Centro de Matemática da Universidade do Porto

Centro de Física do Porto

Curso Livre sobre Teoria do Campo

Aviso... Este texto é provisório e destina-se ao uso dos participantes do Curso Livre. Não reclama qualquer tipo de originalidade e pode conter erros. Agradeço qualquer tipo de crítica ou sugestão.

Modelo de Ising

João Nuno Tavares[1]

Índice:

1 Modelo de Ising

Consideremos a rede discreta $\Lambda = \mathbf{Z}^d$ e o conjunto:

$$\Omega \stackrel{\text{def}}{=} \{\phi : \Lambda \longrightarrow \{-1, +1\}\} \tag{1.1}$$

de todas as *configurações de spin*. Ao valor $\phi(\mathbf{s}) \in \{\pm 1\}$, $\mathbf{s} \in \Lambda$, chamamos *o (valor de) spin no sítio* $\mathbf{s}$ da rede.

[1]Centro de Matemática da Universidade do Porto; jntavar@fc.up.pt; Work supported by *Fundação para a Ciência e a Tecnologia* (FCT) through the *Centro de Matemática da Universidade do Porto* (CMUP). Available as a PDF file from http://www.fc.up.pt/cmup.

Para um subconjunto $V \subset \Lambda$, representámos por $\phi_V : V \to \mathcal{S}$, a restrição de ϕ a V, e por Ω_V o conjunto de todas as configurações definidas em V. Quando V é um subconjunto finito com N elementos existem 2^N configurações possíveis em V. O Hamiltoniano é definido por:

$$\boxed{\mathcal{H}(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}\in\Lambda} \mathcal{J}(\mathbf{r},\mathbf{s})\phi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{s})} \tag{1.2}$$

onde:

$$\mathcal{J}(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \begin{cases} \mathcal{J} & \text{se } \mathbf{r} \text{ e } \mathbf{s} \text{ são sítios vizinhos, i.e., } \|\mathbf{r}-\mathbf{s}\| = 1 \\ 0 & \text{nos outros casos} \end{cases} \tag{1.3}$$

Note que a interacção entre spins vizinhos $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \Lambda$, é dada por:

$$-\mathcal{J}\phi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{s}) = \begin{cases} -\mathcal{J} & \text{se os spins estão alinhados} \\ +\mathcal{J} & \text{se são opostos} \end{cases}$$

Portanto, se $\mathcal{J} > 0$, obtemos uma energia mais baixa para configurações *magnetizadas*, i.e., com um grande número de spins alinhados. Em particular, a *energia do vácuo*, isto é, a energia mínima, é a que corresponde às configurações em que todos os spins estão alinhados - ou $\phi(\mathbf{s}) \equiv -1$ ou $\phi(\mathbf{s}) \equiv +1$, $\forall \mathbf{s} \in \Lambda$. Temos pois duas configurações possíveis (vácuo degenerado).

Quando $\mathcal{J} > 0$ o modelo diz-se *ferromagnético* e quando $\mathcal{J} < 0$ *antiferromagnético*. É claro que o modelo é invariante por translacções e admite uma simetria $G = \mathbf{Z}_2$, isto é, $\mathcal{H}$ é invariante pelo grupo com dois elementos: Id e a simetria τ definida por $(\tau\phi)(\mathbf{s}) = -\phi(\mathbf{s})$.

O modelo definido pelo Hamiltoniano:

$$\boxed{\mathcal{H}(\phi) \stackrel{\text{def}}{=} -\frac{1}{2}\sum_{\mathbf{r},\mathbf{s}\in\Lambda} \mathcal{J}(\mathbf{r},\mathbf{s})\phi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{s}) - \sum_{\mathbf{s}\in\Lambda} B(\mathbf{s})\phi(\mathbf{s})} \tag{1.4}$$

diz-se o *modelo de Ising com campo externo* $B : \Lambda \to \mathbb{R}$. Neste caso, o modelo é invariante apenas por translacções. Usualmente $B \equiv$ constante.

Por exemplo, para a rede unidimensional $\Lambda = \mathbf{Z}$, e com condições de fronteira periódicas $\phi(0) = \phi(N)$, $\forall\phi$, o que equivale a considerar uma rede circular Λ_N, com N pontos (o chamado *anel de Ising*), o Hamiltoniano é dado por:

$$\mathcal{H}(\phi) = -\mathcal{J}\sum_{s=0}^{N-1} \phi(s)\phi(s+1) - \sum_{s=0}^{N-1} B(s)\phi(s) \tag{1.5}$$

Para a rede bidimensional $\Lambda = \mathbf{Z}^2$, também com condições de fronteira periódicas:

$$\begin{array}{rcll} \phi(r,0) & = & \phi(r,m), & r = 0, 2, \cdots, n-1 \\ \phi(0,s) & = & \phi(n,s), & s = 1, 2, \cdots, m-1, \qquad \forall\phi \end{array}$$

o que equivale a considerar uma rede toroidal com $N = mn$ pontos (o chamado *Toro de Ising*), o Hamiltoniano é dado por:

$$\mathcal{H}(\phi) = -\mathcal{J}\left(\sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1} \phi(r,s)\phi(r,s+1) + \sum_{s=0}^{m-1}\sum_{r=0}^{n-1} \phi(r,s)\phi(r+1,s)\right) - \sum_{r=0}^{n-1}\sum_{s=0}^{m-1} B(r,s)\phi(r,s) \tag{1.6}$$

Consideremos agora, para cada valor de $\beta = \frac{1}{T} > 0$, onde T é a temperatura, o estado de equilíbrio definido pela medida de probabilidade de Gibbs:

$$\boxed{p_\beta(\phi) = \frac{e^{-\beta\mathcal{H}(\phi)}}{\mathcal{Z}(\beta)}} \tag{1.7}$$

onde $\mathcal{Z}(\beta)$ é a função de partição do modelo, definida por:

$$\boxed{\mathcal{Z}_N(\beta) = \mathcal{Z}_N(\beta, \mathcal{J}, B) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{\phi\in\Omega} e^{-\beta\mathcal{H}(\phi)}} \tag{1.8}$$

O sinal $-$ em (1.7), implica que os estados com energia mais baixa são mais prováveis. Um valor pequeno de β (i.e., temperatura elevada) tende a uniformizar a distribuição, tornando todas as configurações sensìvelmente equiprováveis, enquanto que um valor elevado de β (i.e., temperatura baixa) tende a acentuar as probabilidades dos estados com energia mais baixa.

O modelo de Ising diz-se *exactamente solúvel* se pudermos calcular exactamente a sua função de partição $\mathcal{Z}$. Apesar da sua aparente simplicidade, de momento apenas se sabe que o modelo unidimensional e o modelo bidimensional, na ausência do campo externo B, são exactamente solúveis! É claro que a dificuldade reside no facto de o número total de configurações, 2^N, ser muito grande quando N é grande.

A título de exemplo, analisemos o modelo de Ising unidimensional linear, também chamado *cadeia linear* de Ising, na ausência do campo B (isto é, fazendo $B = 0$), e com apenas dois spins ($N = 2$) (com condições de fronteira livres). Neste caso, há quatro configurações possíveis, que representámos por:

$$\begin{array}{ll} \phi_1 = \{\uparrow,\uparrow\} = \{+1,+1\} & \phi_2 = \{\uparrow,\downarrow\} = \{+1,-1\} \\ \phi_3 = \{\downarrow,\uparrow\} = \{-1,+1\} & \phi_4 = \{\downarrow,\downarrow\} = \{-1,-1\} \end{array}$$

cujas energias são:

$$\mathcal{H}(\phi_1) = \mathcal{H}(\phi_4) = -\mathcal{J}, \qquad \mathcal{H}(\phi_2) = \mathcal{H}(\phi_3) = +\mathcal{J}$$

A correspondente função de partição é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_2 &= e^{\beta\mathcal{J}} + e^{-\beta\mathcal{J}} + e^{-\beta\mathcal{J}} + e^{\beta\mathcal{J}} \\ &= 2e^K + 2e^{-K}, \qquad \text{onde} K = \beta\mathcal{J} \\ &= 4\cosh(K) \end{aligned} \tag{1.9}$$

Anàlogamente, para um modelo linear com três spins ($N = 3$), há $2^3 = 8$ configurações possíveis e um cálculo directo mostra que:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_3 &= 2e^{2K} + 2e^{-2K} + 4 \\ &= 2(e^K + e^{-K})^2 \;=\; 8(\cosh\beta\mathcal{J})^2 \\ &= (e^K + e^{-K})\,\mathcal{Z}_2 \;=\; (2\cosh K)\,\mathcal{Z}_2 \end{aligned} \tag{1.10}$$

Esta última relação entre $\mathcal{Z}_3$ e $\mathcal{Z}_2$, sugere a seguinte fórmula de recorrência (para o modelo de Ising linear com condições de fronteira livres):

$$\mathcal{Z}_N = (2\cosh K)\,\mathcal{Z}_{N-1} \tag{1.11}$$

que pode ser verificada com um cálculo simples. Portanto:

$$\boxed{\mathcal{Z}_N(\beta) = 2^N\,(\cosh K)^{N-1}, \qquad K = \beta\mathcal{J}} \tag{1.12}$$

2 Observáveis

A função de partição $\mathcal{Z}(\beta) = \sum_{\boldsymbol{\phi}\in\Omega} e^{-\beta\mathcal{H}(\boldsymbol{\phi})}$ tem uma importância crucial em Mecânica Estatística, já que quantidades observáveis macroscópicas estão genèricamente relacionadas com derivadas de $\mathcal{Z}$.

Mas antes de vermos isto, convem interpretarmos os modelos que temos vindo a analisar, em particular o modelo de Ising, de um outro ponto de vista. Para cada $\mathbf{s} \in \mathbf{Z}^d$, podemos definir a variável aleatória *spin em* $\mathbf{s}$, $\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{s}} : \Omega \to \mathcal{T}$, através de:

$$\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{s}}(\boldsymbol{\phi}) = \boldsymbol{\phi}(\mathbf{s}), \qquad \boldsymbol{\phi} \in \Omega \tag{2.1}$$

Desta forma o modelo é visto como um *campo estocástico* $\{\boldsymbol{\phi}_{\mathbf{s}}\}_{\mathbf{s}\in\mathbf{Z}^d}$, definido no espaço de probabilidade Ω, munido da medidade de Gibbs.

Consideremos, em particular, o modelo de Ising, com a distribuição de Gibbs, definida num volume finito $V \subset \Lambda$, usualmente um hipercubo $[0, L]^d$. Podemos então definir:

- *Energia livre* (de Boltzman) $\mathcal{F}(\beta)$:

$$\boxed{\mathcal{F}(\beta) = -\tfrac{1}{\beta}\log\mathcal{Z}(\beta)} \tag{2.2}$$

- *Energia livre por spin, no limite termodinâmico*, $\mathfrak{f}_\infty$:

$$\boxed{\mathfrak{f}_\infty(\beta) = -\tfrac{1}{\beta}\lim_{|V|\to\infty}\tfrac{1}{|V|}\log\mathcal{Z}(\beta)} \tag{2.3}$$

  Por exemplo, para o modelo de Ising linear, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathfrak{f}_\infty(\beta) &= -\frac{1}{\beta}\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log\left[2^N(\cosh\beta\mathcal{J})^{N-1}\right] \\ &= -\frac{1}{\beta}\log(2\cosh\beta\mathcal{J}) \end{aligned} \tag{2.4}$$

  que é uma função analítica de $\beta = 1/T$, para $T > 0$, o que traduz o facto de que *o modelo de Ising linear não exibe transição de fase.*

- *Energia interna* $U = U(\beta, V, B, \mathcal{J})$ ... é o valor médio de $\mathcal{H}$:

$$\boxed{U = \langle\mathcal{H}\rangle_\beta = \tfrac{1}{\mathcal{Z}(\beta)}\sum_{\phi\in\Omega}\mathcal{H}(\phi)e^{-\beta\mathcal{H}(\phi)}} \tag{2.5}$$

- *Spin total* ... é a variável aleatória $S = S(\beta, B, V, \mathcal{J}) : \Omega \to \mathbb{R}$, definida por:

$$\boxed{S = \sum_{\mathbf{s}}\phi_{\mathbf{s}}} \qquad \text{isto é} \qquad S(\phi) = \sum_{\mathbf{s}}\phi_{\mathbf{s}}(\phi) = \sum_{\mathbf{s}}\phi(\mathbf{s}) \tag{2.6}$$

- *Magnetização em* $\mathbf{s} \in V$ ... é o valor esperado da variável aleatória $\phi_{\mathbf{s}}$:

$$\boxed{M(\mathbf{s}) = \langle\phi_{\mathbf{s}}\rangle_\beta = \tfrac{1}{\mathcal{Z}(\beta)}\sum_{\phi\in\Omega}\phi(\mathbf{s})e^{-\beta\mathcal{H}(\phi)}} \tag{2.7}$$

  Num modelo de Ising com campo externo variável $B(\mathbf{s})$, e Hamiltoniano:

$$\mathcal{H}(\phi) = -\mathcal{J}\sum_{[\mathbf{s}\mathbf{s}']}\phi(\mathbf{s})\phi(\mathbf{s}') - \sum_{\mathbf{s}\in\Lambda}B(\mathbf{s})\phi(\mathbf{s}) \tag{2.8}$$

  um cálculo directo mostra que:

$$\boxed{M(\mathbf{s}) = -\tfrac{\partial\mathcal{F}}{\partial B(\mathbf{s})}} \tag{2.9}$$

- *Magnetização (total) M* ... é o valor esperado do spin total S:

$$\boxed{M = \langle S\rangle_\beta = \sum_{\mathbf{s}\in V} M(\mathbf{s}) = \sum_{\mathbf{s}\in V} \langle \phi_{\mathbf{s}}\rangle_\beta = \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta)} \sum_{\phi\in\Omega} \sum_{\mathbf{s}\in V} \phi(\mathbf{s}) e^{-\beta\mathcal{H}(\phi)}} \tag{2.10}$$

- *Magnetização média por spin*:

$$\boxed{m = \frac{M}{|V|} = \frac{1}{|V|}\langle \sum_{\mathbf{s}} \phi_{\mathbf{s}}\rangle_\beta} \tag{2.11}$$

Num modelo de Ising com campo externo constante B, e Hamiltoniano:

$$\mathcal{H}(\phi) = -\mathcal{J} \sum_{[\mathbf{ss}']} \phi(\mathbf{s})\phi(\mathbf{s}') - B \sum_{\mathbf{s}\in\Lambda} \phi(\mathbf{s}) \tag{2.12}$$

um cálculo directo mostra que:

$$\boxed{m = -\frac{1}{|V|}\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial B}} \tag{2.13}$$

Consideremos a magnetização média por spin como uma função de $T = 1/\beta$ e B (constante): $m = m(T, B)$. Se, para uma temperatura constante T, o limite de m, quando $B \to 0$, é não nulo:

$$\lim_{B\to 0} m(T, B) \neq 0, \qquad T \text{ constante} \tag{2.14}$$

diz-se que existe *magnetização espontânea* à temperatura T. Para modelos de Ising, isto acontece apenas para temperaturas T, inferiores a uma certa *temperatura crítica* T_c (no modelo de Ising unidimensional $T_c = 0$, como veremos). Para $T > T_c$, $\lim_{B\to 0} m(T, B) = 0$ e não há magnetização espontânea.

O fenómeno de magnetização espontânea, para um certo $T < T_c$, indica que o estado de equilíbrio do sistema não herdou a simetria $\mathbf{Z}_2$ do Hamiltoniano (recordemos que, para $B = 0$, $\mathcal{H}$ tem simetria $\mathbf{Z}_2$ - permuta de spins up$\leftrightarrow$down). Diz-se portanto que, para $T < T_c$, a simetria foi *quebrada espontâneamente*. m serve de *parâmetro de ordem (local)*, permitindo distinguir as duas fases do sistema.

Quando $T \to T_c^-$, m anula-se. Em muito sistemas físicos, em particular nos modelos de Ising, anula-se como uma potência[2]:

$$\boxed{m(T) \sim (T_c - T)^\beta, \qquad \text{quando } T \to T_c^-} \tag{2.15}$$

onde β é o chamado *expoente crítico de magnetização*. Para o modelo de Ising bidimensional $\beta = 1/8$.

- *Magnetização média, no limite termodinâmico*:

$$\boxed{\mathfrak{m}_\infty = \lim_{|V|\to\infty} \frac{M}{|V|}} \tag{2.16}$$

[2] Símbolos de Landau:

– $f(t) = O(g(t))$, quando $t \to a$, significa que $f(t)/g(t)$ é limitada quando $t \to a$.

– $f(t) = o(g(t))$, quando $t \to a$, significa que $f(t)/g(t) \to 0$, quando $t \to a$.

– $f(t) \sim g(t)$, quando $t \to a$, significa que $f(t)/g(t) \to 1$, quando $t \to a$.

– $f(t) \propto g(t)$ (proporcionalidade assintótica), significa que $f(t) \sim kg(t)$, para alguma constante não nula.

- *Susceptibilidade magnética por spin* ... indica como a magnetização média (por spin) responde a um campo externo "infinitesimal":

$$
\begin{aligned}
\mathfrak{X} &\stackrel{\text{def}}{=} \left.\frac{\partial m}{\partial B}\right|_{B=0} \\
&= \frac{\beta}{|V|}\left\{\langle S^2\rangle_\beta - \langle S\rangle_\beta^2\right\} \\
&= \frac{\beta}{|V|}\mathrm{Var}(S) \qquad (2.17)
\end{aligned}
$$

Esta fórmula mostra que a susceptibilidade magnética é proporcional à variância do spin total e mede as suas flutuações.

3 Função de correlação

Dados dois pontos quaisquer $\mathbf{r}, \mathbf{s} \in \Lambda$, define-se a *função de correlação* $C_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ através de:

$$\boxed{C_\beta(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \langle \phi_\mathbf{r}\phi_\mathbf{s}\rangle_\beta = \tfrac{1}{\mathcal{Z}(\beta)}\sum_{\phi\in\Omega}\phi(\mathbf{r})\phi(\mathbf{s})e^{-\beta\mathcal{H}(\phi)}} \qquad (3.1)$$

quer não é mais do que a correlação entre os spins em $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$, respectivamente, e portanto mede a influência recíproca entre esses dois spins.

Os spins em $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ não estão correlacionados quando $\langle \phi_\mathbf{r}\phi_\mathbf{s}\rangle_\beta = \langle \phi_\mathbf{r}\rangle_\beta\langle \phi_\mathbf{s}\rangle_\beta$. É por isso preferível medir a correlação entre os spins em $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$, através da *função de correlação conexa*, *covariância* ou *função de Green* $G_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{s})$, definida por:

$$\boxed{G_\beta(\mathbf{r},\mathbf{s}) = \langle \phi_\mathbf{r}\phi_\mathbf{s}\rangle_\beta - \langle \phi_\mathbf{r}\rangle_\beta\langle \phi_\mathbf{s}\rangle_\beta} \qquad (3.2)$$

de tal forma que os spins em $\mathbf{r}$ e $\mathbf{s}$ não estão correlacionados quando $G_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = 0$.

Quando a distância $|\mathbf{s} - \mathbf{r}|$ cresce é de esperar que a correlação decresça, para $\beta = 1/T$ constante. Por outro lado, a função de correlação $G_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{s})$, como função da temperatura $T = 1/\beta$, e para uma distância $|\mathbf{s} - \mathbf{r}|$ fixa, aumenta quando $T \to 0$ (ou $\beta \to \infty$).

Num modelo de Ising com campo externo variável B, e Hamiltoniano:

$$\mathcal{H}(\phi) = -\mathcal{J}\sum_{[\mathbf{s}\mathbf{s}']}\phi(\mathbf{s})\phi(\mathbf{s}') - \sum_{\mathbf{s}\in\Lambda}B(\mathbf{s})\phi(\mathbf{s}) \qquad (3.3)$$

um cálculo directo mostra que:

$$\boxed{G_\beta(\mathbf{r},\mathbf{s}) = -\tfrac{\partial^2\mathcal{F}}{\partial B(\mathbf{r})\partial B(\mathbf{s})}} \qquad (3.4)$$

É claro que, para o modelo de Ising, $M(\mathbf{s}) = \langle \phi_\mathbf{s}\rangle_\beta \equiv \mathfrak{m}$, constante $\forall \mathbf{s} \in \Lambda$, e $G_\beta(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \langle \phi_\mathbf{r}\phi_\mathbf{s}\rangle_\beta - \mathfrak{m}^2$. Por invariância sob translacções, é claro que:

$$G_\beta(\mathbf{r},\mathbf{s}) = G_\beta(\mathbf{r}-\mathbf{s})$$

e portanto basta considerar a função:

$$\Gamma(\mathbf{r}) \stackrel{\text{def}}{=} G_\beta(\mathbf{0},\mathbf{r}) = \langle \phi_\mathbf{0}\phi_\mathbf{r}\rangle_\beta - \langle \phi_\mathbf{0}\rangle_\beta\langle \phi_\mathbf{r}\rangle_\beta \qquad (3.5)$$

A temperaturas muito elevadas, o que se espera é que as flutuações térmicas dominem a eventual tendência que spins distantes tenham para cooperar. De facto, o que se observa é que, para $T > T_c$, $\Gamma(\mathbf{r})$ decai exponencialmente com a distância entre spins:

$$\boxed{\Gamma(\mathbf{r}) \sim e^{-\frac{|\mathbf{r}|}{\xi(T)}}, \qquad \text{para } T > T_c \text{ e } |\mathbf{r}| \text{ grande}} \tag{3.6}$$

onde $\xi(T)$ representa o *comprimento de correlação* do sistema. $\xi(T)$ é pois uma medida do tamanho dos agregados de spins que cooperam entre si, i.e., que se correlacionam uns com os outros. Para altas temperaturas, $\xi(T)$, medido em unidades da malha da rede, é aproximadamente 1. Para temperaturas $T < T_c$:

$$\Gamma(\mathbf{r}) \sim \langle \phi_{\mathbf{0}} \rangle_\beta^2, \qquad |\mathbf{r}| >> 1$$

Agora já não existem correlações de longo alcance e o sistema aparece magnetizado. Por exemplo, no modelo de Ising $\Gamma(\mathbf{r}) = G(\mathbf{0}, \mathbf{r})$ é exponencialmente pequena.

Na temperatura crítica T_c, $\Gamma(\mathbf{r})$ decai como uma potência da distância $|\mathbf{r}|$ entre spins:

$$\boxed{\Gamma(\mathbf{r}) \sim |\mathbf{r}|^{-(d-2+\eta)}, \qquad \text{para } T = T_c \text{ e } |\mathbf{r}| \text{ grande}} \tag{3.7}$$

onde η é um outro expoente crítico (no modelo de Ising $2d$, $\eta = 1/4$). Portanto, *"apenas na temperatura crítica é que o sistema tem correlações de longo alcance"*, facto que desempenhará um papel essencial em QFT.

Para que as equações (3.6) e (3.7) sejam compatíveis, é necessário que o comprimento de correlação $\xi(T)$ divirja, quando $T \to T_c^+$, isto é:

$$\boxed{\xi(T) \sim (T - T_c)^{-\nu}} \tag{3.8}$$

onde ν é um outro expoente crítico ($\nu = 1$ no modelo de Ising $2d$).

Algumas conclusões a tirar:

- Na temperatura crítica T_c, várias funções termodinâmicas exibem um comportamento singular (não analítico).
- Este comportamento singular está relacionado com correlações de longo alcance e com grandes flutuações.
- O comportamento singular pode ser caracterizado por certos expoentes (ou índices) críticos.
- Embora no Hamiltoniano inicial apenas intervêm interacções de curto alcance, podem ocorrer fenómenos cooperativos que provocam correlações de longo alcance.

4 Matriz de transferência

Vamos agora expôr o método da *matriz de transferência* que é o análogo do formalismo operacional em QFT.

Consideremos um intervalo "temporal" limitado $I = [a, b] \subset \mathbb{R}$, e uma subdivisão de I em N subintervalos iguais, cada um com comprimento $\epsilon = \frac{b-a}{N}$. Designemos a rede assim obtida por:

$$\Lambda_\epsilon = \{t_0 = a < t_1 = a + \epsilon < t_2 = a + 2\epsilon < \cdots < t_i = a + i\epsilon < \cdots < t_N = b\}$$

Suponhámos que a rede original Λ, é do tipo $\Lambda = \Lambda_\epsilon \times \mathcal{S}$, i.e., é composta por $N+1$ *secções*, $\mathcal{S}_i = \{t_i\} \times \mathcal{S}$, $i = 0, \cdots, N$, onde $\mathcal{S}$ pode ser um ponto, uma rede linear, plana, etc...

Para cada configuração $\boldsymbol{\phi} \in \Omega$, designemos por:

$$\boldsymbol{\sigma}_i = \phi|_{t_i \times \mathcal{S}}$$

a restrição de $\boldsymbol{\phi}$ à secção $\mathcal{S}_i$, de tal forma que $\boldsymbol{\sigma}_i(\mathbf{s}) = \boldsymbol{\phi}(t_i, \mathbf{s})$, $\mathbf{s} \in \mathcal{S}$, e suponhámos ainda que as interacções ocorrem apenas dentro de cada secção e entre secções vizinhas $\mathcal{S}_i$ e $\mathcal{S}_{i+1}$. O Hamiltoniano de uma configuração $\boldsymbol{\phi} = \{\boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\sigma}_1, \cdots, \boldsymbol{\sigma}_N\} \in \Omega$ pode então ser escrito na forma:

$$\boxed{\mathcal{H}(\boldsymbol{\phi}) = \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_{i+1}) + \sum_{i=0}^{N} \mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_i)} \tag{4.1}$$

Suponhámos, em primeiro lugar, que *fixámos as configurações de fronteira* $\boldsymbol{\sigma}_0$ e $\boldsymbol{\sigma}_N$. A função de partição correspondente é então dada por:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(\boldsymbol{\sigma}_N|\boldsymbol{\sigma}_0) &= \sum_{\{\boldsymbol{\sigma}_1,\cdots,\boldsymbol{\sigma}_{N-1}\}} e^{-\beta\left\{\sum_{i=0}^{N} \mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_i) + \sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}_i,\boldsymbol{\sigma}_{i+1})\right\}} \\
&= \sum_{\{\boldsymbol{\sigma}_1,\cdots,\boldsymbol{\sigma}_{N-1}\}} e^{-\beta\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_0)/2} e^{-\beta\{\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_0)/2+\mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}_0,\boldsymbol{\sigma}_1)+\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_1)/2\}} e^{-\beta\{\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_1)/2+\mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2)+\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_2)/2\}} \cdots \\
&\qquad \cdots e^{-\beta\{\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_{N-1})/2+\mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}_{N-1},\boldsymbol{\sigma}_N)+\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_N)/2\}} e^{-\beta\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_N)/2} \\
&= e^{-\beta\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_0)/2} \left[\sum_{\{\boldsymbol{\sigma}_1,\cdots,\boldsymbol{\sigma}_{N-1}\}} T(\boldsymbol{\sigma}_0,\boldsymbol{\sigma}_1) T(\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2) \cdots T(\boldsymbol{\sigma}_{N-1},\boldsymbol{\sigma}_N) \right] e^{-\beta\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_N)/2}
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Por outro lado, se supômos condições de fronteira periódicas $\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}_N$, e se somármos também sobre as configurações $\boldsymbol{\sigma}_0 = \boldsymbol{\sigma}_N$, obtemos para a correspondente função de partição:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z} &= \sum_{\{\boldsymbol{\sigma}_0,\cdots,\boldsymbol{\sigma}_{N-1}\}} e^{-\beta\left\{\sum_{i=0}^{N-1} \mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}_i,\boldsymbol{\sigma}_{i+1}) + \mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_i)\right\}} \\
&= \sum_{\{\boldsymbol{\sigma}_0,\cdots,\boldsymbol{\sigma}_{N-1}\}} e^{-\beta\{\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_0)/2+\mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}_0,\boldsymbol{\sigma}_1)+\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_1)/2\}} e^{-\beta\{\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_1)/2+\mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2)+\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_2)/2\}} \cdots \\
&\qquad \cdots e^{-\beta\{\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_{N-1})/2+\mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}_{N-1},\boldsymbol{\sigma}_0)+\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_0)/2\}} \\
&= \sum_{\{\boldsymbol{\sigma}_0,\cdots,\boldsymbol{\sigma}_{N-1}\}} T(\boldsymbol{\sigma}_0,\boldsymbol{\sigma}_1) T(\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2) \cdots T(\boldsymbol{\sigma}_{N-1},\boldsymbol{\sigma}_0)
\end{aligned} \tag{4.3}$$

onde:

$$T(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_{i+1}) = \exp -\beta \left\{ \mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}_i, \boldsymbol{\sigma}_{i+1}) + \frac{\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_i) + \mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_{i+1})}{2} \right\} \tag{4.4}$$

É conveniente interpretar as fórmulas (4.8) e (4.3) com o formalismo seguinte - consideremos um espaço vectorial $\mathbf{V}$, gerado por todas as configurações possíveis $\boldsymbol{\sigma} : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$, para as quais usamos a notação de Dirac, notando-as por $|\boldsymbol{\sigma}\rangle$. Neste espaço definimos um operador $\mathbf{T}$, chamado *operador de transição*, cuja *matriz de transferência*, na base $\{|\boldsymbol{\sigma}\rangle\}$, é definida por:

$$\boxed{\langle \boldsymbol{\sigma}|\mathbf{T}|\boldsymbol{\sigma}'\rangle = T(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}') = \exp -\beta \left\{ \mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\sigma}') + \tfrac{\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma})+\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}')}{2} \right\}} \tag{4.5}$$

Com este formalismo a função de partição (4.3) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}_N(\beta) &= \sum_{\{\boldsymbol{\sigma}_0,\cdots,\boldsymbol{\sigma}_{N-1}\}} \langle \boldsymbol{\sigma}_0|\mathbf{T}|\boldsymbol{\sigma}_1\rangle \langle \boldsymbol{\sigma}_1|\mathbf{T}|\boldsymbol{\sigma}_2\rangle \cdots \langle \boldsymbol{\sigma}_{N-1}|\mathbf{T}|\boldsymbol{\sigma}_0\rangle \\
&= \sum_{\{\boldsymbol{\sigma}_0\}} \langle \boldsymbol{\sigma}_0|\mathbf{T}^N|\boldsymbol{\sigma}_0\rangle \\
&= \operatorname{tr} \mathbf{T}^N
\end{aligned} \tag{4.6}$$

obtendo-se assim o importante resultado:

$$\boxed{\mathcal{Z}_N(\beta) = \mathrm{tr}\,\mathbf{T}^N} \tag{4.7}$$

Anàlogamente, (4.8) pode ser escrita na forma:

$$\begin{aligned}
\mathcal{Z}(\boldsymbol{\sigma}_N|\boldsymbol{\sigma}_0) &= e^{-\beta\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_0)/2}\left[\sum_{\{\boldsymbol{\sigma}_1,\cdots,\boldsymbol{\sigma}_{N-1}\}} T(\boldsymbol{\sigma}_0,\boldsymbol{\sigma}_1)T(\boldsymbol{\sigma}_1,\boldsymbol{\sigma}_2)\cdots T(\boldsymbol{\sigma}_{N-1},\boldsymbol{\sigma}_N)\right] e^{-\beta\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_N)/2} \\
&= e^{-\beta\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_0)/2}\sum_{\{\boldsymbol{\sigma}_1,\cdots,\boldsymbol{\sigma}_{N-1}\}}\langle\boldsymbol{\sigma}_0|\mathbf{T}|\boldsymbol{\sigma}_1\rangle\langle\boldsymbol{\sigma}_1|\mathbf{T}|\boldsymbol{\sigma}_2\rangle\cdots\langle\boldsymbol{\sigma}_{N-1}|\mathbf{T}|\boldsymbol{\sigma}_N\rangle e^{-\beta\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_N)/2} \\
&= \exp\left\{-\beta\frac{\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_0)+\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_N)}{2}\right\}\sum_{\{\boldsymbol{\sigma}_1,\cdots,\boldsymbol{\sigma}_{N-1}\}}\langle\boldsymbol{\sigma}_0|\mathbf{T}|\boldsymbol{\sigma}_1\rangle\langle\boldsymbol{\sigma}_1|\mathbf{T}|\boldsymbol{\sigma}_2\rangle\cdots\langle\boldsymbol{\sigma}_{N-1}|\mathbf{T}|\boldsymbol{\sigma}_N\rangle \\
&= \exp\left\{-\beta\frac{\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_0)+\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_N)}{2}\right\}\langle\boldsymbol{\sigma}_0|\mathbf{T}^{N-1}|\boldsymbol{\sigma}_N\rangle
\end{aligned} \tag{4.8}$$

A matriz $\mathbf{T}$ é simétrica e portanto diagonalizável com espectro real $\lambda_0 > \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_D$, onde $D = \dim\mathbf{V}$. Portanto a função de partição (4.7) é dada por:

$$\boxed{\mathcal{Z}_N(\beta) = \sum_{k=0}^{D}(\lambda_k)^N} \tag{4.9}$$

Além disso, como todas as entradas da matriz $\mathbf{T}$ são positivas, segue-se, do Teorema de Perron Frobenius[3], que o valor próprio máximo λ_0 é não degenerado (o seu espaço próprio tem dimensão 1) e é uma função analítica dos seus argumentos. Em particular, no caso presente, λ_0 é pois uma função analítica de $\beta = 1/T > 0$.

Se agora tomámos o limite termodinâmico parcial, fazendo o número de secções N tender para ∞, obtemos para a energia livre parcial (por secção):

$$\begin{aligned}
-\beta\,\mathcal{F}_D(\beta) &= \lim_{N\to\infty}\frac{\log\mathcal{Z}_N(\beta)}{N} \\
&= \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log\left[\lambda_0^N\left(1+\sum_{i=1}^{D}(\lambda_1/\lambda_0)^N\right)\right] \\
&= \log\lambda_0 + \lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log\left[1+\sum_{i=1}^{D}(\lambda_1/\lambda_0)^N\right] \\
&= \log\lambda_0
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Para sistemas cuja dimensionalidade q é superior ou igual a 2, devemos calcular um segundo limite, quando $D \to \infty$, para calcular o limite termodinâmico real.

▷ **Exemplo 4.1 (Modelo de Ising $2d$)** ... Como exemplo concreto, consideremos de novo a rede bidimensional quadrada $\Lambda_2 = \{(i,s) \in \mathbf{Z}^2 : 0 \leq i \leq N-1,\ 0 \leq s \leq M-1\}$, com condições de fronteira periódicas:

$$\begin{aligned}
\phi(0,s) &= \phi(N,s), && s = 0,2,\cdots,M-1 \\
\phi(i,0) &= \phi(i,M), && i = 0,2,\cdots,N-1, \qquad \forall\phi
\end{aligned}$$

[3]Teorema de Perron Frobenius: "..........................".

o que equivale a considerar uma rede toroidal com MN pontos (o chamado “Toro de Ising”), com Hamiltoniano:

$$\mathcal{H}(\phi) = -\mathcal{J}\left(\sum_{s=0}^{M-1}\sum_{i=0}^{N-1}\phi(i,s)\phi(i+1,s) + \sum_{i=0}^{N-1}\sum_{s=0}^{M-1}\phi(i,s)\phi(i,s+1)\right) - B\sum_{i=0}^{N-1}\sum_{s=0}^{M-1}\phi(i,s) \tag{4.11}$$

Para cada configuração $\phi : \Lambda_N \to \{\pm 1\}$, e cada $i = 0, \cdots, N-1$, representemos por σ_i a restrição de ϕ à secção (a coluna) i da rede, de tal forma que:

$$\sigma_i(s) = \phi(i,s), \qquad s = 0, \cdots, M-1 \tag{4.12}$$

Para cada i fixo, existem 2^M configurações σ_i, e portanto o espaço vectorial $\mathbf{V} = \mathrm{span}\{|\sigma\rangle\}$ tem dimensão $D = 2^M$. Cada uma tem a sua própria energia dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{V}(\sigma_i) &= -\mathcal{J}\sum_{s=0}^{M-1}\phi(i,s)\phi(i,s+1) - B\sum_{s=0}^{M-1}\phi(i,s)\\ &= -\mathcal{J}\sum_{s=0}^{M-1}\sigma_i(s)\sigma_i(s+1) - B\sum_{s=0}^{M-1}\sigma_i(s)\end{aligned} \tag{4.13}$$

bem como uma energia de interacção com a secção vizinha $i+1$, dada por:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}(\sigma_i, \sigma_{i+1}) &= -\mathcal{J}\sum_{s=0}^{M-1}\phi(i,s)\phi(i+1,s)\\ &= -\mathcal{J}\sum_{s=0}^{M-1}\sigma_i(s)\sigma_{i+1}(s)\end{aligned} \tag{4.14}$$

O Hamiltoniano (4.11) pode então ser escrito na forma (4.1):

$$\mathcal{H}(\phi) = \sum_{i=0}^{N-1}\Big[\mathcal{V}(\sigma_i) + \mathcal{E}(\sigma_i, \sigma_{i+1})\Big] \tag{4.15}$$

e portanto a função de partição na forma:

$$\mathcal{Z}_N(\beta) = \mathrm{tr}\,\mathbf{T}^N \tag{4.16}$$

Aqui $\mathbf{V}$ é o espaço vectorial gerado pelas possíveis $D = 2^M$ configurações σ_i (para i fixo), e a matriz de transferência é a matriz $2^M \times 2^M$, definida por (4.5), isto é:

$$\langle\sigma|\mathbf{T}|\sigma'\rangle = e^{-\beta\{\mathcal{V}(\sigma)/2 + \mathcal{E}(\sigma,\sigma') + \mathcal{V}(\sigma')/2\}} \tag{4.17}$$

onde $\mathcal{V}$ e $\mathcal{E}$ são dadas por (4.13) e (4.14), respectivamente. Para prosseguir a análise temos que calcular o valor próprio máximo de uma matriz simétrica $2^M \times 2^M$!.

O cálculo anterior pode ser generalizado para dimensões superiores. Assim por exemplo, para redes cúbicas tridimensionais, definimos as configurações $\boldsymbol{\sigma}_j$, em cada plano bidimensional, reconstruindo a rede pelas suas secções planas. Agora $\mathcal{V}(\boldsymbol{\sigma}_j)$ será a energia do plano j enquanto que $\mathcal{E}(\boldsymbol{\sigma}_j, \boldsymbol{\sigma}_{j+1})$ representa a energia de interação entre dois planos vizinhos.

▷ **Exemplo 4.2 (O anel de Ising)** ... Para $M = 1$, temos um anel de Ising, e a matriz $\mathbf{T}$ é a matriz 2×2, dada por:

$$\begin{aligned} \langle \sigma | \mathbf{T} | \sigma' \rangle &= e^{\beta \mathcal{J} \sigma\sigma' + \beta B(\sigma+\sigma')/2} \\ &= e^{K\sigma\sigma' + h(\sigma+\sigma')/2} \qquad \text{onde} \;\; \sigma, \sigma' = \pm 1 \end{aligned} \tag{4.18}$$

isto é:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \begin{bmatrix} \langle -1|\mathbf{T}|-1\rangle & \langle -1|\mathbf{T}|+1\rangle \\ \langle +1|\mathbf{T}|-1\rangle & \langle +1|\mathbf{T}|+1\rangle \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e^{K-h} & e^{-K} \\ e^{-K} & e^{K+h} \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.19}$$

(onde pusemos $K = \beta\mathcal{J}$ e $h = \beta B$). Os valores próprios são:

$$\lambda_0, \lambda_1 = e^K \cosh(h) \pm \sqrt{e^{2K}\sinh^2(h) + e^{-2K}}$$

Em particular, para $h = 0$:

$$\lambda_0 = 2\cosh K, \; \lambda_1 = 2\sinh K$$

e a função de partição é portanto, por (4.9), igual a:

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_N(K, h=0) &= (\lambda_0)^N + (\lambda_1)^N \\ &= (2\cosh K)^N + (2\sinh K)^N \end{aligned} \tag{4.20}$$

Se N é muito grande, o primeiro termo é muito maior que o segundo e portanto, no limite termodinâmico, como se viu em (4.10), tem-se que:

$$\begin{aligned} -\beta\mathfrak{f}_\infty &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \mathcal{Z}_N(K, 0) \\ &= \log \lambda_0 \\ &= \log(2\cosh K) \end{aligned} \tag{4.21}$$

No caso geral, a *energia livre por spin* f_∞, no limite termodinâmico, é dada por:

$$\begin{aligned} -\beta\mathfrak{f}_\infty(K,h) &= \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \log \mathcal{Z}_N(\beta) \\ &= \log \lambda_0 \\ &= \log[e^K \cosh(h) + (e^{2K}\sinh^2(h) + e^{-2K})^{1/2}] \end{aligned} \tag{4.22}$$

■.

Calculemos agora a média de um observável $X_{\mathbf{r}}$, que depende de um sítio fixo $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_i$ (por exemplo $X_{\mathbf{r}} = \phi_{\mathbf{r}}$), usando o operador de transição $\mathbf{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$:

$$\langle X_{\mathbf{r}} \rangle_\beta = \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta)} \sum_{\phi\in\Omega} X(\mathbf{r}) e^{-\beta\mathcal{H}(\phi)} \tag{4.23}$$

onde $\mathcal{H}(\phi)$, para $\phi = \{\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{N-1}\} \in \Omega$, é do tipo (4.1):

$$\mathcal{H}(\phi) = \sum_{i=0}^{N-1} \Big[\mathcal{V}(\sigma_i) + \mathcal{E}(\sigma_i, \sigma_{i+1})\Big]$$

e estámos a supôr que $\sigma_0 = \sigma_N$ e que $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$.

Procedendo de forma análoga à que foi usada para deduzir (4.8), podemos escrever:

$$\begin{aligned}
\langle X_{\mathbf{r}} \rangle_\beta &= \sum_{\{\sigma_0,\cdots,\sigma_{N-1}\}} X(\mathbf{r}) e^{-\beta \sum_{i=0}^{N-1} \left[\mathcal{V}(\sigma_i)+\mathcal{E}(\sigma_i,\sigma_{i+1}\right]} \\
&= \frac{1}{\mathcal{Z}_N} \sum_{\{\sigma_0,\cdots,\sigma_{N-1}\}} e^{-\beta\{\mathcal{V}(\sigma_0)/2+\mathcal{E}(\sigma_0,\sigma_1)+\mathcal{V}(\sigma_1)/2\}} \cdots X(\mathbf{r}) e^{-\beta\{\mathcal{V}(\sigma_i)/2+\mathcal{E}(\sigma_i,\sigma_{i+1})+\mathcal{V}(\sigma_i)/2\}} \cdots \\
&\qquad \cdots e^{-\beta\{\mathcal{V}(\sigma_N)/2+\mathcal{E}(\sigma_N,\sigma_1)+\mathcal{V}(\sigma_1)/2\}} \\
&= \frac{1}{\mathcal{Z}_N} \sum_{\{\sigma_0,\cdots,\sigma_{N-1}\}} \langle\sigma_0|\mathbf{T}|\sigma_1\rangle \cdots \langle\sigma_{i-1}|\mathbf{T}|\sigma_i\rangle X(\mathbf{r}) \langle\sigma_i|\mathbf{T}|\sigma_{i+1}\rangle \cdots \langle\sigma_{N-1}|\mathbf{T}|\sigma_0\rangle
\end{aligned} \tag{4.24}$$

Se $\mathbf{X}_{\mathbf{r}} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$ é o operador diagonal que representa o observável local $X_{\mathbf{r}}$,de tal forma que:

$$\mathbf{X}_{\mathbf{r}}|\sigma\rangle = X(\mathbf{r})|\sigma\rangle \tag{4.25}$$

podemos escrever (4.24) na forma:

$$\begin{aligned}
\langle X_{\mathbf{r}} \rangle_\beta &= \mathcal{Z}_N^{-1} \sum_{\{\sigma_0,\cdots,\sigma_{N-1}\}} \langle\sigma_0|\mathbf{T}|\sigma_1\rangle \cdots \langle\sigma_{i-1}|\mathbf{T}\mathbf{X}_{\mathbf{r}}|\sigma_i\rangle \langle\sigma_i|\mathbf{T}|\sigma_{i+1}\rangle \cdots \langle\sigma_{N-1}|\mathbf{T}|\sigma_0\rangle \\
&= \mathcal{Z}_N^{-1} \operatorname{tr} \mathbf{T}^i \mathbf{X}_{\mathbf{r}} \mathbf{T}^{N-i}
\end{aligned}$$

e como o traço é cíclico e atendendo a que $\mathcal{Z} = \operatorname{tr} \mathbf{T}^N$, obtemos finalmente:

$$\boxed{\langle X_{\mathbf{r}} \rangle_\beta = \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{T}^N \mathbf{X}_{\mathbf{r}})}{\operatorname{tr} \mathbf{T}^N}} \tag{4.26}$$

Calculemos agora as funções de correlação usando o operador de transição $\mathbf{T}$. Consideremos dois sítios $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_i$, na secção i, e $\mathbf{s} \in \mathcal{S}_{i+n}$, na secção $i+n$, e calculemos a correlação $\langle\phi_{i,\mathbf{r}}\phi_{i+n,\mathbf{s}}\rangle_\beta$, usando o operador $\mathbf{T} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$:

$$\langle\phi_{i,\mathbf{r}}\phi_{i+n,\mathbf{s}}\rangle_\beta = \frac{1}{\mathcal{Z}(\beta)} \sum_{\phi\in\Omega} \phi(i,\mathbf{r})\phi(i+n,\mathbf{s}) e^{-\beta\mathcal{H}(\phi)} \tag{4.27}$$

onde $\mathcal{H}(\phi)$, para $\phi = \{\sigma_0, \sigma_1, \cdots, \sigma_{N-1}\} \in \Omega$, é do tipo (4.1):

$$\mathcal{H}(\phi) = \sum_{i=0}^{N-1} \Big[\mathcal{V}(\sigma_i) + \mathcal{E}(\sigma_i, \sigma_{i+1}\Big]$$

e estámos a supôr mais uma vez que $\sigma_0 = \sigma_N$ e que $\mathcal{T} \subset \mathbb{R}$.

Procedendo de forma análoga à que foi usada para deduzir (4.8), podemos escrever:

$$\langle\phi_{i,\mathbf{r}}\phi_{i+n,\mathbf{s}}\rangle_\beta = \sum_{\{\sigma_0,\cdots,\sigma_{N-1}\}} \sigma_i(\mathbf{r})\sigma_{i+n}(\mathbf{s}) e^{-\beta \sum_{i=0}^{N-1} \left[\mathcal{V}(\sigma_i)+\mathcal{E}(\sigma_i,\sigma_{i+1}\right]}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mathcal{Z}_N} \sum_{\{\sigma_0,\cdots,\sigma_{N-1}\}} e^{-\beta\{\mathcal{V}(\sigma_0)/2+\mathcal{E}(\sigma_0,\sigma_1)+\mathcal{V}(\sigma_1)/2\}} \cdots \sigma_i(\mathbf{r}) e^{-\beta\{\mathcal{V}(\sigma_i)/2+\mathcal{E}(\sigma_i,\sigma_{i+1})+\mathcal{V}(\sigma_i)/2\}} \cdots \\
&\quad \cdots \sigma_{i+n}(\mathbf{s}) e^{-\beta\{\mathcal{V}(\sigma_{i+n})/2+\mathcal{E}(\sigma_{i+n},\sigma_{i+n+1})+\mathcal{V}(\sigma_{i+n})/2\}} \cdots e^{-\beta\{\mathcal{V}(\sigma_{N-1})/2+\mathcal{E}(\sigma_{N-1},\sigma_0)+\mathcal{V}(\sigma_0)/2\}} \\
&= \frac{1}{\mathcal{Z}_N} \sum_{\{\sigma_0,\cdots,\sigma_{N-1}\}} \langle\sigma_0|\mathbf{T}|\sigma_1\rangle \cdots \langle\sigma_{i-1}|\mathbf{T}|\sigma_i\rangle \sigma_i(\mathbf{r}) \langle\sigma_i|\mathbf{T}|\sigma_{i+1}\rangle \cdots \\
&\qquad \cdots \langle\sigma_{i+n-1}|\mathbf{T}|\sigma_{i+n}\rangle \sigma_{i+n}(\mathbf{s}) \langle\sigma_{i+n}|\mathbf{T}|\sigma_{i+n+1}\rangle \cdots \langle\sigma_{N-1}|\mathbf{T}|\sigma_0\rangle
\end{aligned} \tag{4.28}
$$

Definindo um operador diagonal $\mathbf{S_r} : \mathbf{V} \to \mathbf{V}$, através de $\mathbf{S_r}|\sigma\rangle = \sigma(\mathbf{r})|\sigma\rangle$, podemos escrever (4.28) na forma:

$$
\begin{aligned}
\langle\phi_{i,\mathbf{r}}\phi_{i+n,\mathbf{s}}\rangle_\beta &= \frac{1}{\mathcal{Z}_N} \sum_{\{\sigma_0,\cdots,\sigma_{N-1}\}} \langle\sigma_0|\mathbf{T}|\sigma_1\rangle \cdots \langle\phi_{i-1}|\mathbf{T}\mathbf{S_r}|\sigma_i\rangle \langle\phi_i|\mathbf{T}|\sigma_{i+1}\rangle \cdots \\
&\qquad \cdots \langle\phi_{i+n-1}|\mathbf{T}\mathbf{S_s}|\sigma_{i+n}\rangle \langle\sigma_{i+n}|\mathbf{T}|\sigma_{i+n+1}\rangle \cdots \langle\sigma_{N-1}|\mathbf{T}|\sigma_0\rangle \\
&= \frac{1}{\mathcal{Z}_N} \operatorname{tr} \mathbf{T}^i \mathbf{S_r} \mathbf{T}^n \mathbf{S_s} \mathbf{T}^{N-(i+n)}
\end{aligned}
$$

e como o traço é cíclico e atendendo a que $\mathcal{Z} = \operatorname{tr} \mathbf{T}^N$, obtemos finalmente:

$$
\boxed{\langle\phi_{i,\mathbf{r}}\phi_{i+n,\mathbf{s}}\rangle_\beta = \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{S_r}\mathbf{T}^n\mathbf{S_s}\mathbf{T}^{N-n})}{\operatorname{tr}\mathbf{T}^N}} \tag{4.29}
$$

▷ **Exemplo 4.3** ... Como aplicação, analisemos agora o caso do anel de Ising com N spins, com campo externo nulo ($h = 0$), por simplicidade. Por invariância sob translacções, basta calcular $\langle\phi_0\phi_n\rangle$. Com o Hamiltoniano dado por (1.5), vem que:

$$
\begin{aligned}
\langle\phi_0\phi_n\rangle|_{(K,h=0)} &= \frac{\operatorname{tr}(S_0\mathbf{T}^n S_n \mathbf{T}^{N-n})}{\operatorname{tr}\mathbf{T}^N} \\
&= \ldots. \\
&= \frac{\tanh^n K + \tanh^{N-n} K}{1+\tanh^N K} \\
&\to \tanh^n K, \qquad \text{quando} \quad N \to \infty
\end{aligned} \tag{4.30}
$$

De facto, para $h = 0$ a matriz de transferência é:

$$
\mathbf{T} = \mathbf{T}(K) = \begin{bmatrix} e^K & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K \end{bmatrix} = e^K \mathbf{1} + e^{-K}\boldsymbol{\sigma}_1
$$

onde usámos as chamadas **matrizes de Pauli** $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3$, definidas por:

$$
\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.31}
$$

$\mathbf{T}$ é simétrica e pode ser diagonalizada pela matriz ortogonal:

$$
\mathbf{U} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{1} + i\boldsymbol{\sigma}_2) = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}
$$

obtendo-se:

$$
\mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^{-1} = e^K\mathbf{1} + e^{-K}\boldsymbol{\sigma}_3 = 2\begin{bmatrix} \cosh K & 0 \\ 0 & \sinh K \end{bmatrix}
$$

Por outro lado, o operador de spin é representado pela matriz $\boldsymbol{\sigma}_3$:

$$\mathbf{S}_0 = \mathbf{S}_n = \boldsymbol{\sigma}_3$$

e como:

$$\mathbf{U}\boldsymbol{\tau}_3\mathbf{U}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

obtemos finalmente que:

$$\begin{aligned}
\langle\phi_0\phi_n\rangle|_{(K,h=0)} &= \frac{\operatorname{tr}(S_0\mathbf{T}^n S_n \mathbf{T}^{N-n})}{\operatorname{tr}\mathbf{T}^N} \\
&= \frac{\operatorname{tr}\left[(\mathbf{U}\boldsymbol{\tau}_3\mathbf{U}^{-1})(\mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^{-1})^n(\mathbf{U}\boldsymbol{\tau}_3\mathbf{U}^{-1})(\mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^{-1})^{N-n}\right]}{\operatorname{tr}(\mathbf{U}\mathbf{T}\mathbf{U}^{-1})^N} \\
&= \frac{\tanh^n K + \tanh^{N-n} K}{1+\tanh^N K} \\
&\to \tanh^n K, \qquad \text{quando} \quad N\to\infty
\end{aligned} \tag{4.32}$$

Portanto;

$$\Gamma(n) = G_\beta(0,n) = \langle\phi_0\phi_n\rangle = \tanh^n K \tag{4.33}$$

e o comprimento de correlação é:

$$\begin{aligned}
\xi^{-1} &= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log\Gamma(n)\right) \\
&= \lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{n}\log\tanh^n K\right) \\
&= -\log\tanh K
\end{aligned}$$

isto é:

$$\xi(T) = \frac{1}{-\log\tanh K}, \qquad K = \mathcal{J}/T$$

Note que $\xi\to\infty$, quando $T\to 0$, o que significa que a transição de fase dá-se à temperatura nula, enquanto que $\xi\to 0$, quando $T\to\infty$.

5 Modelo de Ising 1d. Formalismo operacional

Como vimos, a função de partição pode ser escrita na forma:

$$\mathcal{Z}_N = \operatorname{tr}\mathbf{T}^N$$

Se $\mathbf{T}$ tiver todos os valores próprios positivos, podemos definir um *Hamiltoniano "quântico"* $\mathbf{H}:\mathbf{V}\to\mathbf{V}$, através de:

$$\boxed{\mathbf{T} = e^{-\epsilon\mathbf{H}}} \tag{5.1}$$

onde, por conveniência posterior, se fez intervir o valor ϵ da malha da rede "temporal".

▷ **Exemplo 5.1** ... Por exemplo, no anel de Ising, supondo que $h=0$, por simplicidade, a matriz de transferência é dada por:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} e^K & e^{-K} \\ e^{-K} & e^K \end{bmatrix} = e^K\mathbf{1} + e^{-K}\boldsymbol{\sigma}_1$$

onde usámos as chamadas *matrizes de Pauli* $\boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_2, \boldsymbol{\sigma}_3$, definidas por:

$$\boldsymbol{\sigma}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\sigma}_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{5.2}$$

Como os valores próprios são positivos, podemos escrever:

$$\mathbf{T} = e^{-\epsilon \mathbf{H}} = \mathbf{1} - \epsilon \mathbf{H} + o(\epsilon^2)$$

onde:

$$\boxed{\mathbf{H} = k_\epsilon \mathbf{1} + K_\epsilon^* \boldsymbol{\sigma}_1} \tag{5.3}$$

Calculando $-\epsilon \mathbf{H} = \log \mathbf{T}$, concluímos que:

$$k_\epsilon = \frac{1}{2\epsilon} \log \frac{\sinh 2K}{2}, \qquad K_\epsilon^* = -\frac{\log \tanh K}{2\epsilon} \tag{5.4}$$

Para $\epsilon = 1$, a relação entre K e K^* é particularmente importante. Pode ser escrita na forma simétrica:

$$(\sinh 2K^*) \sinh K = 1$$

o que mostra que, se definirmos:

$$\boxed{K^* = \mathcal{D}(K) \stackrel{\text{def}}{=} -\tfrac{\log \tanh K}{2}} \tag{5.5}$$

então $\mathcal{D}(\mathcal{D}(K)) = K$, isto é, $\mathcal{D}$ é uma dualidade.

■.

Continuando - uma vez escrita a matriz de transferência na forma $\mathbf{T} = e^{-\epsilon \mathbf{H}}$, a função de partição é dada por:

$$\boxed{\begin{array}{lcll} \mathcal{Z}_N & = & \operatorname{tr} \mathbf{T}^N = \operatorname{tr} (e^{-\epsilon \mathbf{H}})^N = \operatorname{tr} e^{-N\epsilon \mathbf{H}} & (= e^{-\beta \mathcal{F}_N}) \\ & = & \sum_\alpha e^{-N\epsilon E_\alpha} & (E_0 \leq E_1 \leq E_2 \leq \cdots) \end{array}} \tag{5.6}$$

onde E_α representam os valores próprios de $\mathbf{H}$, a que chamámos *níveis de energia*, cuja relação com os valores próprios λ_α, de $\mathbf{T}$ é:

$$\boxed{E_\alpha = -\tfrac{1}{\epsilon} \log \lambda_\alpha} \tag{5.7}$$

Em particular:

$$E_0 = -\frac{1}{\epsilon} \log \lambda_0$$

é o nível mais baixo da energia ou *energia do vácuo*.

Definindo o "tamanho" L, do "eixo temporal", por:

$$L = N\epsilon \tag{5.8}$$

de tal forma que $N = L/\epsilon$, podemos ainda escrever:

$$\boxed{\mathcal{Z} = \sum_\alpha e^{-LE_\alpha}} \tag{5.9}$$

Note que L é o inverso da temperatura $L = 1/T$. Quando N é muito grande (e ϵ constante), a soma é dominada pela energia do vácuo E_0, de tal forma que a energia livre é:

$$-\beta \mathcal{F}_N = \log \mathcal{Z}_N = -N\epsilon E_0$$

Em particular a energia livre por spin $\mathfrak{f}_\infty$, no limite termodinâmico, é dada por:

$$-\beta \mathfrak{f}_\infty(K, h) = \log \lambda_0 = -\epsilon E_0 \tag{5.10}$$

A primeira correcção, devida ao tamanho do sistema, é dada pelo nível seguinte de energia E_1 e é:

$$-\beta \mathcal{F}_N = \log \mathcal{Z}_N = -N\epsilon E_0 + e^{-N\epsilon(E_1 - E_0)} + \cdots \tag{5.11}$$

Esta igualdade (5.11) diz-nos que, se o *salto de energia*[4]:

$$m \stackrel{\text{def}}{=} E_1 - E_0$$

fôr estritamente positivo, então o termo de correcção $e^{-N\epsilon(E_1 - E_0)}$ decai exponencialmente com o tamanho do sistema. Esta é a primeira manifestação de uma relação geral entre correlações espaciais e o salto de energia m. No anel de Ising, as correlações são provocadas pelas condições de fronteira periódicas, que relacionam pontos a uma distância $L = N\epsilon$, onde $\epsilon > 0$ é a malha da "rede temporal".

Definindo o *comprimento de correlação* ou *coerência* ξ, através de:

$$\boxed{\xi = \frac{1}{\epsilon(E_1 - E_0)} = \frac{1}{m\epsilon}} \tag{5.12}$$

podemos escrever o termo de correcção na forma:

$$e^{-N\epsilon(E_1 - E_0)} = e^{-N/\xi} \tag{5.13}$$

Note que, quando $m \to 0$ (com ϵ fixo), o comprimento de correlação ξ diverge para ∞, e vice-versa.

No anel de Ising (com $h = 0$), o comprimento de correlação é:

$$\xi = \frac{1}{\epsilon(E_1 - E_0)} = \frac{1}{-\epsilon(\log \lambda_1 - \log \lambda_0)} = -\frac{1}{\epsilon \log \tanh K} \tag{5.14}$$

As regiões onde o comprimento de correlação ξ é muito grande adquirem especial significado, porque são estas onde podemos ignorar a existência de uma discretização. Por outras palavras, se olharmos para regiões onde as correlações envolvem distâncias muito superiores à malha da rede ϵ, então a rede fica "escondida" pela escala enorme dos efeitos que estámos a considerar.

Não esqueçamos que um comprimento de correlação ξ muito grande está ligado a uma pequeno salto de energia $m = E_1 - E_0$. Portanto, os sistemas de interesse do ponto de vista da QFT, são aqueles em que $m = E_1 - E_0$ é muito pequeno.

Consideremos agora a média de um observável $X_\mathbf{r}$, que depende de um sítio fixo $\mathbf{r} \in \mathcal{S}_i$ (por exemplo $X_\mathbf{r} = \phi_\mathbf{r}$), que, como vimos na secção anterior, é dado por 4.26):

$$\langle X_\mathbf{r} \rangle_\beta = \frac{\operatorname{tr}(\mathbf{T}^N \mathbf{X}_\mathbf{r})}{\operatorname{tr} \mathbf{T}^N} \tag{5.15}$$

[4] energy gap

Substituindo nesta expressão $\mathbf{T} = e^{-\epsilon \mathbf{H}}$, vem que:

$$\begin{aligned}
\langle X_{\mathbf{r}} \rangle_\beta &= \mathcal{Z}_N^{-1} \operatorname{tr}(\mathbf{T}^N \mathbf{X}_{\mathbf{r}}) = \mathcal{Z}_N^{-1} \operatorname{tr}(e^{-N\epsilon \mathbf{H}} \mathbf{X}_{\mathbf{r}}) \\
&= \mathcal{Z}_N^{-1} \sum_\alpha e^{-N\epsilon E_\alpha} \langle \alpha | \mathbf{X}_{\mathbf{r}} | \alpha \rangle
\end{aligned} \tag{5.16}$$

onde $\{|\alpha\rangle\}$ representa uma base de vectores próprios de $\mathbf{H}$. Quando N é muito grande, a soma é dominada pelo nível mais baixo E_0, de tal forma que, no limite:

$$\boxed{\langle X_{\mathbf{r}} \rangle_\beta = \langle 0 | \mathbf{X}_{\mathbf{r}} | 0 \rangle} \tag{5.17}$$

isto é: *no limite termodinâmico, a média de um observável estatístico, é igual ao valor do elemento diagonal do correspondente operador quântico, no estado de vácuo.*

Como exemplo, vejámos o valor da magnetização em r, no anel de Ising. Aqui $X_r = \phi_r$ e $\mathbf{X}_{\mathbf{r}} = \boldsymbol{\sigma}_3$. Portanto, por (5.16):

$$\begin{aligned}
\langle \phi_r \rangle &= \frac{\operatorname{tr}(e^{-N\epsilon \mathbf{H}} \boldsymbol{\sigma}_3)}{\operatorname{tr}(e^{-N\epsilon \mathbf{H}})} \\
&= \frac{\operatorname{tr}(e^{-N\epsilon(k_\epsilon \mathbf{1} + K_\epsilon^* \boldsymbol{\sigma}_1)} \boldsymbol{\sigma}_3)}{\operatorname{tr}(e^{-N\epsilon(k_\epsilon \mathbf{1} + K_\epsilon^* \boldsymbol{\sigma}_1)})} \\
&= \frac{\operatorname{tr}(e^{-N\epsilon K^* \boldsymbol{\sigma}_1} \boldsymbol{\sigma}_3)}{\operatorname{tr}(e^{-N\epsilon K^* \boldsymbol{\sigma}_1})} \\
&= 0
\end{aligned} \tag{5.18}$$

já que (ver (5.4)):

$$\mathbf{H} = k_\epsilon \mathbf{1} + K_\epsilon^* \boldsymbol{\sigma}_1 = \frac{1}{2\epsilon} \log \frac{\sinh 2K}{2} \mathbf{1} - \frac{\log \tanh K}{2\epsilon} \boldsymbol{\sigma}_1$$

Calculemos agora $\langle \phi_0 \phi_n \rangle|_{(K,h=0)}$, mas substituindo $\mathbf{T} = e^{-\epsilon \mathbf{H}}$ em (4.29):

$$\begin{aligned}
\langle \phi_0 \phi_n \rangle &= \mathcal{Z}_N^{-1} \operatorname{tr}(\mathbf{S}_0 \mathbf{T}^n \mathbf{S}_n \mathbf{T}^{N-n}) \\
&= \mathcal{Z}_N^{-1} \operatorname{tr}(\mathbf{S}_0 e^{-n\epsilon \mathbf{H}} \mathbf{S}_n e^{-(N-n)\epsilon \mathbf{H}})
\end{aligned} \tag{5.19}$$

Suponhámos que $\{|\alpha\rangle\}$ é uma base de vectores próprios de $\mathbf{H}$, de tal forma que:

$$e^{-\epsilon \mathbf{H}} = \sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|\, e^{-\epsilon E_\alpha} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{1} = \sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha| \tag{5.20}$$

e ainda que E_0 e E_1 são não degenerados. Então (5.19) fica na forma:

$$\langle \phi_0 \phi_n \rangle = \mathcal{Z}_N^{-1} \sum_\alpha e^{-(N-n)\epsilon E_\alpha} \langle \alpha | \mathbf{S}_0 e^{-n\epsilon \mathbf{H}} \mathbf{S}_n | \alpha \rangle \tag{5.21}$$

Suponhámos que $\ell = \operatorname{dist}(0, n) = n\epsilon$ está fixa, e consideremos o limite termodinâmico quando $N \to \infty$. Nesse limite, apenas a energia do vácuo, E_0, contribui, de tal forma que podemos fazer a substituição:

$$e^{-N\epsilon \mathbf{H}} \longrightarrow |0\rangle\langle 0|\, e^{-\epsilon E_0} \tag{5.22}$$

Portanto, nesse limite, a função de correlação simplifica-se na forma:

$$\boxed{\langle\phi_0\phi_n\rangle = \langle 0|\mathbf{S}_0 e^{-n\epsilon(\mathbf{H}-E_0)}\mathbf{S}_n|0\rangle} \tag{5.23}$$

Usando novamente o facto de que $1 = \sum_\alpha |\alpha\rangle\langle\alpha|$, podemos ainda escrever:

$$\langle\phi_0\phi_n\rangle = \langle 0|\mathbf{S}_0|0\rangle\langle 0|\mathbf{S}_n|0\rangle + \sum_{\alpha>0}\langle 0|\mathbf{S}_0|\alpha\rangle e^{-n\epsilon(E_\alpha-E_0)}\langle\alpha|\mathbf{S}_n|0\rangle \tag{5.24}$$

Recordemos agora que $\langle 0|\mathbf{S}_0|0\rangle = \langle\phi_0\rangle$, $\langle 0|\mathbf{S}_n|0\rangle = \langle\phi_n\rangle$ e ainda a definição de função de correlação conexa ou função de Green:

$$G(0,n) = \langle\phi_0\phi_n\rangle - \langle\phi_0\rangle\langle\phi_n\rangle$$

Fazendo as correspondentes substituições, obtemos:

$$\boxed{G(0,n) = \textstyle\sum_{\alpha>0}\langle 0|\mathbf{S}_0|\alpha\rangle e^{-n\epsilon(E_\alpha-E_0)}\langle\alpha|\mathbf{S}_n|0\rangle} \tag{5.25}$$

Como E_0 é a *energia do vácuo*, a soma (5.25) contem exponenciais que decaem quando $n \to \infty$ (com ϵ fixo). No limite, quando $n \to \infty$, apenas a exponencial $e^{-n\epsilon(\mathbf{E}_1-E_0)}$ contribui. Portanto, se o vácuo e o primeiro estado excitado são não degenerados, obtemos, nesse limite:

$$G(0,n) \longrightarrow \langle 0|\mathbf{S}_0|1\rangle e^{-n\epsilon(E_1-E_0)}\langle 1|\mathbf{S}_n|0\rangle \tag{5.26}$$

isto é:

$$\boxed{G(0,n) \longrightarrow \langle 0|\mathbf{S}_0|1\rangle\langle 1|\mathbf{S}_n|0\rangle e^{-\frac{n}{\xi}}} \tag{5.27}$$

recordando a definição do comprimento de correlação $\xi = \frac{1}{\epsilon(E_1-E_0)}$.

Em EQFT, o salto de energia $m = E_1 - E_0$ é a massa m do quanta do campo - é a energia de uma partícula em repouso. A relação entre a massa e o comprimento de correlação é pois:

$$\xi = \frac{1}{m\epsilon} \tag{5.28}$$

Quando $\xi \to \infty$, a massa $m \to 0$ (para ϵ constante). Por outras palavras os valores próprios $E_\alpha, \alpha \geq 2$, desaparecem no ponto crítico.

6 Tabela de analogias entre EQFT e Mecânica Estatística Clássica

QFT Euclideana	$\leftrightarrow$	**Mecânica Estatística Clássica**
Campos quânticos	$\leftrightarrow$	Variáveis de spin
Fonte	$\leftrightarrow$	Campo magnético (B-campo)
Acção Euclideana	$\leftrightarrow$	Energia de configuração
$\exp(-\Delta t H)$	$\leftrightarrow$	Matriz de Transferência no caso de interacções de alcance finito
Integral funcional (Feynman)	$\leftrightarrow$	Soma sobre configurações
Valor esperado do vácuo do campo	$\leftrightarrow$	Magnetização
Função 2-pontual a momento zero	$\leftrightarrow$	Susceptibilidae magnética
Massa física (energy gap)	$\leftrightarrow$	(comprimento de correlação)$^{-1}$
Teoria de massa nula	$\leftrightarrow$	Teoria crítica
Função $\mathcal{Z}$ geradora de funções de correlação	$\leftrightarrow$	Função de partição num campo B, dependente da posição
Função W geradora de funções conexas de correlação	$\leftrightarrow$	Energia livre num campo B, dependente da posição
Função geradora de vértices próprios	$\leftrightarrow$	Potencial termodinâmico, função da magnetização

References

[1] Le Bellac M., *"Quantum and Statistical Field Theory."* Oxford U.P., Inc., 1998.

[2] Binney J.J., Dowrick N.J., Fisher A.J., Newman M.E.J.,, *"The Theory of Critical Phenomena."* Oxford U.P., Inc., 1993.

[3] Kogut J.B., "An Introduction to Lattice Gauge Theory and Spin Systems". *Reviews of Modern Physics*, vol. 51, 1979, 650-714.

[4] Kadanoff L.P., *"Statistical Physics."*, World Scientific, 2000.

[5] Parisi G., *"Statistical Field Theory."*, Addison-Wesley, 1987.

[6] Thompson C.J., *"Mathematical Statistical Mechanics."*, Princeton U. Press, 1972.