Centro de Matemática da Universidade do Porto
Centro de Física do Porto

Curso Livre sobre Teoria de Campo

Análise de Fourier numa Rede

Peter Gothen*

30/03/2004

Aviso. Este texto é provisório e contém erros. Correcções e sugestões são benvindas.

1 Análise em redes finitas

O espaço de funções complexas numa rede. Consideremos uma rede cúbica (finita) Λ em d dimensões, com malha ε e lados L:

$$\Lambda = \varepsilon \mathbf{Z}^d / L\mathbf{Z}^d \ .$$

Para isto fazer sentido, é obviamente necessário que $\frac{L}{\varepsilon}$ seja um inteiro: de facto o número de pontos em cada direcção de coordenadas é $\frac{L}{\varepsilon}$ e portanto o número de pontos de Λ é $|\Lambda| = \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^d$. Vamos ainda supor que $\frac{L}{\varepsilon}$ é par, para podermos considerar a rede simétrica em torno de $0 \in \Lambda$, escolhendo coordenadas $x = (x_1, \ldots, x_d)$ tais que

$$-\frac{L}{2} \leqslant x_k < \frac{L}{2}$$

*Centro de Matemática da Universidade do Porto, financiado pela Fundação para a Ciência e a Tecnologia, no âmbito do Programa Operacional Ciência, Tecnologia e Inovação (POCTI) e do Programa Operacional Sociedade da Informação (POSI) do Quadro Comunitário de Apoio III (2000-2006), com fundos comunitários (FEDER) e fundos nacionais.

e cada x_k é um múltiplo de ε para $k = 1, \ldots, d$. O espaço de configurações (campos) será o conjunto de funções complexas definidas em Λ:

$$\Omega = \{f \colon \Lambda \to \mathbf{C}\} \ ,$$

por outras palavras, tomamos o espaço de chegada $\mathcal{T} = \mathbf{C}$.

A primeira observação trivial (mas fundamental) é que Ω é um espaço vectorial de *dimensão finita*. Para exibir uma base de Ω definimos primeiro funções δ_Λ por

$$\delta_\Lambda(x, y) = \varepsilon^{-d}\delta_{x,y} = \varepsilon^{-d} \begin{cases} 1 & \text{se } x = y \ , \\ 0 & \text{se } x \neq y \ . \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $\delta_{x,y}$ é o delta de Kronecker e o factor de ε^{-d} será explicado em breve. Para cada $x \in \Lambda$ definimos agora uma função $\delta_{\Lambda,x} \colon \Lambda \to \mathbf{C}$ da seguinte forma:

$$\delta_{\Lambda,x}(y) = \delta_\Lambda(x, y) \ . \tag{1.2}$$

Então temos para qualquer $f \colon \Lambda \to \mathbf{C}$ que

$$f(y) = \sum_{x \in \Lambda} f(x)\delta_\Lambda(x, y)\varepsilon^d \ , \tag{1.3}$$

para cada $y \in \Lambda$. Equivalentemente,

$$f = \sum_{x \in \Lambda} f(x)\delta_{\Lambda,x}\varepsilon^d \ . \tag{1.4}$$

Por outras palavras, as funções $\delta_{\Lambda,x}\varepsilon^d$ formam uma base do espaço vectorial $\Omega = \mathbf{C}^\Lambda$, e $f(x)$ é a x-ésima coordenada do vector $f \in \Omega$ nesta base. Assim Ω tem dimensão $|\Lambda| = \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^d$.

Para uma função $f \colon \Lambda \to \mathbf{C}$ definimos a *derivada discreta* por

$$d_\varepsilon f(x) = \big(d_{\varepsilon,1}f(x), \ldots, d_{\varepsilon,1}f(x)\big) \ , \tag{1.5}$$

onde a k-ésima derivada parcial (discreta) é

$$d_{\varepsilon,k}f(x) = \frac{f(x + \varepsilon e_k) - f(x)}{\varepsilon} \ . \tag{1.6}$$

(Aqui $\{e_1, \ldots, e_d\}$ é a base canónica de $\mathbf{R}^d$ e assim $\varepsilon e_k \in \Lambda$.)

Cálculo Integral. Podemos definir uma *medida de contagem* em Λ por

$$\mu(\{x\}) = \varepsilon^d \ , \tag{1.7}$$

para cada $x \in \Lambda$. O factor ε^d corresponde a interpretação de Λ como uma aproximação de malha ε a um contínuo. Então o integral sobre Λ de $f\colon \Lambda \to \mathbf{C}$ é a soma finita

$$\int_\Lambda f(x)dx = \sum_{x\in\Lambda} f(x)\varepsilon^d \ , \tag{1.8}$$

e a fórmula (1.3) pode ser escrita

$$f(y) = \int_\Lambda f(x)\delta_{\Lambda,y}(x)dx \tag{1.9}$$

Vamos agora introduzir um produto interno (hermiteano) em Ω por

$$\langle f, g\rangle = \sum_{x\in\Lambda} \overline{f(x)}g(x)\varepsilon^d = \int_\Lambda \overline{f(x)}g(x)dx \ , \tag{1.10}$$

onde $\overline{f(x)}$ significa a função complexa conjugada de $f(x)$. Note-se que este produto interno é antilinear na primeira variável e linear na segunda como é habitual na física, e que este produto interno é simplesmente o produto interno L^2 associado à medida μ definida em (1.7).

Fazendo o produto interno de duas funções δ definidas em (1.2) obtemos

$$\langle \delta_{\Lambda,x}, \delta_{\Lambda,y}\rangle = \delta_{x,y}\varepsilon^{-d} \ . \tag{1.11}$$

Portanto as funções $\{\delta_{\Lambda,x} \ | \ x \in \Lambda\}$ formam uma base ortogonal de Ω e as funções $\{\varepsilon^{d/2}\delta_{\Lambda,x} \ | \ x \in \Lambda\}$ formam uma base ortonormal.

Temos uma espécie de "Teorema Fundamental do Cálculo" discreto: se a dimensão de Λ é $d = 1$, entaõ

$$\int_\Lambda d_\varepsilon f dx = \sum_{x\in\Lambda} \frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}\varepsilon = f\left(\tfrac{L}{2}\right) - f\left(-\tfrac{L}{2}\right) \ , \tag{1.12}$$

porque a soma sobre Λ é telescópica. Como estamos a considerar uma rede periódica, temos $f\left(\frac{L}{2}\right) = f\left(-\frac{L}{2}\right)$ e logo

$$\int_\Lambda d_\varepsilon f dx = 0 \ . \tag{1.13}$$

Operadores lineares. Considere-se agora um operador linear $A\colon \Omega \to \Omega$. Os elementos da matriz de A são definidas pela fórmula

$$(Af)(x) = \int_\Lambda A(x,y)f(y)dy = \sum_{x\in\Lambda} A(x,y)f(y)\varepsilon^d \ . \tag{1.14}$$

Chamamos a $A(x,y)$ o *núcleo integral* do operador A. Note-se que os $A(x,y)$ são as entradas da matriz de A relativamente à base $\{\delta_{\Lambda,x}\}$ na primeira cópia de Ω e à base $\{\varepsilon^d\delta_{\Lambda,x}\}$ na segunda cópia de Ω (cf. (1.4)). Para $f = \delta_{\Lambda,y}$ tem-se

$$(A\delta_{\Lambda,y})(x) = \int_\Lambda A(x,z)\delta_{\Lambda,y}(z)dz = A(x,y) \tag{1.15}$$

e fazendo o produto interno de $A\delta_{\Lambda,y}$ com $\delta_{\Lambda,x}$ obtemos a expressão do elemento da matriz $A(x,y)$:

$$\langle\delta_{\Lambda,x}, A\delta_{\Lambda,y}\rangle = \int_\Lambda \delta_{\Lambda,x}(z)A(z,y)dz = A(x,y) \ . \tag{1.16}$$

Como um primeiro exemplo calculemos o núcleo integral de $A = d_\varepsilon\colon \Omega \to \Omega$ no caso $d = 1$:

$$\begin{aligned}
A(x,y) &= \langle\delta_{\Lambda,x}, d_\varepsilon\delta_{\Lambda,y}\rangle \\
&= \int_\Lambda \delta_{\Lambda,x}(z)d_\varepsilon\delta_{\Lambda,y}(z)dz \\
&= \int_\Lambda \delta_{\Lambda,x}(z)\varepsilon^{-1}\big(\delta_{\Lambda,y}(z+\varepsilon) - \delta_{\Lambda,y}(z)\big)dz \\
&= \varepsilon^{-1}\big(\delta_{\Lambda,y}(x+\varepsilon) - \delta_{\Lambda,y}(x)\big) \\
&= \varepsilon^{-1}\big(\delta_\Lambda(x+\varepsilon,y) - \delta_\Lambda(x,y)\big) \ ,
\end{aligned} \tag{1.17}$$

onde usámos que $\delta_{\Lambda,x}(y) = \delta_\Lambda(x,y)$.

Podemos também calcular $\langle f, Ag\rangle$ para duas funções $f, g \in \Omega$, usando (1.14):

$$\begin{aligned}
\langle f, Ag\rangle &= \int_\Lambda \overline{f(x)}(Ag)(x)\,dx \\
&= \int_\Lambda \big(\int_\Lambda \overline{f(x)}A(x,y)g(y)\,dy\big)\,dx \ .
\end{aligned} \tag{1.18}$$

O Laplaciano. Para definir o Laplaciano numa rede, introduzimos primeiro um operador $d^*_{\varepsilon,k}\colon \Omega \to \Omega$ fazendo

$$d^*_{\varepsilon,k}f(x) = \frac{f(x-\varepsilon e_k) - f(x)}{\varepsilon} \tag{1.19}$$

para $k = 1, \dots, d$.

Podemos considerar campos $f\colon \Lambda \to \mathbf{C}^m$ da forma $f = (f_1 \dots, f_m)$ onde cada $f_i \in \Omega$. A derivada $d_\varepsilon f = (d_{\varepsilon,1} f, \dots, d_{\varepsilon,d})$ é um exemplo de um tal campo com valores em $\mathbf{C}^d$. Podemos alargar a definição do produto interno a tais campos fazendo

$$\langle f, g\rangle = \int_\Lambda \left(\sum_{i=1}^m \overline{f_i(x)} g_i(x) \right) dx \ . \tag{1.20}$$

Defina agora $d^*\colon \{f\colon \Lambda \to \mathbf{C}^m\} \to \Omega$ por

$$f = (f_1, \dots, f_m) \mapsto d^*_{\varepsilon,1} f_1 + \dots + d^*_{\varepsilon,m} f_m \ . \tag{1.21}$$

Proposição 1.1. *Os operadores d_ε e d^*_ε são adjuntos:*

$$\langle f, d_\varepsilon g\rangle = \langle d^*_\varepsilon f, g\rangle \ . \tag{1.22}$$

Demonstração. É suficiente considerar o caso $d = 1$. Temos que

$$\langle f, d_\varepsilon g\rangle = \sum_{x\in\Lambda} \overline{f(x)} \varepsilon^{-1} \big(g(x+\varepsilon) - g(x) \big) \ ,$$

e

$$\langle d^*_\varepsilon f, g\rangle = \sum_{x\in\Lambda} \varepsilon^{-1} \big(\overline{f(x-\varepsilon)} - \overline{f(x)} \big) g(x) \ .$$

Logo é suficiente ver que

$$\sum_{x\in\Lambda} \overline{f(x)} g(x+\varepsilon) = \sum_{x\in\Lambda} \overline{f(x-\varepsilon)} g(x) \ ,$$

o que é claro pela periodicidade das funções f e g. □

O *Laplaciano*, $\Delta\colon \Omega \to \Omega$ é definido como o operador

$$\Delta = d^*_\varepsilon d\colon \Omega \to \Omega \ . \tag{1.23}$$

Mais explicitamente:

$$(\Delta f)(x) = \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^d \big(2f(x) - f(x+\varepsilon e_k) - f(x-\varepsilon e_k) \big) \ . \tag{1.24}$$

Note-se que

$$\langle f, \Delta f\rangle = \langle d_\varepsilon f, d_\varepsilon f\rangle \geqslant 0 \ , \tag{1.25}$$

ou seja, Δ é um operador positivo. Analogamente vemos que Δ é auto-adjunto:

$$\langle f, \Delta g\rangle = \langle \Delta f, g\rangle \ , \tag{1.26}$$

para $f, g \in \Omega$.

Podemos encontar o núcleo integral do Laplaciano da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
\Delta(x,y) &= \langle \delta_{\Lambda,x}, \Delta\delta_{\Lambda,y}\rangle \\
&= \int_\Lambda \delta_{\Lambda,x}(z)\Delta\delta_{\Lambda,y}(z)dz \\
&= \Delta\delta_{\Lambda,y}(x) \\
&= \frac{1}{\varepsilon^2}\sum_{k=1}^{d}\bigl(2\delta_\Lambda(x,y) - \delta_\Lambda(x+\varepsilon e_k, y) - \delta_\Lambda(x-\varepsilon e_k, y)\bigr) \ .
\end{aligned} \tag{1.27}$$

2 Análise de Fourier numa rede

A análise de Fourier pode ser vista como uma mudança de base em Ω. Para isso vamos considerar a *rede dual* de Λ, definida por

$$\Lambda^* = \frac{2\pi}{L}\mathbf{Z}^d / \frac{2\pi}{\varepsilon}\mathbf{Z}^d \ .$$

A rede Λ^* tem lados $\frac{2\pi}{\varepsilon}$ e malha $\frac{2\pi}{L}$ e logo o número de pontos de Λ^* é

$$|\Lambda^*| = \left(\frac{(2\pi)/\varepsilon}{(2\pi)/L}\right)^d = \left(\frac{L}{\varepsilon}\right)^d = |\Lambda| \ , \tag{2.1}$$

o mesmo que o número de pontos de Λ. Usaremos coordenadas $p = (p_1, \ldots, p_n)$ em Λ^* que satisfazem

$$-\frac{\pi}{\varepsilon} \leqslant p_k < \frac{\pi}{\varepsilon} \ .$$

Para cada $p \in \Lambda^*$ defina-se uma função $\phi_p \colon \Lambda \to \mathbf{C}$ por

$$\phi_p(x) = e^{\mathrm{i}p\cdot x} \ , \tag{2.2}$$

onde $p \cdot x = p_1x_1 + \cdots + p_dx_d$ para $p \in \Lambda^*$ e $x \in \Lambda$.

Proposição 2.1. *As funções $\{\phi_p \colon \Lambda \to \mathbf{C} \mid p \in \Lambda^*\}$ são ortogonais e a norma de ϕ_p é $\|\phi_p\| = \sqrt{L^d}$.*

Demonstração. É suficiente considerar o caso $d = 1$. Note que para $p, q \in \Lambda^*$ se tem $q - p = m\frac{2\pi}{L}$ para um inteiro m com $|m| < \frac{L}{\varepsilon}$. Para $m \neq 0$ temos entaõ

$$\begin{aligned}
\langle \phi_p, \phi_q \rangle &= \sum_{x\in\Lambda} e^{-\mathrm{i}px} e^{\mathrm{i}qx} \varepsilon \\
&= \sum_{n=0}^{(L/\varepsilon)-1} e^{\mathrm{i}(q-p)n\varepsilon} \varepsilon \\
&= \frac{L}{\varepsilon} \varepsilon \frac{(e^{\mathrm{i}(q-p)\varepsilon})^{L/\varepsilon} - 1}{e^{\mathrm{i}(q-p)\varepsilon} - 1} && \text{[série geométrica]} \\
&= L \frac{e^{2\pi \mathrm{i} m} - 1}{e^{2\pi \mathrm{i} m\varepsilon/L} - 1} \\
&= 0 \ .
\end{aligned}$$

Para $m = 0$ obtém-se

$$\langle \phi_p, \phi_p \rangle = \sum_{x\in\Lambda} e^{-\mathrm{i}px} e^{\mathrm{i}px} \varepsilon = \frac{L}{\varepsilon} \varepsilon = L \ .$$

□

Corolário 2.2. *As funções* $\{\phi_p \colon \Lambda \to \mathbf{C} \ \mid \ p \in \Lambda^*\}$ *formam uma base ortogonal de* Ω.

Demonstração. Pela Proposição as funções ϕ_p são linearmente independentes. Como o número destas funções é $|\Lambda^*| = |\Lambda|$, que é igual à dimensão de Ω, concluimos que formam uma base. □

Vamos agora escrever uma função $f \colon \Lambda \to \mathbf{C}$ na base $\{\phi_p \ \mid \ p \in \Lambda^*\}$:

$$f = \sum_{p\in\Lambda^*} \hat{f}(p) \phi_p L^{-d} \ , \tag{2.3}$$

onde definimos a *transformada de Fourier discreta* de f por

$$\hat{f}(p) = \langle \phi_p, f \rangle = \sum_{x\in\Lambda} f(x) e^{-\mathrm{i}p\cdot x} \varepsilon^d \ . \tag{2.4}$$

Na notação integral (2.4) fica

$$\hat{f}(p) = \int_\Lambda e^{-\mathrm{i}p\cdot x} f(x) dx \ . \tag{2.5}$$

O espaço de Fourier e inversão. *O espaço de Fourier* é o espaço de funções complexas definidas em Λ^*:

$$\Omega' = \{\hat{\phi}\colon \Lambda^* \to \mathbf{C}\} \ . \tag{2.6}$$

Recorde-se que a malha de Λ^* é $\frac{2\pi}{L}$ e logo seria natural definir o integral em Ω' por $\int_{\Lambda^*} \hat{\phi}(p)dp = \sum_{p\in\Lambda^*} \hat{\phi}(p) \left(\frac{2\pi}{L}\right)^d$. No entanto vai ser mais conveniente definir

$$\int_{\Lambda^*} \hat{\phi}(p)dp = \sum_{p\in\Lambda^*} \hat{\phi}(p)L^{-d} \ , \tag{2.7}$$

para $\hat{\phi}\colon \Lambda^* \to \mathbf{C}$. Com esta definição (2.3) é equivalente à *fórmula de inversão*,

$$f(x) = \int_{\Lambda^*} e^{\mathrm{i}p\cdot x}\hat{f}(p)dp \ . \tag{2.8}$$

(Note-se a ausência do facto $(2\pi)^{-d}$ no segundo membro.) Podemos então afirmar que a transformação de Fourier é um isomorfismo linear

$$\begin{aligned} \Phi\colon \{f\colon \Lambda \to \mathbf{C}\} &\to \{\hat{f}\colon \Lambda^* \to \mathbf{C}\} \ , \\ f &\mapsto \hat{f} \end{aligned} \tag{2.9}$$

cujo inverso é definido por (2.8).

A título de exemplo, vamos calcular a transformada de Fourier de $\delta_{\Lambda,x}$:

$$\begin{aligned} \hat{\delta}_{\Lambda,x}(p) &= \int_{\Lambda} e^{-\mathrm{i}p\cdot y}\delta_{\Lambda,x}(y)dy \\ &= e^{-\mathrm{i}p\cdot x} \ . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Também podemos facilmente calcular a transformada de Fourier de ϕ_p:

$$\hat{\phi}_p = \delta_{\Lambda^*,p} \ . \tag{2.11}$$

O produto interno em $\Omega' = \{\hat{\phi}\colon \Lambda^* \to \mathbf{C}\}$ é

$$\langle\hat{\phi},\hat{\psi}\rangle = \int_{\Lambda^*} \overline{\hat{\phi}(p)}\hat{\psi}(p)dp = \sum_{p\in\Lambda^*} \overline{\hat{\phi}(p)}\hat{\psi}(p)L^{-d} \ . \tag{2.12}$$

Definam-se funções $\delta_{\Lambda^*,p}\colon \Lambda \to \mathbf{C}$ por

$$\delta_{\Lambda^*,p}(q) = \delta_{\Lambda^*}(p,q) = L^d\delta_{p,q} \ . \tag{2.13}$$

Estas funções têm a propriedade

$$\hat{\phi}(p) = \int_{\Lambda^*} \hat{\phi}(q)\delta_{\Lambda^*,p}(q)dq \ . \tag{2.14}$$

Definindo $\hat{\psi}_x \colon \Lambda^* \to \mathbf{C}$ por

$$\hat{\psi}_x(p) = e^{-\mathrm{i}p\cdot x} \ , \tag{2.15}$$

tem-se

$$\langle \hat{\psi}_x, \hat{\psi}_y \rangle = \varepsilon^{-d}\delta_{x,y} = \delta_\Lambda(x,y) \tag{2.16}$$

para $x, y \in \Lambda$. Este resultado é análogo ao da Proposição 2.1, que podemos escrever como

$$\langle \phi_p, \phi_q \rangle = \delta_{\Lambda^*}(p,q) \ . \tag{2.17}$$

Recordando (1.11) vemos então que a transformada de Fourier envia a base ortonormal $\{\varepsilon^{d/2}\delta_{\Lambda,x}\}$ de Ω na base ortonomal $\{\varepsilon^{d/2}\hat{\psi}_x\}$ de Ω'. Resumindo estes resultados temos a seguinte Proposição.

Proposição 2.3. *A transformação de Fourier é um isomorfismo unitário entre Ω e Ω'. Em particular, para $f, g \colon \Lambda \to \mathbf{C}$ tem-se $\langle f, g\rangle_\Lambda = \langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{\Lambda^*}$, ou, equivalentemente,*

$$\int_\Lambda \overline{f(x)}g(x)dx = \int_{\Lambda^*} \overline{\hat{f}(p)}\hat{g}(p)dp \ . \tag{2.18}$$

O núcleo integral de um operador no espaço de Fourier. Seja $A \colon \Omega \to \Omega$ um operador linear. Então o operador correspondente $\hat{A} \colon \Omega' \to \Omega'$ no espaço de Fourier é definido pelo diagrama comutativo

$$\begin{array}{ccc} \Omega & \xrightarrow{A} & \Omega \\ {\scriptstyle\Phi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\Phi}\big\downarrow \\ \Omega' & \xrightarrow{\hat{A}} & \Omega' \ , \end{array} \tag{2.19}$$

onde $\Phi \colon \Omega \to \Omega'$ é a transformação de Fourier. Por outras palavras

$$\widehat{Af} = \hat{A}(\hat{f}) \ , \tag{2.20}$$

para $f \colon \Lambda \to \mathbf{C}$. O núcleo integral (cf. (1.14)) de $\hat{A} \colon \Omega' \to \Omega'$ é definida pela fórmula

$$(\hat{A}\hat{\phi})(p) = \int_{\Lambda^*} \hat{A}(p,q)\hat{\phi}(q)\, dq \ , \tag{2.21}$$

e, analogamente a (1.16), temos

$$\hat{A}(p,q) = \langle \delta_{\Lambda^*,p}, \hat{A}\delta_{\Lambda^*,q} \rangle \ . \tag{2.22}$$

O cálculo de $\hat{A}(p,q)$ a partir do núcleo integral $A(x,y)$ de A faz-se aproveitando o facto (2.11) que $\delta_{\Lambda^*,p} = \hat{\phi}_p$:

$$\begin{aligned} \hat{A}(p,q) &= \langle \delta_{\Lambda^*,p}, \hat{A}\delta_{\Lambda^*,q} \rangle \\ &= \langle \hat{\phi}_p, \hat{A}\hat{\phi}_q \rangle \\ &= \langle \phi_p \ , A\phi_q \\ &= \int_\Lambda \Big(\int_\Lambda \overline{\phi_p(x)} A(x,y) \phi_q(y) \, dy \Big) \, dx \\ &= \int_\Lambda \Big(\int_\Lambda e^{-\mathrm{i}p\cdot x} A(x,y) e^{\mathrm{i}q\cdot y} \, dy \Big) \, dx \ . \end{aligned} \tag{2.23}$$

Por exemplo, no caso $d = 1$ podemos tomar $A = d_\varepsilon \colon \Omega \to \Omega$. Neste caso obtemos, usando (1.17), que

$$\begin{aligned} \hat{A}(p,q) &= \int_\Lambda \Big(\int_\Lambda e^{-\mathrm{i}p\cdot x} \varepsilon^{-1} \big(\delta_\Lambda(x+\varepsilon, y) - \delta_\Lambda(x,y) \big) e^{\mathrm{i}q\cdot y} \, dy \Big) \, dx \\ &= \varepsilon^{-1} \int_\Lambda e^{-\mathrm{i}p\cdot x} \big(e^{\mathrm{i}q\cdot(x+\varepsilon)} - e^{\mathrm{i}q\cdot x} \big) \, dx \\ &= \frac{e^{\mathrm{i}\varepsilon q} - 1}{\varepsilon} \langle \phi_p, \phi_q \rangle \\ &= \frac{e^{\mathrm{i}\varepsilon q} - 1}{\varepsilon} \delta_{\Lambda^*}(p,q) \ . \end{aligned} \tag{2.24}$$

Também podemos encontrar o núcleo integral do Laplaciano $\Delta \colon \Omega \to \Omega$ no espaço de Fourier, usando (1.27):

$$\hat{\Delta}(p,q) = \frac{2}{\varepsilon^2} \sum_{k=1}^{d} (1 - \cos(\varepsilon p_k)) \delta_{\Lambda^*}(p,q) \ . \tag{2.25}$$

Os limites do contínuo e termodinâmico. O limite do contínuo é o limte $\varepsilon \to 0$ e o limite termodinâmico é o limite $L \to \infty$. Nestes limites a teoria descrita atrás torna-se a análise de Fourier clássica. Os resultados enunciados mantêm-se válidos, se correctamente interpretados e impondo restrições na(s) classe(s) de funções(s) Ω e/ou Ω'.

Por exemplo, no limite do contínuo $\varepsilon \to 0$ a rede $\Lambda = \varepsilon\mathbf{Z}^d / L\mathbf{Z}^d$ torna-se um toro $T = \mathbf{R}^d / L\mathbf{Z}^d$, e a rede dual fica uma rede infinita (numerável!) $\Lambda^* =$

$\frac{2\pi}{L}\mathbf{Z}^d$, de malha $\frac{2\pi}{L}$. Para $\varepsilon > 0$, escreva $\Lambda_\varepsilon = \Lambda = \varepsilon\mathbf{Z}^d/L\mathbf{Z}^d$. Podemos então considerar as funções $f\colon \Lambda \to \mathbf{C}$ como restrições de funções $f\colon \mathbf{R}^d/L\mathbf{Z}^d \to \mathbf{C}$. Para uma função $f \in L^2(T, \mathbf{C})$ tem-se então que

$$\int_T f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{x\in\Lambda_\varepsilon} f(x)\varepsilon^d = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\Lambda_\varepsilon} f(x)dx \ , \tag{2.26}$$

porque o integral sobre T é o limite de somas Riemannianas. Os limites para $\varepsilon \to 0$ dos nossos resultados discretos são os teoremas clássicos sobre séries de Fourier. Por exemplo, para $f \in L^2(T, \mathbf{C})$ tem-se que

$$f(x) = L^{-d} \sum_{p\in\Lambda^*} \hat{f}(p)e^{\mathrm{i}p\cdot x} \ , \tag{2.27}$$

onde a igualdade significa convergência em L^2 e os coeficientes de Fourier de f são definidos por

$$\hat{f}(p) = \int_T e^{-\mathrm{i}p\cdot x} f(x)dx \ . \tag{2.28}$$

Da mesma forma, o resultado (Proposição 2.3) que a transformação de Fourier é unitária, corresponde no limite ao Teorema de Parseval:

$$\int_T |f(x)|^2 dx = L^{-d} \sum_{p\in\Lambda^*} |\hat{f}(p)|^2 \ . \tag{2.29}$$

O limite termodinâmico $L \to \infty$ é análogo ao limite do contínuo, trocando os papéis de Λ e Λ^*. Assim este limite também corresponde à teoria das séries de Fourier.

Finalmente podemos considerar os limites $\varepsilon \to 0$ e $L \to \infty$ simultaneamente. Neste caso tanto Λ como Λ^* tornam-se contínuos $\mathbf{R}^d$ e a teoria limite é a transformação de Fourier clássica: para funções $f\colon \mathbf{R}^d \to \mathbf{C}$ suficientemente bem comportadas tem-se

$$f(x) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbf{R}^d} e^{\mathrm{i}p\cdot x} \hat{f}(p)\, dp \ , \tag{2.30}$$

com a transformada de Fourier definida por

$$\hat{f}(p) = \int_{\mathbf{R}^d} e^{-\mathrm{i}p\cdot x} f(x)\, dx \ . \tag{2.31}$$

Os outros resultados deste texto também têm versões analíticas no limite. Convém sublinhar que estes resultados analíticos são de demonstração muito mais delicada do que os resultados elementares aqui apresentados no caso discreto, uma vez que envolvem questões de convergência.

Departamento de Matemática Pura
Faculdade de Ciências da Universidade do Porto
Rua do Campo Alegre, 687
4169-007 Porto – Portugal
E-mail: pbgothen@fc.up.pt