

7ª Aula (28/04/2004) - Carlos Hurdenero

O objetivo das próximas duas aulas é motivar ~~um~~ o aparecimento de uma teoria "quântica" de campo que descreve o modelo de Ising perto do ponto crítico, discutir algumas quantidades físicas que essa teoria de campo pode ser usada para calcular - expoentes críticos - e discutir os vários tipos de funções de correlação e funções geradoras que existem - em geral - numa teoria de campo.

Começamos este curso introduzindo um modelo na rede, o modelo de Ising:

$$\phi : \Lambda = \mathbb{Z}^d \longrightarrow T = \{-1, 1\}$$

cujo Hamiltoniano é

$$H(\phi) = -J \sum_{\langle i, j \rangle} \phi_i \phi_j - \sum_i B_i \phi_i$$

sendo a função de partição

$$Z_N(\beta) = \sum_{\phi \in \Omega} e^{-\beta H(\phi)}$$

Os objetos de primordial importância na teoria são as funções de correlação. Por exemplo a função de correlação entre 2 pontos é:

$$\langle \phi_x \phi_y \rangle = \frac{\sum_{\phi \in \Omega} \phi_x \phi_y e^{-\beta H(\phi)}}{Z_N(\beta)}$$

Estas funções de correlação, ou correladores, podem todas ser calculadas como derivadas da função de partição. Por essa razão, a função de partição é denominada função geradora. Por exemplo

$$\langle \phi_r \phi_s \rangle = \frac{1}{Z_N \beta^2} \frac{\partial^2}{\partial B_r \partial B_s} Z_N$$

Mas a quantidade que corresponde à covariância em teoria de probabilidades é a função de 2-pontos conexa

$$G(r, s) = \langle \phi_r \phi_s \rangle - \langle \phi_r \rangle \langle \phi_s \rangle$$

Note-se que  $G(r, s) = \langle \phi_r \phi_s \rangle$  em modelos em que a magnetização em cada ponto seja zero:  $M_r = \langle \phi_r \rangle = 0$

Um cálculo simples revela que

$$\begin{aligned} G(r, s) &= \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{Z_N} \frac{\partial^2}{\partial B_r \partial B_s} Z_N - \frac{1}{\beta^2} \frac{1}{Z_N^2} \frac{\partial Z_N}{\partial B_r} \frac{\partial Z_N}{\partial B_s} \\ &= \frac{1}{\beta^2} \frac{\partial^2}{\partial B_r \partial B_s} \ln Z_N = - \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2}{\partial B_r \partial B_s} F_N(\beta) \end{aligned}$$

onde  $Z_N(\beta) = e^{-\beta F_N(\beta)}$ ,  $F_N(\beta) =$  energia livre de Helmholtz

Este padrão repete-se; em geral

$$G(s_1, \dots, s_m) = - \frac{1}{\beta^m} \frac{\partial^m}{\partial B_{s_1} \dots \partial B_{s_m}} F_N(\beta)$$

pois que a energia livre de Helmholtz se denomina função geradora de correladores conexos.

Exemplo:

$$\begin{aligned} G(s_1, s_2, s_3) &\equiv + \frac{1}{\beta^3} \frac{\partial^3}{\partial B_{s_1} \partial B_{s_2} \partial B_{s_3}} \ln Z_N(\beta) \\ &= \frac{1}{\beta^3} \left\{ \frac{1}{Z_N} \frac{\partial^3 Z_N}{\partial B_{s_1} \partial B_{s_2} \partial B_{s_3}} - \frac{1}{Z_N^2} \left[ \frac{\partial Z_N}{\partial B_{s_1}} \frac{\partial^2 Z_N}{\partial B_{s_2} \partial B_{s_3}} + \frac{\partial Z_N}{\partial B_{s_2}} \frac{\partial^2 Z_N}{\partial B_{s_1} \partial B_{s_3}} + \frac{\partial Z_N}{\partial B_{s_3}} \frac{\partial^2 Z_N}{\partial B_{s_1} \partial B_{s_2}} \right] \right\} \end{aligned}$$

$$+ \frac{2}{Z_N^3} \frac{\partial Z_N}{\partial B_{s_1}} \frac{\partial Z_N}{\partial B_{s_2}} \frac{\partial Z_N}{\partial B_{s_3}} \left\{$$

Logo

$$G(s_1, s_2, s_3) = \langle \phi_{s_1} \phi_{s_2} \phi_{s_3} \rangle - \langle \phi_{s_1} \rangle \langle \phi_{s_2} \phi_{s_3} \rangle - \langle \phi_{s_2} \rangle \langle \phi_{s_1} \phi_{s_3} \rangle - \langle \phi_{s_3} \rangle \langle \phi_{s_1} \phi_{s_2} \rangle + 2 \langle \phi_{s_1} \rangle \langle \phi_{s_2} \rangle \langle \phi_{s_3} \rangle$$

e recordando que  $\langle \phi_{s_i} \phi_{s_j} \rangle = \langle \phi_{s_i} \rangle \langle \phi_{s_j} \rangle = G(s_i, s_j)$

e ~~recordando~~ usando que  $\langle \phi_{s_i} \rangle = G(s_i)$

(Nota: isto é verdade pq não há diagramas vazio-vazio)

obtemos:

$$\langle \phi_{s_1} \phi_{s_2} \phi_{s_3} \rangle = G(s_1, s_2, s_3) + G(s_1) G(s_2, s_3) + G(s_2) G(s_3, s_1) + G(s_3) G(s_1, s_2) + G(s_1) G(s_2) G(s_3)$$

ou seja, a função de correlação de 3-pontos é a soma de todos os produtos de funções conexas envolvendo esses 3-pontos. Este padrão repete-se em geral.

→ Note-se que mesmo não havendo campo  $B$  aplicado no problema, pode-se sempre introduzir um campo  $B$  fictício que se coloca a zero no fim. Exemplo

$$G(s_i, s_j) \Big|_{B=0} = - \frac{1}{\beta} \frac{\partial^2 F_N}{\partial B_{s_i} \partial B_{s_j}} \Big|_{B=0}$$

→ Significado físico da função de correlação conexa de 2 pontos:  $G(s_i, s_j)$  representa a resposta da Magnetização  $M_{s_i} = \langle \phi_{s_i} \rangle$  à variação do campo  $B$  no sítio  $s_j$ ; de facto

$$\frac{\partial \langle \phi_{s_i} \rangle}{\partial B_{s_j}} = \frac{\partial}{\partial B_{s_j}} \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial B_{s_i}} \ln Z_N = \frac{1}{\beta} \left( \frac{1}{Z_N} \frac{\partial^2 Z_N}{\partial B_{s_i} \partial B_{s_j}} - \frac{1}{Z_N^2} \frac{\partial Z_N}{\partial B_{s_i}} \frac{\partial Z_N}{\partial B_{s_j}} \right)$$

$$= \beta \left( \langle \phi_{s_i} \phi_{s_j} \rangle - \langle \phi_{s_i} \rangle \langle \phi_{s_j} \rangle \right) = \beta G(s_i, s_j)$$

o que demonstra a interpretação enunciada em cima. Naturalmente, a susceptibilidade magnética,  $\chi$ , vai estar pois relacionada com o correlador conexo de 2-pontos de facto introduzindo

$\chi = \frac{\partial M}{\partial B}$  onde  $M = \sum_i \langle \phi_i \rangle$  (magnetização total) num campo homogêneo  $B_i = B \forall_i$

$$\chi = \sum_{i,j} \frac{\partial \langle \phi_i \rangle}{\partial B_j} \frac{\partial B_j}{\partial B} = \beta \sum_{i,j} G(i,j)$$

que é o teorema de "resposta a flutuações", pois relaciona a resposta a um campo externo - susceptibilidade - com a função de correlação  $G(s_i, s_j)$  que mede as flutuações de spin.

### Grandezas Termodinâmicas e transformadas de Legendre:

Num sistema termodinâmico existe ~~uma~~ uma função denominada energia interna

$$U = U(S, V)$$

↑ entropia  
↓ volume

Tomando o diferencial

$$dU = \underbrace{\left( \frac{\partial U}{\partial S} \right)_V}_{T} ds + \underbrace{\left( \frac{\partial U}{\partial V} \right)_S}_{-p} dV = \underbrace{T ds}_{\text{Calor}} - \underbrace{p dV}_{\text{Trabalho}} - M dB$$

→ Esta é a primeira lei da termodinâmica e exprime conservação de energia.

→ Note-se que

$$d^2U = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial T}{\partial V}\right)_S = - \left(\frac{\partial p}{\partial S}\right)_V$$

uma das relações de Maxwell termodinâmicas

→ Os pares de variáveis

Podia ser  $(p, V)$   $(T, S)$   
 $(M, B)$   $M = \text{magnetização total}$

dizem-se conjugadas

→ Podemos introduzir 4 funções de energia distintas:

$$U = U(S, V)$$

energia interna

$$F = F(T, V)$$

energia livre de Helmholtz

$$G = G(T, p)$$

energia livre de Gibbs

$$H = H(S, p)$$

Entalpia

A passagem de qq uma destas funções para uma outra é feita por uma transformada de Legendre. Por exemplo:

$$U(S, V) \longrightarrow F(T, V)$$

notamos que

$$Tds = d(TS) - SdT$$

Logo

$$d(U - TS) = -SdT - pdV \quad \Leftrightarrow \quad dF = -SdT - pdV$$
  
$$\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V = -S \quad \left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T = -p$$

$$d^2F = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{\partial S}{\partial V}\right)_T = \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_V$$

outra relação de Maxwell

Logo

$$F(T, V) = U(S, V) - TS \quad \left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$$

Transformada de Legendre

Para passarmos  $F(T, V) \rightarrow G(T, p)$   
 notamos que  $p dV = d(pV) - V dp$

$$d(\underbrace{F + pV}_G) = -S dT + V dp$$

Logo

$$G(T, p) = F(T, V) + pV$$

$$\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)_T$$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial V}\right)_T$$

$d^2 G = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\partial S}{\partial p}\right)_T = -\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_p \Leftrightarrow$  relação de Maxwell  
 O mesmo pode ser feito para a entalpia.

No mesmo caso

$$F = F(T, B)$$

$$G \equiv \Gamma = \Gamma(T, M)$$

$$dF = -S dT - M dB$$

$$d\Gamma = B dM - S dT$$

Notemos que:

$$M = -\left(\frac{\partial F}{\partial B}\right)_T$$

$$\Gamma(M, T) = F(T, B) + MB$$

$$B = \left(\frac{\partial \Gamma}{\partial M}\right)_T$$

A temperatura constante e considerando a magnetização nos vários sítios  $i$ :

$$d\Gamma = \sum_i B_i dM_i \Rightarrow \frac{\partial \Gamma}{\partial M_i} = B_i \Rightarrow \frac{\partial B_i}{\partial M_j} = \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_i \partial M_j}$$

Mas já vimos isto que  $\frac{\partial M_i}{\partial B_j} = \beta G(i, j)$

Logo

$$\Gamma_{ij}^{(2)} \equiv \frac{\partial^2 \Gamma}{\partial M_i \partial M_j} = \frac{1}{\beta} G_{ij}^{-1}$$

A importância de calcular o correlador de 2 pontos inverso reside no estudo da renormalização. Antecipando os resultados da teoria de  $\phi^4$  consideramos o propagador (correlador conexo de 2 pontos). Como vimos na última aula

$$G_{ij} \equiv G^{(2)} = \overset{G_0^{(2)}}{\text{---}} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \mathcal{O}(\lambda^3)$$

Consideremos também os diagramas:

$$\Sigma = \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---} + \text{---} \circ \text{---}$$

parametrizam-se pernas exteriores

Estes diagramas denominam-se irreduzíveis de uma partícula: são irreduzíveis pelo corte de uma única linha. Claramente

$$G^{(2)} = G_0^{(2)} + G_0^{(2)} \Sigma G_0^{(2)} + G_0^{(2)} \Sigma G_0^{(2)} \Sigma G_0^{(2)} + \dots$$

$$= \frac{G_0^{(2)}}{1 - \Sigma G_0^{(2)}} = \frac{1}{(G_0^{(2)})^{-1} - \Sigma}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{[G^{(2)}]^{-1} = [G_0^{(2)}]^{-1} - \Sigma}$$

que é o conjunto dos diagramas irreduzíveis (a menos do propagador simples = não renormalizado = despido) Sistematizando as funções geradoras:

- Função de partição,  $Z$ , gerador de todos os correladores
- Função de partição normalizada, todos menos diagramas vazio, vazio
- Energia livre de Helmholtz,  $F$ , gerador de correladores conexos
- Energia livre de Gibbs,  $\Gamma$ , gerador de correladores irreduzíveis de uma partícula

8ª Aula (5/05/2004) - Carlos Herdeiro

Exponentes críticos: Consideremos a equação de campo médio.

$$\text{arctanh } M = \frac{T_c}{T} M + \frac{B}{k_B T}$$

Para  $T \approx T_c \equiv qJ/k_B$  e  $B$  pequeno, a solução será  $M \ll 1$ , pelo que expandimos

$$\text{arctanh } M = M + \frac{M^3}{3} + \mathcal{O}(M^5)$$

Considerando  $B=0$  temos

$$M + \frac{M^3}{3} = \frac{M}{1 + T/T_c - 1} \Leftrightarrow M = (1+t) \left( M + \frac{M^3}{3} \right)$$

onde definimos a temperatura reduzida pois  $T \approx T_c$ . Logo

$$t \equiv \frac{T}{T_c} - 1 \ll 1$$

$$M^2 = 3 \left( \frac{1}{1+t} - 1 \right) = - \frac{3t}{1+t}$$

para  $t$  pequeno  $\Rightarrow$

$$M \sim (T_c - T)^{1/2}$$

Esta previsão da aproximação de campo médio de uma lei de potências perto do ponto crítico é observada experimentalmente para a magnetização e também para outros parâmetros físicos, o que define os exponentes críticos:

→ Calor específico:  $(C = \left. \frac{dE}{dT} \right|_{B=0}, E = \langle H \rangle)$

$$C \sim |T - T_c|^{-\alpha}$$



→ Magnetização:  $M \sim (T_c - T)^\beta$  ( $T < T_c$ )

→ Suscetibilidade magnética:  $\chi = \left. \frac{\partial M}{\partial B} \right|_{B=0}$  (magnetização total)

$\chi \sim |T - T_c|^{-\gamma}$

→ Comprimento de correlação:

$\xi = \frac{1}{|T - T_c|^\nu}$

→ Função de correlação

$\langle \phi_i \phi_j \rangle \sim \frac{const}{|r_i - r_j|^{d-2+\eta}}$

d = n° de dimensões espaciais

(Nota: não há termo de Yukawa, e  $\eta =$  renormalização do propagador)

Alguns valores:

→  $\bar{m}$  depende de dimensão

	Campo Médio	D=2 (Omagar)	D=3 (Nímerca)
$\beta$	0.5	0.125	$0.312 \pm 0.003$
$\gamma$	1	1.75	$1.238 \pm 0.002$
$\nu$	1/2	1	$0.6305 \pm 0.0015$
$\eta$	0	1/4	$0.0375 \pm 0.0025$

↳ Landau  
↳ "Valores críticos"

São estes expoentes críticos que podem ser calculados usando uma teoria de campo que descreve o modelo de Ising perto do ponto crítico, que agora motivamos.

Os valores dos parâmetros críticos são dados corretamente para  $D > 4$  em campo médio, ou na aproximação de Landau.

O Hamiltoniano de Landau-Ginzburg:

A aproximação de campo médio introduzida anteriormente, tem a virtude da simplicidade, mas o defeito de negligenciar as flutuações. Vamos introduzir agora um modelo que:

- É consistente com a aproximação de campo médio (aproximação de Landau)
- Permite ainda calcular o efeito de flutuações (nas correções à aproximação de Landau → Ginzburg-Landau)
- Pertence à mesma classe de universalidade do modelo de Ising pelo que o descreve perto de  $T = T_c$



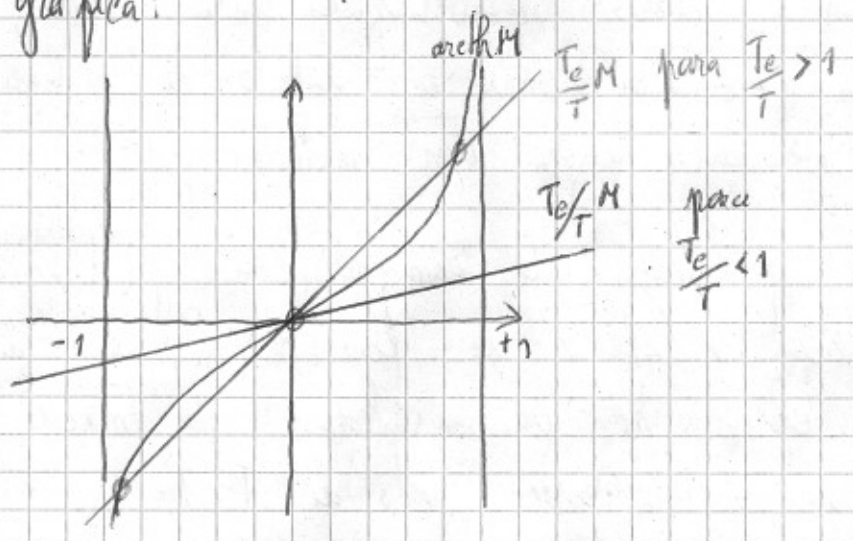
Vamos introduzir o modelo de Landau-Ginzburg de um modo heurístico, tentando adivinhar as suas propriedades e requerendo consistência com campo médio.

→ Apenas um ~~spin~~ <sup>site</sup> na rede:

Tal como na aproximação de campo médio começamos por pensar apenas no spin que está sujeito à influência da média de todos os outros. A aproximação de campo médio diz-nos que a sua magnetização obedece a

$$\frac{\mu B}{k_B T} = M \left( \frac{T - T_c}{T} \right) + \frac{M^3}{3} \quad \xleftarrow{\text{aproximação de}} \quad \boxed{\text{arctanh } M = \frac{T_c}{T} M + B}$$

Para  $B=0$  representação gráfica:

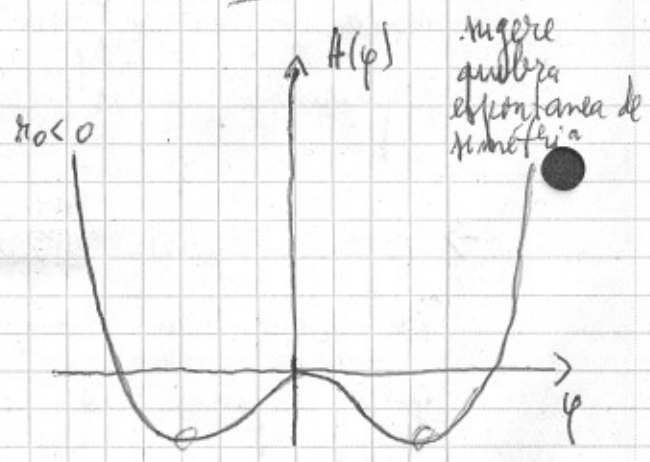
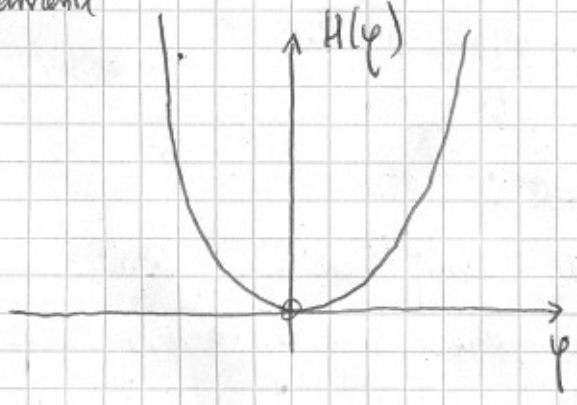


Tentamos reproduzir estas soluções por intermédio de um Hamiltoniano  $H(\varphi)$  para uma variável aleatória  $\varphi$  com

$$\langle \varphi \rangle = M$$

Tentamos  $H(\varphi) = \frac{\kappa_0}{2!} \varphi^2 + \frac{\mu_0}{4!} \varphi^4$ ,  $\mu_0 > 0$

Graficamente  $\kappa_0 > 0$



Extremos  $\varphi = 0$

$\varphi = 0$ ;  $\varphi^2 = -\frac{6\kappa_0}{\mu_0}$

Note-se que ao escolhermos um polinómio com potências par temos a simetria  $H(\varphi) = H(-\varphi)$ , que é análoga à invariância do modelo de Ising pela transformação  $S_i \rightarrow -S_i$ , na ausência de um campo externo.

Por analogia com o modelo de Ising introduzimos um acoplamento externo:

$$H_1(\varphi) = H(\varphi) - B\varphi$$

e escreveremos a função de partição da forma:

$$Z = \int d\varphi e^{-H(\varphi) + B\varphi}$$

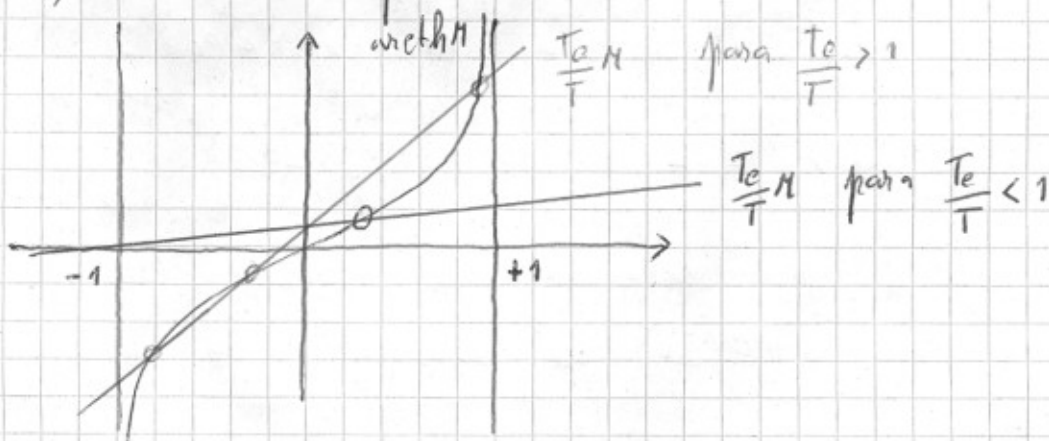
onde  $\beta = \frac{1}{k_B T_e}$  foi

absorvido nos outros coeficientes,  $\mu_0, \mu_1, B$

Notemos que :  $\left\{ \begin{array}{l} \mu_0 > 0 \text{ é necessário para a convergência do} \\ \text{integral} \\ \mu_0 \text{ pode ter sinal arbitrário} \end{array} \right.$

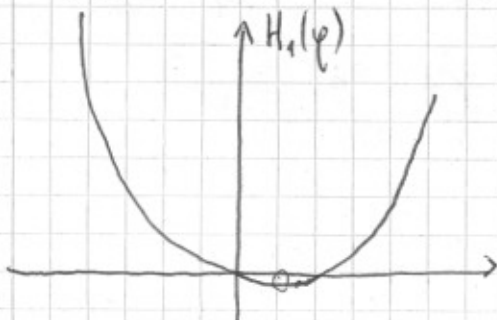
Gráficamente: Consideramos  $B > 0$

→ Na aproximação de campo médio

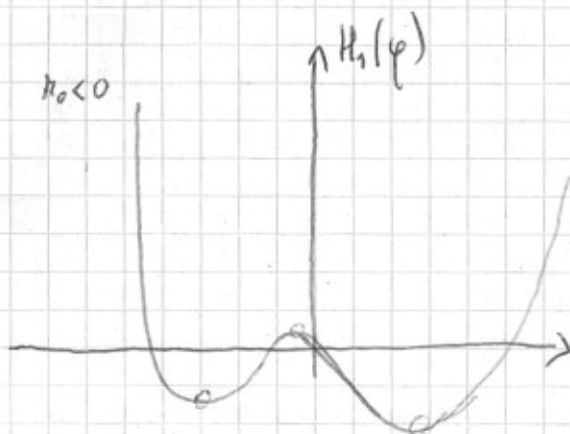


$$\rightarrow H_1(\varphi) = -B\varphi + \frac{\mu_0}{2!} \varphi^2 + \frac{\mu_4}{4!} \varphi^4$$

$\mu_0 > 0$



$\mu_0 < 0$



Os extremos de  $H_1(\varphi)$  obedecem a

$$\left. \frac{dH}{d\varphi} \right|_{\varphi_0} = B \Leftrightarrow \kappa_0 \varphi + \frac{\mu_0}{3!} \varphi^3 = B \quad \text{e existe um } \underline{\text{m\u00ednimo absoluto}} \text{ em } \varphi = \varphi_0 \neq 0 \quad (\text{para } B \neq 0)$$

Logo a exponencial  $e^{-H_1(\varphi)}$  tem um m\u00e1ximo absoluto em  $\varphi = \varphi_0$ .  
 \(\rightarrow\) equivalente \u00e0 aproxima\u00e7\u00e3o cl\u00e1ssica em QFT

Introduzimos agora a aproxima\u00e7\u00e3o de Landau, que consiste em aproximar o valor da fun\u00e7\u00e3o de partiu\u00e7\u00e3o pelo seu valor quando o integrando \u00e9 m\u00e1ximo (em  $\varphi = \varphi_0$ )

$$Z \approx e^{-H_1(\varphi_0)} = e^{-H(\varphi_0) + B\varphi_0}$$

\(\left\{ \begin{array}{l} \text{aproxima\u00e7\u00e3o m\u00e1s se} \\ B \text{ pequeno e } \mu\_0 < 0 \\ \rightarrow \text{outro m\u00ednimo \u00e9 quase} \\ \text{igual} \end{array} \right.\)

A energia livre de Helmholtz

$$F = -\ln Z = H(\varphi_0) - B\varphi_0$$

Obtemos pois para a magnetiza\u00e7\u00e3o:

$$M = \langle \varphi \rangle = - \frac{\partial F}{\partial B} = \left( \frac{dH}{d\varphi} \right)_{\varphi_0} \frac{d\varphi_0}{dB} + \varphi_0 + \frac{\partial \varphi_0}{\partial B} B = \varphi_0$$

Assim, a magnetiza\u00e7\u00e3o no modelo com Hamiltoniano  $H_1(\varphi)$  e na aproxima\u00e7\u00e3o de Landau \u00e9 a solu\u00e7\u00e3o de uma equa\u00e7\u00e3o c\u00fabica

$$\boxed{\kappa_0 \varphi_0 + \frac{\mu_0}{3!} \varphi_0^3 = B}$$

tal como a magnetiza\u00e7\u00e3o na aproxima\u00e7\u00e3o de campo m\u00e9dio e perto da temperatura cr\u00edtica

$$\boxed{\left(1 - \frac{T_c}{T}\right) M + \frac{M^3}{3} = B}$$

Mais ainda, na aproxima\u00e7\u00e3o de Landau estamos a tomar

$\varphi = \varphi_0 = \langle \varphi \rangle$  e como tal a negligenciar as flutuações, tal como em campo médio.

Note-se ainda que se calcularmos o campo magnético externo introduzindo a energia livre de Gibbs:

$$\Gamma = F + MB = H(\varphi_0) - B\varphi_0 + B\varphi_0 = \cancel{H(\varphi_0)} H(M)$$

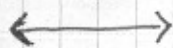
$$\Rightarrow \boxed{\Gamma(M) = \frac{\kappa_0}{2!} M^2 + \frac{\mu_0}{4!} M^4 = H(M)}$$

$\hookrightarrow B = \frac{\partial \Gamma}{\partial M} = \kappa_0 M + \frac{\mu_0}{3!} M^3$ , mais uma vez consistente com campo médio se

$$\boxed{\kappa_0 = \bar{\kappa}_0 (T - T_c)}$$

Na aproximação de Landau

Aproximação de Landau do modelo  $H_1(\varphi)$



Aproximação de campo médio perto de  $T_c$

→ Generalização para  $N$  sítios na rede:

A generalização para  $N$  sítios é não trivial pela possibilidade de introduzir interações entre os diferentes sítios. Em cada sítio  $i$ , consideramos uma variável aleatória

$$-\infty < \varphi_i < +\infty$$

Consideraremos em geral condições fronteira periódicas, por exemplo, em  $D=1$  espaçamento

$$\varphi_{\mathbb{Z}}(x_i + aN) = \varphi_{\mathbb{Z}}(x_i)$$

Por analogia com o modelo de Ising, introduzimos interações entre vizinhos próximos: ~~do seguinte modo~~

$\psi(\vec{x}_i)$  e  $\psi(\vec{x}_i + \vec{\mu})$

onde  $\vec{\mu} = \langle \vec{l}_1, \vec{l}_2, \dots, \vec{l}_s \rangle$



componentes  $\underline{a}$

liga  $\vec{x}_i$  a metade dos seus vizinhos próximos

Usamos o gradiente discreto definido nas aulas de Peter:

$$\partial_{\mu} \psi(\vec{x}_i) = \frac{1}{a} \left[ \psi(\vec{x}_i + \vec{\mu}) - \psi(\vec{x}_i) \right]$$

e introduzimos as interações entre vizinhos por intermédio deste gradiente:

$$\sum_{i, \mu} \frac{1}{a^2} \left[ \psi(\vec{x}_i + \vec{\mu}) - \psi(\vec{x}_i) \right]^2 \equiv \sum_i \left( \nabla \psi(\vec{x}_i) \right)^2$$

Postulamos o Hamiltoniano de Landau - Ginzburg da seguinte forma:

função de N variáveis ou funcional discreto

$$H_{GL}[\psi_i] = a^D \sum_{i=1}^N \left[ \frac{1}{2} (\nabla \psi_i)^2 + \frac{1}{2} r_0(T) \psi_i^2 + \frac{1}{4!} u_0 \psi_i^4 \right]$$

descreve sistema físico apenas perto de  $T = T_c$

útil na passagem ao contínuo (ver integração na rede, definida pelo Peter)

Aparentemente o termo de interação entre vizinhos próximos que introduzimos:

$$\sum_i \left( \nabla \psi(\vec{x}_i) \right)^2 = \frac{1}{a^2} \sum_{i, \mu} \left( \psi(\vec{x}_i + \vec{\mu})^2 + \psi(\vec{x}_i)^2 - 2\psi(\vec{x}_i)\psi(\vec{x}_i + \vec{\mu}) \right)$$

difere do termo de interação de Ising

$\sum_{i, \mu} \psi(\vec{x}_i)\psi(\vec{x}_i + \vec{\mu})$ ; mas note-se que os

outros  $\frac{1}{2}$  podem ser absorvidos numa redefinição de  $r_0(T)$ .

A função de partição é um integral N dimensional:

$$Z = \int \prod_{i=1}^N d\varphi_i e^{-H_{GL}[\varphi_i] + \sum_i B_i \varphi_i}$$

onde acrescentamos desde já um campo externo. O máximo do integrando é obtido para os valores

$$\{\varphi_{i0}\} = \{\varphi_{i1}, \dots, \varphi_{iN}\} \quad \text{onde estes valores obedecem a } B_i = \left. \frac{\partial H_{GL}}{\partial \varphi_i} \right|_{\varphi_{i0}}$$

A aproximação de Landau corresponde a aproximar a função de partição pelo valor do integrando no máximo:

$$Z \approx e^{-H_{GL}[\varphi_{i0}] + \sum_i B_i \varphi_{i0}} \Rightarrow F = H_{GL}[\varphi_{i0}] - \sum_i B_i \varphi_{i0}$$

obtendo para a magnetização

$$M_i = - \frac{\partial F}{\partial B_i} = - \left( \sum_j \frac{\partial H}{\partial \varphi_j} \right)_{\varphi_{i0}} \frac{\partial \varphi_{i0}}{\partial B_i} + \varphi_{i0} + \sum_j B_j \frac{\partial \varphi_{j0}}{\partial B_i} = \varphi_{i0}$$

E em analogia com o caso de 1 sítio encontramos

$$\Gamma(M_i) = H_{GL}(M_i)$$

A consideração de N sítios resolve o problema do máximo secundário que mencionamos antes. No caso de um campo B uniforme e considerando a contribuição do segundo máximo: ( $B_i \rightarrow B$  ;  $\varphi_{i0} \rightarrow \varphi_0$ )

$$Z \approx e^{-NH_1[\varphi_0]} + e^{-NH_1[\varphi_0']} = e^{-NH_1[\varphi_0]} \left( 1 + e^{-N(H_1[\varphi_0'] - H_1[\varphi_0])} \right)$$

termo do tipo  $e^{-Ne}$  exponencialmente no limite termodinâmico supresso

no limite termodinâmico



### Formulação Contínua:

- É difícil e trabalhoso usar a versão discreta do modelo de Landau-Ginzburg.
- Por outro lado, perto do ponto crítico o comprimento de correlação  $\xi \rightarrow \infty$ , pelo que as flutuações importantes devem ter comprimento de onda  $\gg a$ , pelo que uma versão contínua deve ser uma boa aproximação à teoria discreta.

↳ Perto do ponto crítico o limite contínuo é legítimo

Tomamos

$$x_i \rightarrow x$$

$$\varphi(x_i) \rightarrow \varphi(x)$$

A introdução do factor  $a^D$  na definição de  $H_{GL}[\varphi]$  permite-nos uma passagem imediata de uma soma de Riemann a integral; substituímos o gradiente discreto pelo normal e obtemos

$$H_{GL}[\varphi] = \int d^D x \left[ \frac{1}{2} (\nabla \varphi)^2 + \frac{1}{2} r_0(\tau) \varphi^2 + \frac{1}{4!} u_0 \varphi^4 \right]$$

Contudo, há uma condição reminescente da origem discreta desta teoria:

$$\boxed{\lambda \gg a} \quad (\Leftrightarrow) \quad \boxed{k \leq \frac{2\pi}{a}} \equiv \Lambda$$

As flutuações  $\bar{n}$  podem ter comprimentos de onda menores que o espaçamento mínimo

Existe um cut-off natural para os vectores de onda.

Na teoria de Landau-Ginzburg há uma discretização natural do espaço devido à sua origem discreta e como tal

um supremo natural no espaço de momentos; em contraste com QFT onde se pensa no espaço tempo como verdadeiramente contínuo.

O Hamiltoniano tornou-se um funcional:

$$H[\varphi] : \varphi \in \mathcal{E}_{\mathbb{R}^D} \longrightarrow \mathbb{R}$$

Vamos definir diferenciação e integração funcional:

Seja  $I[\varphi]$  um funcional do campo  $\varphi$  obtido no limite contínuo de uma função  $I(\varphi_i)$  de  $N$  variáveis  $\varphi_i$ .

I)  $\rightarrow$  Tomamos o espaço  $D=1$ . A derivada funcional é definida

$$\frac{\delta I}{\delta \varphi(x)} = \lim_{a \rightarrow 0} \frac{1}{a} \frac{\partial I}{\partial \varphi_i}$$

Exemplos: a)  $I = \int dy f(y) \varphi^n(y) = \lim_{a \rightarrow 0} a \sum_k f_k \varphi_k^n$

$$\frac{\partial I}{\partial \varphi_i} = a \uparrow f_i \varphi_i^{n-1} \Rightarrow \frac{\delta I}{\delta \varphi(x)} = \uparrow f(x) \varphi^{n-1}(x)$$

analogamente, b)  $I = \int dy V(\varphi(y)) \Rightarrow \frac{\delta I}{\delta \varphi(x)} = V'(\varphi(x))$

c)  $I = \int dy \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 = \lim_{a \rightarrow 0} a \sum_k \frac{1}{a^2} (\varphi_{k+1} - \varphi_k)^2$

$$\frac{\partial I}{\partial \varphi_i} = \frac{2}{a} (2\varphi_i - \varphi_{i+1} - \varphi_{i-1}) \Rightarrow \frac{\delta I}{\delta \varphi(x)} = -2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}$$

d)  $\frac{\delta \varphi(x)}{\delta \varphi(y)} = \delta(x-y)$   $\hookrightarrow$  dado que  $\frac{\partial \varphi_i}{\partial \varphi_k} = \delta_{i,k}$

II)  $\rightarrow$  Em  $D$  dimensões a generalização é simples; exemplo:  $I = \int d^D y (\nabla \varphi(\vec{y}))^2 ; \frac{\delta I}{\delta \varphi(\vec{x})} = -2 \nabla^2 \varphi(\vec{x})$

Neste último exemplo usamos condições fronteira periódicas; em geral podemos ter termos de fronteira.

Para definir um integral funcional, introduzimos a medida de integração  $D\varphi(x)$ , definida por

$$D\varphi(x) = \lim_{a \rightarrow 0} N(a) \prod_{i=1}^N d\varphi_i \quad \text{Puramente formal}$$

onde o factor  $N(a)$  é escolhido de modo a garantir que o limite exista, pelo menos em casos simples.

Como veremos, ~~os~~ os factores multiplicativos independentes de  $B$  serão irrelevantes no cálculo de funções de correlação, dado que eles cancelam na função de partição normalizada. Assim, a constante  $N(a)$  não irá ser importante e como tal não necessitamos de a definir precisamente. Neste espírito, o resultado para a função de partição é:

$$Z = \int D\varphi(x) e^{-\int d^4x \left[ \frac{1}{2} (\partial\varphi)^2 + \frac{1}{2} \mu_0 \varphi^2 + \frac{\mu_0}{4!} \varphi^4 - B\varphi \right]}$$

Para  $\mu_0 = 0$  este chama-se modelo gaussiano.