(71) c) diverge; a), b) e d) convergem. (72) b) e d) divergem; a) e c) convergem. (73a) 1, (73b) 1, (73c) $+\infty$, (73d) 4, (73e) 3, (73f) $+\infty$. (74a) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n}(x-1)^n$, (74b) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n(2n)!}{4^n(n!)^2}(x-1)^n$, (74c) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-2)^n}{n!\ e^2}(x-1)^n$, (74d) $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{(n-1)n/2}}{n!\ \sqrt{2}}(x-\frac{\pi}{4})^n$.

(76a) $F(x)=\pi-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}sen(nx)$. (76b) $F(x)=\frac{\pi}{2}+\frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)^2}cos((2n-1)x)$. (77) $F(x)=e-1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2(e-1)}{1+4\pi^2n^2}cos(2\pi nx)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi n(1-e)}{1+4\pi^2n^2}sen(2\pi nx)$.