
Dep. Matemática Pura. FCUP

Geometria Simpléctica¹

Resumo das aulas teóricas

Mestrado em Matemática - Fundamentos e Aplicações

Ano lectivo de 2004/05

João Nuno Tavares

Ficheiro pdf acessível em [http:
cmup/fc.up.pt/cmup/cv](http://cmup.fc.up.pt/cmup/cv)

¹*simpléctico* do grego *symplektikós*, “que serve para ligar”.

ÍNDICE:

1	Variedades Simpléticas	2
1.1	Preliminares de álgebra linear	2
1.2	Subvariedades integrais. Teorema de Darboux	6
1.3	Estrutura simplética canónica em $M = T^*Q$	9
1.4	Estrutura simplética em $M = TQ$, onde (Q, g) é uma variedade Riemanniana	10
1.5	Sistemas Hamiltonianos	11
1.6	Parêntesis de Poisson	12
1.7	Sistemas Hamiltonianos de tipo mecânico	14
1.8	Sistemas Hamiltonianos com constrangimentos	15
1.8.1	Exemplo. Fluxo geodésico numa esfera	16
1.8.2	Exemplo. Pêndulo esférico	18
1.8.3	Exemplo. Extensão do fluxo geodésico numa superfície	18
1.8.4	Exemplo. Geodésicas num elipsóide	23
1.9	Sistemas completamente integráveis	27
1.9.1	Sistemas com um grau de liberdade	32
1.10	Sistemas mecânicos com simetria. Aplicação momento	34
1.10.1	Exemplo. O Problema de Kepler	36
1.10.2	Geodésicas em superfícies de revolução	37
2	Princípios Variacionais	41
2.1	O problema clássico do cálculo de variações	41
2.1.1	Exemplo. A braquistócrona	43
2.1.2	Exemplo. Geodésicas no semiplano de Poincaré	44
2.2	Transformada de Legendre. Equações canónicas	45
2.3	Sistemas mecânicos conservativos	49
2.3.1	Exemplo. Oscilador harmónico	50
2.3.2	Exemplo. Movimento num campo central	51
2.4	A forma de Poincaré-Cartan	54

2.5	Problema com extremidades móveis. Condições de transversalidade	57
2.6	Um princípio variacional para sistemas Hamiltonianos. Princípio de Maupertuis	60
2.7	Os princípios variacionais de Jacobi e de Fermat. Analogia óptico-mecânica	64
3	A função de acção. Teoria de Hamilton-Jacobi	67
3.1	A função de acção S . Equação de Hamilton-Jacobi $S_t + H(t, q, S_q) = 0$	67
3.1.1	Equação H-J para sistemas mecânicos conservativos	70
3.1.2	A acção para uma partícula livre	71
3.1.3	A acção para uma partícula num campo constante	72
3.1.4	Equação H-J para o oscilador harmónico	73
3.2	Transformações canónicas. Método de Hamilton	74
3.3	Método de Jacobi para integrar as equações canónicas de Hamilton. Teorema de Jacobi	79
3.4	Transformações canónicas. Discussão geométrica	82
3.5	Discussão geométrica da equação de Hamilton-Jacobi reduzida	87

FORMULÁRIO

- $i_X(\omega)(X_2, \dots, X_k) \stackrel{\text{def}}{=} \omega(X, X_2, \dots, X_k)$
- $i_X(f) = 0 \quad \forall f \in C^\infty(M)$
- $i_X(\theta) = \theta(X) \quad \forall \theta \in \Omega^1(M)$
- $i_X(\omega \wedge \eta) = i_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge i_X(\eta)$
- $L_X(f) = Xf \quad \forall f \in C^\infty(M)$
- $L_X(df) = d(Xf) \quad \forall f \in C^\infty(M)$
- $L_X(\omega \wedge \eta) = L_X(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge L_X(\eta)$
- $L_f X \omega = f L_X \omega + df \wedge i_X \omega$
- $[L_X, L_Y] \omega = L_{[X, Y]} \omega$
- $i_{[X, Y]} = [L_X, i_Y]$
- $L_X i_X \omega = i_X L_X \omega$
- $(L_X \omega)(X_1, \dots, X_k) = X \omega(X_1, \dots, X_k) - \sum_{i=1}^k \omega(X_1, \dots, [X, X_i], \dots, X_k)$
- $L_X \omega = (d i_X + i_X d) \omega$ **Fórmula de Cartan**
-

$$(d\omega)(X_1, \dots, X_{k+1}) = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i+1} X_i \omega(X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, X_{k+1}) + \\ - \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1})$$

- $d\theta(X, Y) = X\theta(Y) - Y\theta(X) - \theta([X, Y]) \quad \forall X, Y \in \mathfrak{X}(M), \forall \theta \in \Omega^1(M)$
- $d(\omega \wedge \eta) = d\omega \wedge \eta + (-1)^{\deg \omega} \omega \wedge d\eta$
- $df(X) = Xf$
- $d^2\omega = 0$
- $[L_X, d] = L_X d - d L_X = 0$
- $\varphi^* d\omega = d\varphi^* \omega$
- $\varphi^*(i_X \omega) = i_{\varphi^* X}(\varphi^* \omega)$ onde φ é um difeomorfismo
- $\varphi^*(L_X \omega) = L_{\varphi^* X}(\varphi^* \omega)$ onde φ é um difeomorfismo

Capítulo 1

Variedades Simpléticas

1.1 Preliminares de álgebra linear

Seja $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma 2-forma exterior (i.e., uma forma bilinear alternada) num espaço vectorial real de dimensão finita. O núcleo $\ker \omega$ é constituído por todos os vectores $u \in V$ que são ω -ortogonais a todos os vectores de V :

$$\ker \omega = \{u \in V : \omega(u, v) = 0, \forall v \in V\}$$

É claro que $\ker \omega$ coincide com o núcleo da aplicação linear:

$$\begin{aligned} \Phi_\omega : V &\longrightarrow V^* \\ u &\longmapsto i_u \omega = \omega(u, \cdot) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

onde $i_u \omega$ é a forma linear definida por $(i_u \omega)(v) = \omega(u, v)$. Portanto $\ker \omega$ é um subespaço de V . Quando $\ker \omega = \{0\}$, a aplicação Φ_ω é um isomorfismo e a forma ω diz-se **não degenerada** ou uma **forma simplética** em V .

► **Definição 1.1** ... Um espaço vectorial simplético é um par (V, ω) , onde V é um espaço vectorial¹ e ω uma 2-forma exterior não degenerada. ■.

Em breve veremos que a dimensão de V tem que ser par. Seja $\{e_i\}$ uma base para V e $\{e^i\}$ a correspondente base dual para V^* , de tal forma que $e^i(e_j) = \delta_j^i$. Então a matriz de Φ_ω relativamente a essas bases é a matriz de Gram $[\omega_{ij}]$, onde $\omega_{ij} = \omega(e_i, e_j)$. De facto $\Phi_\omega(e_i) = \omega_{ij} e^j$. O **rank** da forma ω , $\text{rank } \omega$, é, por definição, o rank da matriz $[\omega_{ij}]$, isto é, a dimensão de $\text{im } \Phi_\omega = \Phi_\omega(V)$:

$$\text{rank } \omega = \dim \Phi_\omega(V) \tag{1.1.2}$$

Portanto ω é não degenerada sse $\text{rank } \omega$ é máximo, isto é, igual à $\dim V^* = \dim V$.

► **Proposição 1.1** ... Seja V um espaço vectorial real de dimensão N , e ω uma 2-forma exterior em V . Então $\text{rank } \omega = 2n$ para algum inteiro n e existe uma base ordenada $\{e_i\}_{i=1, \dots, N}$ para V , com base dual $\{e^i\}_{i=1, \dots, N}$ para V^* , tal que:

$$\omega = \sum_{i=1}^n e^i \wedge e^{n+i} \tag{1.1.3}$$

¹Neste curso, apenas consideramos espaços vectoriais de dimensão finita.

ou, de forma equivalente, relativamente à qual a matriz de Gram de ω é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1_n & 0 \\ -1_n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.1.4)$$

- **Dem.:** Escolhamos vectores não nulos $e_1, e_{n+1} \in V$, tais que $\omega(e_1, e_{n+1}) \neq 0$, o que é possível se $\omega \neq 0$. Multiplicando e_1 por um escalar podemos supôr que $\omega(e_1, e_{n+1}) = 1$. Como $\omega(e_1, e_1) = 0 = \omega(e_{n+1}, e_{n+1})$, a matriz de ω , restrita ao plano $S = \text{span}\{e_1, e_{n+1}\}$ é:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Consideremos agora o ω -ortogonal S^\perp , de S :

$$S^\perp = \{v \in V : \omega(v, s) = 0, \forall s \in S\}$$

É claro que $S^\perp \cap S = \{0\}$. Por outro lado, $S^\perp + S = V$. De facto, se $v \in V$, então:

$$v - \omega(v, e_{n+1})e_1 + \omega(v, e_1)e_{n+1} \in S^\perp$$

Portanto $S^\perp \oplus S = V$. Podemos então repetir o processo para S^\perp . Se $\omega|_S \neq 0$ escolhemos e_2 e e_{n+2} tais que $\omega(e_2, e_{n+2}) = 1$, e continuámos assim indutivamente. ■

Se $v \in V$ se escreve como combinação linear na base $\{e_i\}$, referida no teorema:

$$v = x^1 e_1 + \cdots + x^n e_n + y^1 e_{n+1} + \cdots + y^n e_{2n} + z^{2n+1} e_{2n+1} + \cdots + z^N e_N$$

e anàlogamente para $v' \in V$, então:

$$\omega(v, v') = \sum_{i=1}^n (x^i y'^i - y^i x'^i) \quad (1.1.5)$$

Quando ω é não degenerada, $\text{rank } \omega$ é máximo e igual à dimensão de V , e portanto neste caso $\dim V$ tem que ser par. Em particular, a dimensão de um espaço vectorial simpléctico é par, como já tínhamos afirmado.

► **Corolário 1.1** ... *Um espaço vectorial simpléctico (V, ω) admite sempre uma base simpléctica, isto é, uma base $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$ que satisfaz as condições seguintes:*

$$\omega(e_i, e_j) = 0 = \omega(f_i, f_j) \quad e \quad \omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$$

Portanto a matriz de ω nessa base é:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{bmatrix}$$

■

► **Exemplos 1.1** (i). $V = W \times W^*$, onde W é um espaço vectorial real de dimensão finita, e ω é a forma simpléctica em V , definida por:

$$\omega((w_1, \alpha_1), (w_2, \alpha_2)) \stackrel{\text{def}}{=} \alpha_2(w_1) - \alpha_1(w_2)$$

onde $w_1, w_2 \in W$, $\alpha_1, \alpha_2 \in W^*$. Se $\{e_1, \dots, e_n\}$ é uma base para W e se $\{e^1, \dots, e^n\}$ é a respectiva base dual, então a matriz de ω na base $\{(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), (0, e^1), \dots, (0, e^n)\}$ de V , é a matriz:

$$J = \begin{bmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{bmatrix}$$

(ii). $V = W \times W$, onde W é um espaço vectorial real de dimensão finita munido de um produto interno \cdot , e ω é a forma simpléctica em V , definida por:

$$\omega((w_1, w_2), (z_1, z_2)) \stackrel{\text{def}}{=} w_1 \cdot z_2 - w_2 \cdot z_1$$

onde $w_1, w_2, z_1, z_2 \in W$. ■

Quando $\dim V$ é ímpar então $\ker \omega \neq \{0\}$. Um vector não nulo $u \in \ker \omega$ diz-se um **vector característico** da forma ω . Neste caso ω diz-se **não singular**, se $\dim \ker \omega$ é a menor possível, isto é, igual a 1. Portanto, se ω é uma 2-forma exterior não singular num espaço vectorial de dimensão ímpar, todos os seus vectores característicos pertencem a uma recta, unívocamente determinada pela forma ω , a que chamamos a **recta característica** de ω .

► **Definição 1.2** ... Seja (V, ω) um espaço vectorial simpléctico, e S um subespaço de V . Defina-se o **ortogonal simpléctico**, S^\perp , de S , através de:

$$S^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{v \in V : \omega(v, s) = 0, \forall s \in S\} \quad (1.1.6)$$

e o **anulador**, S^o , de S , através de:

$$S^o \stackrel{\text{def}}{=} \{\alpha \in V^* : \alpha(s) = 0, \forall s \in S\} \quad (1.1.7)$$

► **Proposição 1.2** ... Seja (V, ω) um espaço vectorial simpléctico de dimensão $2n$. Então:

$$\begin{aligned} 1. \quad & S \subseteq T \Rightarrow S^\perp \supseteq T^\perp \\ 2. \quad & \Phi_\omega(S^\perp) = S^o \\ 3. \quad & \dim V = \dim S + \dim S^\perp \\ 4. \quad & S = (S^\perp)^\perp \\ 5. \quad & S^\perp \cap T^\perp = (S + T)^\perp \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

• **Dem.:** 1. Se $v \in T^\perp$, então $\omega(v, t) = 0, \forall t \in T$, o que implica que $\omega(v, s) = 0, \forall s \in T$, uma vez que $S \subseteq T$, e portanto $v \in S^\perp$.

2. Se $\alpha \in \Phi_\omega(S^\perp)$, então existe $v \in S^\perp$, tal que $\omega(v, \cdot) = \alpha$. Portanto $\forall s \in S, 0 = \omega(v, s) = \alpha(s)$, isto é, $\alpha \in S^o$. Reciprocamente, se $\alpha \in S^o \subseteq V^*$, então existe $v \in V$ tal que $\Phi_\omega(v) = \omega(v, \cdot) = \alpha$, já que Φ_ω é bijectiva. Como $\alpha \in S^o$ tem-se que $\forall s \in S, 0 = \alpha(s) = \omega(v, s)$, o que significa que $v \in S^\perp$.

3. Como é sabido:

$$\dim V = \dim S + \dim S^\circ$$

Como $\Phi_\omega(S^\perp) = S^\circ$ e Φ_ω é isomorfismo, $\dim S^\circ = \dim S^\perp$, donde se deduz 3.

4. Seja $s \in S$. Então $\forall v \in S^\perp$ tem-se que $\omega(s, v) = 0$ e portanto $s \in (S^\perp)^\perp$. Como $\dim (S^\perp)^\perp + \dim S^\perp = \dim V = \dim S^\perp + \dim S$, vem que $S = (S^\perp)^\perp$.

5. Como S e T são subespaços de $S + T$, por 1. vem que $(S + T)^\perp \subseteq S^\perp \cap T^\perp$. Mas:

$$\begin{aligned} \dim V &= \dim S^\perp + \dim T^\perp - \dim (S^\perp \cap T^\perp) \\ &= \dim V - \dim S + \dim V - \dim T - \dim (S^\perp \cap T^\perp) \end{aligned} \quad (1.1.9)$$

isto é $\dim V = \dim S + \dim T + \dim (S^\perp \cap T^\perp)$. Mas:

$$\dim V = \dim (S + T) + \dim (S + T)^\perp \leq \dim S + \dim T + \dim (S^\perp \cap T^\perp)$$

donde $\dim (S^\perp \cap T^\perp) \leq \dim (S + T)^\perp$, e, como $(S + T)^\perp \subseteq (S^\perp \cap T^\perp)$, concluímos que $(S + T)^\perp = (S^\perp \cap T^\perp)$. ■

► **Definição 1.3** ... Seja (V, ω) um espaço vectorial simpléctico, e S um subespaço de V . S diz-se:

$$\begin{array}{ll} \text{isotrópico} & \text{se } S \subseteq S^\perp \text{ isto é, } \omega|_{S \times S} \equiv 0 \\ \text{coisotrópico} & \text{se } S \supseteq S^\perp \\ \text{Lagrangeano} & \text{se } S = S^\perp \\ \text{simpléctico} & \text{se } S \cap S^\perp = \{0\} \end{array} \quad (1.1.10)$$

► **Proposição 1.3** ... Seja (V, ω) um espaço vectorial simpléctico de dimensão $2n$. Então:

1. S é simpléctico sse $\omega|_{S \times S}$ é não degenerada (em particular, $\dim S$ é par).
 2. Se S é simpléctico também o é S^\perp .
 3. Todo o subespaço isotrópico está contido num subespaço Lagrangeano.
- (1.1.11)

• **Dem.:**

1. Suponhamos que para algum $s' \in S$ não nulo, $\Phi_\omega(s') = \omega(s', \cdot) = 0 \in V^*$. Então $\forall s \in S, 0 = \omega(s', s)$, isto é, $s' \in S^\perp$. Logo $0 \neq s' \in S \cap S^\perp$. Reciprocamente, se $s' \in S \cap S^\perp$, então $\forall s \in S, 0 = \omega(s', s)$, i.e., $\Phi_\omega(s') = \omega(s', \cdot) = 0 \in V^*$. Como $\omega|_{S \times S}$ é não degenerada, concluímos que $s' = 0$ e portanto $S \cap S^\perp = \{0\}$.

2. Como S é simpléctico $S \cap S^\perp = \{0\} = (S^\perp)^\perp \cap S^\perp =$ e portanto S^\perp é simpléctico.

3. Seja S um subespaço isotrópico de V . Se $S = S^\perp$, S é Lagrangeano e a prova termina. Se $S \subsetneq S^\perp$, existe um vector não nulo u em $S^\perp - S$. Se $U = \mathbb{R}u$ então U é isotrópico, $U \subseteq U^\perp$ e, como $U \subseteq S^\perp$, deduzimos que $U \subseteq U^\perp \cap S^\perp$. Mas, por outro lado, $U \subseteq S^\perp$ implica que $S \subseteq U^\perp$ e, como U é isotrópico, $U \subseteq U^\perp$, logo $S \subseteq U^\perp \cap S^\perp$. Portanto:

$$U + S \subseteq U^\perp \cap S^\perp = (U + S)^\perp$$

isto é, $U + S$ é isotrópico. A prova continua indutivamente até construir um subespaço Lagrangeano que contenha S . ■

1.2 Subvariedades integrais. Teorema de Darboux

► **Definição 1.4** ... Seja M uma variedade de dimensão m e $\omega \in \Omega^2(M)$ uma 2-forma fechada de rank constante. Defina-se o **fibrado característico** \mathcal{C}_ω de ω através de:

$$\mathcal{C}_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \{X \in \mathfrak{X}(M) : i_X\omega = 0\} \quad (1.2.1)$$

O fibrado característico \mathcal{C}_ω , é portanto igual ao $\ker \omega_x$, em cada ponto $x \in M$. Um **campo de vectores característico** é um campo $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $i_X\omega = 0$, isto é, tal que $X(x) \in \mathcal{C}_\omega(x) = \ker \omega_x$, $\forall x \in M$.

Se o rank de ω é constante, então \mathcal{C}_ω é um subfibrado de TM , ou, por outras palavras, é uma distribuição em M , chamada a **distribuição característica** de ω .

► **Proposição 1.4** ... A distribuição característica \mathcal{C}_ω de uma 2-forma fechada $\omega \in \Omega^2(M)$ de rank constante, é involutiva:

$$[\mathcal{C}_\omega, \mathcal{C}_\omega] \subset \mathcal{C}_\omega$$

- **Dem.:** Como ω tem rank constante, a dimensão de $\mathcal{C}_\omega(x)$ é também constante, $\forall x \in M$, e portanto \mathcal{C}_ω é uma distribuição. Sejam X, Y campos de vectores característicos. Então:

$$\begin{aligned} i_{[X,Y]}\omega &= [L_X, i_Y]\omega \\ &= L_X(i_Y\omega) - i_Y(L_X\omega) \\ &= -i_Y(L_X\omega) \\ &= i_Y(i_Xd\omega + d(i_X\omega)) = 0 \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

e portanto $[X, Y]$ é também um campo de vectores característico. ■

► **Definição 1.5** ... Seja M uma variedade de dimensão m e $\omega \in \Omega^2(M)$ uma 2-forma fechada. Uma subvariedade $\varphi : N \rightarrow M$ diz-se uma **subvariedade integral** de ω se $\varphi^*\omega = 0$.

► **Teorema 1.1** ... Seja M uma variedade de dimensão m , $\omega \in \Omega^2(M)$ uma 2-forma fechada e $\varphi : N \rightarrow M$ uma subvariedade integral de ω .

Seja $X \in \mathfrak{X}(M)$ um campo de vectores característicos, i.e., $X(x) \in \ker \omega_x = \mathcal{C}_\omega(x)$, $\forall x \in M$, transversal a $\varphi(N) \subset M$, isto é, $X(x) \notin T_x\varphi(N)$, $\forall x$. Defina-se, para t suficientemente pequeno, $t \in I$, um **tubo de características** de base $\varphi(N)$, i.e., uma aplicação:

$$\Phi(t, n) \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_t^X(\varphi(n)), \quad (t, n) \in I \times N$$

Então $\Phi : I \times N \rightarrow M$ é ainda uma subvariedade integral de ω .

- **Dem.:** Notemos em primeiro lugar que a derivada de Lie $L_X\omega = 0$. De facto:

$$L_X\omega = i_Xd\omega + d(i_X\omega) = 0 \quad (1.2.3)$$

uma vez que X é característico ($i_X\omega = 0$) e ω é fechada ($d\omega = 0$).

Como o teorema é local, vamos supôr que escolhamos coordenadas locais (x^i) para M tais que $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$ e $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$. Por (1.2.3) vem então que:

$$0 = L_X \omega = (X \omega_{ij}) dx^i \wedge dx^j = \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^1} dx^i \wedge dx^j \Rightarrow \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^1} = 0$$

e os ω_{ij} não dependem de x^1 . Por outro lado:

$$0 = i_X \omega = \omega_{1j} dx^j \Rightarrow \omega_{1j} = 0$$

Portanto:

$$\omega = \sum_{i,j \geq 2} \omega_{ij}(x^2, \dots, x^m) dx^i \wedge dx^j$$

Mas, por construção, e atendendo a que $X = \frac{\partial}{\partial x^1}$, os x^i , para $i \geq 2$ são constantes ao longo das curvas integrais de X , isto é:

$$x^i \circ \Phi = x^i \circ \varphi, \quad i \geq 2$$

Portanto:

$$\Phi^* \omega = \varphi^* \omega = 0$$

■.

► **Teorema 1.2 (Darboux)** ... Seja M uma variedade de dimensão $2n + k$ e $\omega \in \Omega^2(M)$ uma 2-forma fechada de rank constante igual a $2n$. Então, em torno de cada ponto $p \in M$, podemos escolher coordenadas locais:

$$(x^i, y^i, z^\ell) = (x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n, z^1, \dots, z^k)$$

tais que:

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx^i \wedge dy^i \tag{1.2.4}$$

- **Dem.:** Como o teorema é puramente local, podemos supôr que $M = \mathbb{R}^{2n+k}$, e que $p = 0$ é a origem. A distribuição característica \mathcal{C}_ω sendo integrável, pelo teorema de Frobenius, podemos escolher coordenadas (x^i, y^i, z^ℓ) , em torno de 0, tais que as folhas de \mathcal{C}_ω , que têm dimensão k , sejam dadas por $x^i \equiv c^i, y^i \equiv d^i$, onde c^i, d^i são constantes. Em particular a folha que passa em 0 é o subespaço $0_{2n} \times \mathbb{R}^k \subset \mathbb{R}^{2n+k}$. Como $\omega(0)$ tem rank $2n$, podemos supôr que $\omega|_{\mathbb{R}^{2n} \times 0_k}$ tem rank constante e igual a $2n$, isto é, essa restrição é não degenerada em $\mathbb{R}^{2n} \times 0_k \cong \mathbb{R}^{2n}$ e portanto aí define uma forma simpléctica.

Resta então mostrar o teorema quando $k = 0$, isto é, quando ω é uma forma simpléctica em M , cuja dimensão é $2n$. ■.

► **Proposição 1.5** ... Seja M uma variedade de dimensão $2n + k$ e $\omega \in \Omega^2(M)$ uma 2-forma fechada de rank $2n$. Então a dimensão máxima de uma subvariedade integral de ω , é igual a $n + k$.

- **Dem.:** A distribuição característica \mathcal{C}_ω sendo integrável, pelo teorema de Frobenius, podemos escolher coordenadas locais $(x^i)_{i=1,\dots,2n,2n+1,\dots,2n+k}$, tais que os campos $\partial/\partial x^\ell$, $\ell = 2n+1, \dots, 2n+k$ formam uma base para \mathcal{C}_ω .

Se X é um campo característico então $i_X\omega = 0$ e também $L_X\omega = d(i_X\omega) + i_Xd\omega = 0$. Portanto, se localmente:

$$\omega = \omega_{ij}dx^i \wedge dx^j$$

então:

$$\begin{aligned} \omega_{\ell m} &= 0 & \ell, m &= 2n+1, \dots, 2n+k \\ \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^\ell} &= 0 & \ell &= 2n+1, \dots, 2n+k \quad \forall i, j \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

o que significa que ω é uma 2-forma apenas nas variáveis $(x^i)_{i=1,\dots,2n}$:

$$\omega = \sum_{1 \leq i < j \leq 2n} \omega_{ij}(x^1, \dots, x^{2n}) dx^i \wedge dx^j \quad (1.2.6)$$

Esta forma já não tem vectores característicos. Mas, como sabemos, qualquer subvariedade integral maximal de ω é obtida a partir de uma subvariedade integral maximal da forma (1.2.6), varrendo-a com os fluxos dos campos característicos $\partial/\partial x^\ell$, $\ell = 2n+1, \dots, 2n+k$, isto é, ampliando-a nas direcções características $(x^\ell)_{\ell=2n+1,\dots,2n+k}$.

Basta então provar a proposição quando ω é simpléctica, mostrando que a dimensão de uma subvariedade integral maximal de uma forma simpléctica ω , numa variedade de dimensão $2n$, é igual a n . Estas subvariedades integrais maximais chamam-se **subvariedades de Lagrange** de ω . Este facto resulta por sua vez do seguinte lema de álgebra linear:

► **Lema 1.1** ... Seja (V, ω) um espaço vectorial simpléctico de dimensão $2n$ e S um subespaço totalmente isotrópico, isto é, $\omega(u, v) = 0$, $\forall u, v \in S$. Então $\dim S \leq n$.

- **Demonstração do Lema** ... Seja $(u, v) \mapsto \langle u|v \rangle$ um produto interno definido positivo em V , e representemos ω através de um operador $I : V \rightarrow V$, definido por:

$$\omega(u, v) = \langle u|I(v) \rangle, \quad u, v \in V$$

Como ω é não degenerada I é um isomorfismo linear. Suponhamos que $\dim S > n+1$. Então, como $\dim(S+I(S)) = \dim S + \dim I(S) - \dim(S \cap I(S))$, viria que $\dim(S \cap I(S)) \geq 2$ e portanto $S \cap I(S) \neq \{0\}$. Suponhamos então que $v \in S \cap I(S)$, com $v \neq 0$. Então $v = I(u)$, para algum $u \in S$ e:

$$0 \neq \langle v|v \rangle = \langle v|I(u) \rangle = \omega(v, u) = 0$$

o que é absurdo. ■

Em particular:

- numa variedade simpléctica (M, ω) de dimensão $m = 2n$, a dimensão máxima de uma subvariedade integral de ω , é igual a $2n - n = n$. Uma tal subvariedade diz-se uma **subvariedade de Lagrange** de M .
- numa variedade de contacto (M, ω) de dimensão $m = 2n+1$, a dimensão máxima de uma subvariedade integral de ω , é igual a $2n+1 - n = n+1$. Uma tal subvariedade diz-se uma **subvariedade de Legendre** de M .

1.3 Estrutura simpléctica canónica em $M = T^*Q$

Como já vimos, uma variedade simpléctica (M, ω) é uma variedade diferenciável C^∞ , munida de uma forma simpléctica, isto é, de uma 2-forma diferencial ω fechada e não degenerada.

A dimensão de M tem que ser par, digamos $2n$. Além disso, $\forall x \in M$, o par $(T_x M, \omega_x)$ é um espaço vectorial simpléctico, e como ω é não degenerada a $2n$ -forma:

$$\mu_\omega \stackrel{\text{def}}{=} \underbrace{\omega \wedge \cdots \wedge \omega}_{n \text{ factores}} \quad (1.3.1)$$

é uma forma volume em M . Se $\dim M = 2$, uma variedade simpléctica é o mesmo que uma superfície com uma forma de área.

Seja Q uma variedade diferenciável C^∞ (**espaço de configuração**), e consideremos o respectivo fibrado cotangente $M = T^*Q$ (**espaço de fases**). Em T^*Q define-se uma 1-forma diferencial canónica θ , dita a **forma de Liouville**, através de:

$$\theta_{(q,p)}(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} \langle p, \pi_* \xi \rangle \quad (1.3.2)$$

onde $(q, p) \in T^*Q$, $\xi \in T_{(q,p)}(T^*Q)$, e $\pi : T^*Q \rightarrow Q$ é a projecção canónica.

Se (q^1, \dots, q^n) é um sistema de coordenadas locais em Q , e $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ é o correspondente sistema de coordenadas (canónicas) locais em T^*Q , a expressão local de θ é:

$$\theta = p_i dq^i = p dq$$

Além disso θ satisfaz a propriedade seguinte:

► **Proposição 1.6 [Propriedade tautológica]** ... Se $\alpha \in \Omega^1(Q)$ é uma 1-forma em Q , interpretada como uma secção $\alpha : Q \rightarrow T^*Q$, do fibrado $\pi : T^*Q \rightarrow Q$, então:

$$\alpha^* \theta = \alpha \quad (1.3.3)$$

(no membro esquerdo desta fórmula, α é interpretada como uma secção, enquanto que no membro direito é interpretada como uma 1-forma).

Dem.: De facto, $(\alpha^* \theta)_q(v) = \theta_{(q, \alpha(q))}(d\alpha_q v) = \alpha(q)(d\pi d\alpha_q v) = \alpha_q(v)$, $\forall q \in Q$, $v \in T_q Q$, uma vez que $\pi \circ \alpha = \text{Id}$. ■

Definámos agora uma 2-forma ω em T^*Q pondo:

$$\omega \stackrel{\text{def}}{=} -d\theta \quad (1.3.4)$$

ω é uma forma simpléctica em T^*Q . A estrutura simpléctica assim obtida, diz-se a estrutura simpléctica canónica em T^*Q .

A expressão local de ω nas coordenadas locais $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$, é:

$$\omega = dq^i \wedge dp_i = dq \wedge dp$$

1.4. Estrutura simpléctica em $M = TQ$, onde (Q, g) é uma variedade Riemanniana 10

Note que todas as cartas de um atlas trivializador canónico de T^*Q são cartas simplécticas, isto é, a representação local de ω numa qualquer dessas cartas, tem a forma diagonal $dq^i \wedge dp_i$.

Pelo Teorema de Darboux, toda a variedade simpléctica (M, ω) , admite um atlas simpléctico, isto é, em torno de cada ponto $x \in M$ existe uma carta $(U; x^1, \dots, x^n, y^1, \dots, y^n)$ tal que:

$$\omega|_U = \sum_i dx^i \wedge dy^i$$

Portanto as formas simplécticas são sempre localmente planas, em contraste com as métricas Riemannianas, por exemplo. Por outras palavras, não existem invariantes locais que distingam as variedades simplécticas - localmente todas são isomorfas. Em contraste, as variedades Riemannianas têm invariantes locais - os tensores de curvatura R . Se $R(g_1) \neq R(g_2)$ então as métricas não são localmente isométricas.

1.4 Estrutura simpléctica em $M = TQ$, onde (Q, g) é uma variedade Riemanniana

Seja (Q, g) uma variedade (pseudo-) Riemanniana de dimensão n . A métrica g induz um isomorfismo bemol de fibrados vectoriais:

$$g^\flat : TQ \longrightarrow T^*Q$$

dado por:

$$g^\flat : v \mapsto g^\flat(v) = v^\flat \left(: w \mapsto g_q(v, w) \right) \quad v, w \in T_qQ$$

Em coordenadas locais (canónicas) (q^i, \dot{q}^i) e (q^i, p_i) para TQ e T^*Q , respectivamente, g^\flat é dada por:

$$\boxed{g^\flat : (q^i, \dot{q}^i) \mapsto (q^i, p_i = g_{ij}(q) \dot{q}^j)} \quad (1.4.1)$$

Consideremos agora a forma de Liouville θ em T^*Q , e o pull-back:

$$\theta_g \stackrel{\text{def}}{=} (g^\flat)^*(\theta)$$

Nas coordenadas atrás referidas, temos que:

$$\theta_g = (g^\flat)^*(p_i dq^i) = (p_i \circ g^\flat) d(q^i \circ g^\flat) = g_{ij}(q) \dot{q}^j dq^i$$

Se considerarmos agora $\omega_g = -d\theta_g = -d(g^\flat)^*(\theta) = (g^\flat)^*(-d\theta)$, então ω_g é uma 2-forma fechada não degenerada, e portanto (TQ, ω_g) é uma variedade simpléctica.

Em coordenadas locais:

$$\boxed{\omega_g = g_{ij}(q) dq^i \wedge d\dot{q}^j + \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k}(q) \dot{q}^i dq^j \wedge dq^k}$$

1.5 Sistemas Hamiltonianos

Vamos agora introduzir o conceito de sistema Hamiltoniano:

► **Definição 1.6** ... Um **Sistema Hamiltoniano** (M, ω, H) é constituído por uma variedade simpléctica (M, ω) e por uma função $H \in C^\infty(M)$, que se diz o **Hamiltoniano** (ou a **energia (total)**) do sistema.

O campo de vectores $X_H \in \mathfrak{X}(M)$ definido pela condição:

$$\boxed{i_{X_H}\omega = dH} \quad (1.5.1)$$

isto é, $\omega(X_H, Y) = dH(Y)$, $\forall Y \in \mathfrak{X}(M)$, diz-se o **campo (de vectores) Hamiltoniano** do sistema. O seu fluxo $\Phi_t^H = \Phi_t^{X_H}$ diz-se o **fluxo Hamiltoniano** do sistema. ■

Quando (M, g) é uma variedade Riemanniana e $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função C^∞ , recorde que se define o campo gradiente de F , $\nabla F \in \mathfrak{X}(M)$, através de:

$$g(\nabla F, Y) = dF(Y) \quad \forall Y \in \mathfrak{X}(M)$$

A definição anterior é portanto formalmente análoga. No entanto, a anti-simetria da forma simpléctica conduz a propriedades conservativas, enquanto a simetria da métrica conduz a propriedades dissipativas do campo gradiente.

► **Exercício 1.1** ... (i). Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $F : M \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ . Mostrar que a longo das órbitas não singulares de $X = \nabla F$, F é estritamente crescente e que portanto X não possui órbitas fechadas.

(ii). Suponha que M é uma variedade Riemanniana completa. Mostre que existe uma constante $C > 0$, tal que $\|X(p)\| < c$, $\forall p \in M$. Mostrar que X é um campo completo. ■

Vejámos agora a representação local de um campo Hamiltoniano numa carta simpléctica, com coordenadas canónicas $(q, p) = (q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$. Nesta carta $\omega = dq^i \wedge dp_i$. Suponhámos que:

$$X_H = a^i \frac{\partial}{\partial q^i} + b_i \frac{\partial}{\partial p_i}$$

Então $i_{X_H}dq^i = dq^i(X_H) = a^i$, $i_{X_H}dp_i = dp_i(X_H) = b_i$ e a identidade que define X_H , $i_{X_H}\omega = dH$ conduz aos cálculos seguintes:

$$\begin{aligned} i_{X_H}\omega &= i_{X_H}(dq^i \wedge dp_i) \\ &= \sum_i (i_{X_H}dq^i) \wedge dp_i - \sum_i dq^i \wedge (i_{X_H}dp_i) \\ &= \sum_i (a^i dp_i - b_i dq^i) \end{aligned}$$

Como, por outro lado, $dH = \frac{\partial H}{\partial q^i} dq^i + \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$, deduzimos que:

$$a^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad e \quad b_i = -\frac{\partial H}{\partial q^i}$$

isto é, a expressão local de um campo Hamiltoniano X_H numa carta simpléctica, com coordenadas canónicas $(q^1, \dots, q^n, p_1, \dots, p_n)$ é:

$$X_H = \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial q^i} - \frac{\partial H}{\partial q^i} \frac{\partial}{\partial p_i} \quad (1.5.2)$$

ou em forma vectorial:

$$X_H = J \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1_n \\ -1_n & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial H}{\partial q} \\ \frac{\partial H}{\partial p} \end{bmatrix} \quad (1.5.3)$$

Assim se $(q(t), p(t))$ é uma curva integral de X_H , então ela deverá verificar as chamadas **equações de Hamilton**:

$$\begin{cases} \dot{q}^i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q^i} \end{cases} \quad (1.5.4)$$

que é um sistema de equações diferenciais de primeira ordem.

► **Teorema 1.3** ... Seja $\Phi_t = \Phi_t^{X_H}$ o fluxo hamiltoniano do campo X_H . Então:

1. [Lei da conservação de energia] $H(\Phi_t(x)) \equiv$ constante em t . Isto é, H é constante ao longo das curvas integrais de X_H .
2. $(\Phi_t)^*\omega = \omega$, isto é, para cada t , a aplicação de avanço no tempo t , Φ_t^H é simpléctica.

• **Dem.:** ... (i). Seja $\alpha_x(t) = \Phi_t(x)$ a curva integral que em $t = 0$ passa em $x \in M$. Vem então que:

$$\frac{d}{dt}H(\alpha_x(t)) = dH_{\alpha_x(t)}\dot{\alpha}_x(t) = dH_{\alpha_x(t)}(X_H(\alpha_x(t))) = \omega(X_H(\alpha_x(t)), X_H(\alpha_x(t))) = 0$$

(ii).

$$\frac{d}{dt}(\Phi_t)^*\omega = (\Phi_t)^*L_{X_H}\omega = (\Phi_t)^*(i_{X_H}d\omega + di_{X_H}\omega) = (\Phi_t)^*(0 + dd\omega) = 0$$

isto é, $(\Phi_t)^*\omega$ é constante em t , e como $(\Phi_0) = \text{Id}$, vem que $(\Phi_t)^*\omega = \omega$, ■.

1.6 Parêntisis de Poisson

► **Definição 1.7** ... Seja (M, ω) uma variedade simpléctica, e $f, g \in C^\infty(M)$, com campos Hamiltonianos associados, X_f e X_g respectivamente. Define-se o **parêntisis de Poisson** de f e g , através de:

$$\{f, g\} \stackrel{\text{def}}{=} \omega(X_f, X_g) \quad (1.6.1)$$

■.

Numa carta simpléctica, com coordenadas canônicas (q^i, p_i) , relativamente às quais a expressão local de ω é $\omega = dq^i \wedge dp_i$, é fácil ver que:

$$\boxed{\{f, g\} = \frac{\partial f}{\partial q^i} \frac{\partial g}{\partial p_i} - \frac{\partial f}{\partial p_i} \frac{\partial g}{\partial q^i} = (\nabla f)^T J \nabla g} \quad (1.6.2)$$

Como:

$$L_{X_F} g = i_{X_f} dg = i_{X_f} i_{X_g} \omega = \omega(X_f, X_g) = -\omega(X_g, X_f) = -L_{X_g} f$$

Vemos que:

$$\{f, g\} = L_{X_F} g = -L_{X_g} f = -\{g, f\}$$

e portanto, f é constante ao longo das órbitas de X_g , se e só se $\{f, g\} = 0$, se e só se g é constante ao longo das órbitas de X_f .

► **Proposição 1.7** ... *O parêntesis de Poisson verifica as propriedades seguintes:*

$$\begin{aligned} (1). \quad & \{f, \lambda g + \eta h\} = \lambda \{f, g\} + \eta \{f, h\}, \quad \lambda, \eta \in \mathbb{R} \\ (2). \quad & \{f, g\} = -\{g, f\} \\ (3). \quad & \{f, \{g, h\}\} + \{g, \{h, f\}\} + \{h, \{f, g\}\} \\ (4). \quad & \{f, gh\} = g\{f, h\} + h\{f, g\} \\ (5). \quad & X_{\{f, g\}} = [X_f, X_g] \end{aligned} \quad (1.6.3)$$

$\forall f, g, h \in C^\infty(M)$.

• **Dem.:**

1., 2., resultam da definição. 4. resulta da regra de Leibniz $d(fg) = fdg + gdf$. Para deduzir 5. aplicámos a fórmula:

$$\begin{aligned} 0 &= d\omega(X_f, X_g, Y) \\ &= X_f \omega(X_g, Y) - X_g \omega(X_f, Y) + Y \omega(X_f, X_g) \\ &\quad - \omega([X_f, X_g], Y) + \omega([X_f, Y], X_g) + \omega([X_g, Y], X_f) \\ &= -X_f(Yg) + X_g(Yf) + Y(\{f, g\}) - \omega([X_f, X_g], Y) + [X_f, Y]g - [X_g, Y]f \\ &= -Y(\{f, g\}) + \omega(Y, [X_f, X_g]) \end{aligned} \quad (1.6.4)$$

A identidade de Jacobi resulta de 5. ■

A Lei da conservação de energia pode ser generalizada do seguinte modo:

► **Teorema 1.4** ... *Seja X_H um campo Hamiltoniano numa variedade simpléctica (M, ω) , com fluxo Φ_t . Então $\forall f \in C^\infty(M)$ tem-se que:*

$$\boxed{\frac{d}{dt}(f \circ \Phi_t) = \{f \circ \Phi_t, H\}} \quad (1.6.5)$$

• **Dem.:** ...

$$\frac{d}{dt}(f \circ \Phi_t) = \frac{d}{dt}((\Phi_t)^* f) = (\Phi_t)^* L_{X_H} f = L_{X_H}(f \circ \Phi_t) = \{f \circ \Phi_t, H\}$$

■

1.7 Sistemas Hamiltonianos de tipo mecânico

Como já vimos T^*Q tem uma estrutura simpléctica canónica. Portanto se Q representa o espaço de configuração de um sistema mecânico, é possível estudar campos Hamiltonianos no espaço de fases T^*Q , e os respectivos fluxos.

Vamos agora estudar um tipo especial de Hamiltoniano, particularmente importantes em mecânica clássica - os chamados Hamiltonianos de tipo mecânico. Para isso consideremos uma variedade Riemanniana (Q, g) - o espaço de configuração de um sistema mecânico.

Como já vimos g induz um isomorfismo de fibrados vectoriais:

$$g^b : TQ \longrightarrow T^*Q$$

Este isomorfismo permite munir cada T_q^*Q , de um produto interno, notado por g_q^* , e definido por:

$$g_q^*(\alpha, \beta) \stackrel{\text{def}}{=} g_q((g^b)^{-1}\alpha, (g^b)^{-1}\beta)$$

$\forall q \in Q, \forall \alpha, \beta \in T_q^*Q$. Se $g_{ij}(q)$ são os coeficientes da métrica g num sistema de coordenadas locais q^i , em Q , de tal forma que:

$$g(q, \dot{q}) = g_{ij}(q) \dot{q}^i \dot{q}^j$$

então as componentes de g^* são g^{ij} , onde $g^{ij} = (g_{ij})^{-1}$. Isto é:

$$g^*(q, p) = g^{ij}(q) p_i p_j$$

(recorde que $p_i = g_{ij}(q) \dot{x}^j$).

Com estas notações passemos à definição de sistema hamiltoniano de tipo mecânico.

► **Definição 1.8** ... Uma função $H : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$ diz-se um hamiltoniano de tipo mecânico, se H é da forma:

$$\boxed{H = K + V \circ \pi} \tag{1.7.1}$$

onde $K : T^*Q \rightarrow \mathbb{R}$, dada por:

$$K(q, \alpha) = \frac{1}{2} g_q^*(\alpha, \alpha), \quad \alpha \in T_q^*Q$$

é a chamada **energia cinética** do sistema, $V : Q \rightarrow \mathbb{R}$ é a **energia potencial**, e $\pi : T^*Q \rightarrow Q$ é a **projectão canónica**.

O sistema $(T^*Q, \omega, H = K + V \circ \pi)$ diz-se um **sistema hamiltoniano de tipo mecânico**, com **espaço de configuração** Q , **espaço de fases** T^*Q , **energia total** H , **energia cinética** K e **energia potencial** V . ■

No capítulo seguinte veremos a relação entre este tratamento da mecânica clássica e o tratamento usual, baseado em princípios variacionais (ponto de vista de Lagrange).

1.8 Sistemas Hamiltonianos com constrangimentos

Seja (\mathcal{P}, Ω) uma variedade simpléctica, de dimensão $2n$, e:

$$F = (F_1, \dots, F_k) : \mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{R}^k \quad (1.8.1)$$

funções C^∞ , tais que:

$$M = F^{-1}(0) \subset \mathcal{P} \quad (1.8.2)$$

é uma subvariedade mergulhada em \mathcal{P} , de codimensão k (i.e., $0 \in \mathbb{R}^k$ é valor regular de F). Se $\iota : M \hookrightarrow \mathcal{P}$ é a inclusão, representemos por:

$$\omega = \iota^* \Omega \quad (1.8.3)$$

► **Proposição 1.8** ... Se a matriz $\{F_i, F_j\}(x)$ fôr inversível $\forall x \in M$, então (M, ω) é uma variedade simpléctica.

- **Dem.:** Como ω é fechada, resta provar que é não degenerada. Como cada F_i é constante em M , temos que:

$$0 = dF_i(x)v = \Omega_x(X_{F_i}(x), v), \quad \forall x \in M, \quad \forall v \in T_x M$$

o que significa:

$$X_{F_i}(x) \in T_x M^\perp \quad (1.8.4)$$

(Recorde que $T_x M^\perp$ é o ortogonal simpléctico de $T_x M$ em $(T_x \mathcal{P}, \Omega_x)$). Como isto é válido $\forall i$, se $V_x = \text{span}\{X_{F_1}(x), \dots, X_{F_k}(x)\}$, então $V_x \subseteq T_x M^\perp$, o que implica que:

$$T_x M \subseteq V_x^\perp \quad (1.8.5)$$

Por outro lado, os X_{F_i} são linearmente independentes (uma vez que as diferenciais dF_i o são e Ω é não degenerada) e formam por isso uma base de V_x . A matriz de Gram de OO_x , nessa base é:

$$\{F_i, F_j\}(x) = \Omega_x(X_{F_i}(x), X_{F_j}(x)) \quad (1.8.6)$$

Como é, por hipótese, inversível, V_x é um subespaço simpléctico de $(T_x \mathcal{P}, \Omega_x)$, e portanto $\dim V_x = k$ tem que ser par. Mas:

$$\begin{aligned} \dim T_x M &= \dim \mathcal{P} - k \\ &= \dim T_x \mathcal{P} - \dim V_x \\ &= \dim V_x^\perp \end{aligned} \quad (1.8.7)$$

já que, $\dim T_x \mathcal{P} = \dim V_x + \dim V_x^\perp$. Concluindo, por (1.8.5), vem finalmente que:

$$T_x M = V_x^\perp = (\text{span}\{X_{F_1}(x), \dots, X_{F_k}(x)\})^\perp$$

Como V_x é simpléctico também o é V_x^\perp , e portanto $T_x M$ é simpléctico. ■

Note que, como $T_x M$ é simplético, tem-se que:

$$T_x \mathcal{P} = T_x M \oplus \underbrace{T_x M^\perp}_{\text{span}\{X_{F_i(x)}\}} \quad (1.8.8)$$

e portanto nenhum dos campos Hamiltonianos X_{F_i} , associados aos constrangimentos F_i , é tangente a M - os constrangimentos não geram dinâmica (de gauge) em M !...

Como $(M, \mathbf{00})$ é simplética, quando temos um Hamiltoniano $h : M \rightarrow \mathbb{R}$, podemos definir o correspondente campo Hamiltoniano $X_h \in \mathfrak{X}(M)$, e o respectivo fluxo, usando a forma simplética ω em M . No entanto, em várias situações, é mais conveniente obter este fluxo através da restrição a M de um fluxo Hamiltoniano na variedade ambiente \mathcal{P} , definido por um Hamiltoniano H , tal que $H|_M = h$. O problema é que, se H prolonga h , em geral não é verdade que X_H , definido usando a estrutura simplética Ω em \mathcal{P} , seja tangente a M . O problema resolve-se pelo processo seguinte - qualquer outra extensão H^* de h , é da forma:

$$H^* = H - \sum_i \lambda_i F_i \quad (1.8.9)$$

para certas funções $\lambda_i \in C^\infty(\mathcal{P})$. Calculámos então H^* de tal forma que X_{H^*} seja tangente a M . Para que isso aconteça, devemos ter:

$$\begin{aligned} 0 &= X_{H^*} \cdot F_k \\ &= \left\{ H - \sum_j \lambda_j F_j, F_k \right\} \\ &\approx \{H, F_k\} - \sum_j \lambda_j \{F_j, F_k\} \end{aligned} \quad (1.8.10)$$

onde \approx significa igualdade $\forall x \in M$. Isto permite calcular os λ_j , em M , uma vez que, por hipótese, $\det(\{F_j, F_k\}) \neq 0$, em M .

1.8.1 Exemplo. Fluxo geodésico numa esfera

Consideremos a esfera unitária $S = S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$, definida por:

$$F_1(q) = q^2 - 1 = 0$$

onde $q = (q^i)$ são as coordenadas cartesianas usuais em \mathbb{R}^n .

O movimento de uma partícula que se desloca segundo uma geodésica de S , é descrito pela equação diferencial:

$$\ddot{q} = \lambda q \quad (1.8.11)$$

isto é, a aceleração é sempre ortogonal à esfera. O “multiplicador de Lagrange” λ calcula-se impondo a restrição $q^2 = 1$ (o ponto move-se em S), o que implica:

$$q \cdot \dot{q} = 0 \Rightarrow q \cdot \ddot{q} + \dot{q}^2 = 0 \Rightarrow q \cdot (\lambda q) + \dot{q}^2 = 0 \Rightarrow \lambda = -\dot{q}^2$$

e portanto a equação do movimento é:

$$\ddot{q} = -(\dot{q}^2) q \quad (1.8.12)$$

sujeita às restrições $q^2 = 1$ e $\dot{q} \cdot q = 0$. Escrevendo esta equação como um sistema de ODE's de primeira ordem no fibrado cotangente T^*S :

$$T^*S = \{(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : q^2 = 1, q \cdot p = 0\} \quad (1.8.13)$$

obtemos o seguinte sistema:

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -p^2 q \end{cases} \quad (1.8.14)$$

Podemos também deduzir estas equações usando o formalismo explicado no início desta secção. De facto, o movimento de uma partícula livre em \mathbb{R}^n , não sujeita à acção de qualquer campo de forças, é descrito pelas equações de Newton:

$$\ddot{q} = 0$$

ou, de forma equivalente, pelas equações de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = 0 \end{cases}$$

associadas ao Hamiltoniano $H(q, p) = \frac{1}{2}p^2$.

Como

$$M = T^*S = \{(q, p) \in \mathbb{R}^{2n} : F_1(q, p) = q^2 - 1 = 0, F_2(q, p) = q \cdot p = 0\}$$

e:

$$\det \begin{pmatrix} \{F_1, F_1\} & \{F_1, F_2\} \\ \{F_2, F_1\} & \{F_2, F_2\} \end{pmatrix} \neq 0, \quad \forall x \in M = T^*S$$

sabemos que a estrutura simpléctica canónica de \mathbb{R}^{2n} induz uma estrutura simpléctica em $M = T^*S$.

Considerámos então Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H^* &= H - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2 \\ &= \frac{1}{2}p^2 - \lambda_1(q^2 - 1) - \lambda_2(q \cdot p) \end{aligned} \quad (1.8.15)$$

onde determinámos λ_1, λ_2 , impondo as condições:

$$\begin{aligned} 0 &= \{H - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2, F_1\} \\ &\approx \{H, F_1\} - \lambda_2 \{F_2, F_1\} \\ 0 &= \{H - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2, F_2\} \\ &\approx \{H, F_2\} - \lambda_1 \{F_1, F_2\} \end{aligned} \quad (1.8.16)$$

onde, como antes, \approx significa igualdade em $M = T^*S$. Portanto:

$$\lambda_1 \approx \frac{\{H, F_2\}}{\{F_1, F_2\}}, \quad \lambda_2 \approx -\frac{\{H, F_1\}}{\{F_1, F_2\}}$$

Fazendo os cálculos, obtemos:

$$H^*(q, p) = \frac{1}{2}(q^2 p^2 - (q \cdot p)^2) \quad (1.8.17)$$

e as equações de Hamilton são:

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -p^2 q \end{cases}$$

como antes.

1.8.2 Exemplo. Pêndulo esférico

Seja $H : T^*\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, o Hamiltoniano que descreve o movimento de uma partícula de massa 1, em \mathbb{R}^3 , sujeita à acção do campo gravitacional $\Gamma = -\gamma e_3$:

$$H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + \gamma(q \cdot e_3) \quad (1.8.18)$$

Vamos supôr que $\gamma = 1$, escolhendo convenientemente as unidades.

Suponhâmos agora que a partícula se move apenas na superfície da esfera unitária $S \subset \mathbb{R}^3$. Para descrever o correspondente fluxo em T^*S , usâmos mais uma vez o formalismo anterior.

Como

$$T^*S = \{(q, p) \in \mathbb{R}^{2n} : F_1(q, p) = q^2 - 1 = 0, \quad F_2(q, p) = q \cdot p = 0\}$$

considerâmos o Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H^* &= H - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2 \\ &= \frac{1}{2}p^2 + (q \cdot e_3) - \lambda_1(q^2 - 1) - \lambda_2(q \cdot p) \end{aligned} \quad (1.8.19)$$

onde determinâmos λ_1, λ_2 , impondo as condições:

$$\begin{aligned} 0 &= \{H - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2, F_1\} \\ &\approx \{H, F_1\} - \lambda_2 \{F_2, F_1\} \\ 0 &= \{H - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2, F_2\} \\ &\approx \{H, F_2\} - \lambda_1 \{F_1, F_2\} \end{aligned} \quad (1.8.20)$$

onde, como antes, \approx significa igualdade em $M = T^*S$. Portanto:

$$\lambda_1 \approx \frac{\{H, F_2\}}{\{F_1, F_2\}}, \quad \lambda_2 \approx -\frac{\{H, F_1\}}{\{F_1, F_2\}}$$

Fazendo os cálculos, obtemos:

$$H^*(q, p) = \frac{1}{2}p^2 + (q \cdot e_3) + \frac{1}{2}(p^2 - (q \cdot e_3))(q^2 - 1) - \frac{1}{2}(q \cdot p)^2 \quad (1.8.21)$$

e as equações de Hamilton, restritas a T^*S , são (pondo $\Gamma = -e_3$):

$$\begin{cases} \dot{q} &= p \\ \dot{p} &= \Gamma - (q \cdot \Gamma + p^2) q \end{cases}$$

1.8.3 Exemplo. Extensão do fluxo geodésico numa superfície

Seja $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função C^∞ , e $S = f^{-1}(0) \subset \mathbb{R}^n$. Supômos ainda que 0 é valor regular de f , de tal forma que $\nabla f(q) = f_q(q) \neq 0, \forall q \in S$ e S é portanto uma hipersuperfície regular em \mathbb{R}^n .

O conjunto \mathcal{R}_n , das rectas orientadas em \mathbb{R}^n , pode ser considerado como o fibrado (co)tangente à esfera $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$. A cada ponto $(q, p) \in T^*S^{n-1}$, com $p \in S^{n-1}$, isto é, $|p| = 1$, associâmos a única recta orientada $\ell = \ell(q, p)$, em \mathbb{R}^n , que é paralela a p e que intersecta o plano (afim)

tangente à esfera em p , no ponto q , isto é $(q - p) \cdot p = 0$, ou, de forma equivalente, $q \cdot p = 1$. Portanto \mathcal{R}_n tem uma estrutura simpléctica natural.

Outra maneira de descrever \mathcal{R}_n é a seguinte - consideremos o Hamiltoniano $H(q, p) = \frac{1}{2}p^2$ da partícula livre em \mathbb{R}^n . O sistema canónico correspondente é:

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = 0 \end{cases}$$

cujas soluções são:

$$\begin{cases} q(t) = pt + q \\ p(t) \equiv p \end{cases}, \quad q, p \text{ constantes em } \mathbb{R}^n$$

que se projectam nas rectas orientadas de \mathbb{R}^n . Se nos restringirmos à hipersuperfície de energia constante:

$$\Sigma = \Sigma_{1/2} = \{(q, p) \in T^*\mathbb{R}^n : H(q, p) = \frac{1}{2}p^2 = 1/2\}$$

a forma simpléctica degenera e tem um núcleo de dimensão 1, gerado pelo campo Hamiltoniano $X_H(q, p) = p \frac{\partial}{\partial q}$. A variedade de características de $\omega|_{\Sigma}$ é exactamente \mathcal{R}_n , e tem por isso uma estrutura simpléctica dada pela forma $\omega / \ker \omega$.

Figure 1.1:

Consideremos agora o subconjunto $\mathcal{R}_S \subset \mathcal{R}_n$, constituído pelas rectas orientadas tangentes à hipersuperfície $S = f^{-1}(0)$. Se $\ell = \ell(q, p) = \{q + \lambda p : \lambda \in \mathbb{R}\} \in \mathcal{R}_S$ é uma dessas rectas, o ponto $\xi \in S \cap \ell$, de tangência de ℓ com S , pode ser calculado da seguinte forma - se $\lambda = \lambda(q, p)$ é o valor do parâmetro λ que corresponde ao ponto ξ , então:

$$\begin{aligned} f(\xi) &= f(q + \lambda(q, p)p) = 0 && \text{isto é, } \xi \in S \\ p \cdot f_q(\xi) &= 0 && \text{isto é, } \ell \text{ é tangente a } S \text{ em } \xi. \end{aligned} \quad (1.8.22)$$

Por outro lado, se, para cada (q, p) fixos, considerarmos a função:

$$\phi(\lambda) = f(q + \lambda p)$$

então o valor $\lambda = \lambda(q, p)$, de λ , para o qual esta função atinge um mínimo, satisfaz a condição $\phi'(\lambda)|_{\lambda=\lambda(q, p)} = 0$, i.e.:

$$0 = f_q(q + \lambda(q, p)p) \cdot p = f_q(\xi) \cdot p$$

Figure 1.2:

Isto leva-nos a considerar um Hamiltoniano H , em $T^*\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, pondo, para cada $(q, p) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \cong T^*\mathbb{R}^n$:

$$H(q, p) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{\lambda} f(q + \lambda p) \quad (1.8.23)$$

(supômos que esse mínimo é atingido num único ponto, exigindo, por exemplo, que f seja estritamente convexa $f_{qq} < 0$). Como vimos, quando nos restringimos a $H = 0$, então $f(\xi) = f(q + \lambda(q, p)p) = 0$ e ξ é o ponto de tangência de $\ell(q, p)$ com S . Portanto \mathcal{R}_S fica definido pela condição $H = 0$ e é por isso uma subvariedade de codimensão 1 em \mathcal{R}_n (difeomorfa ao fibrado (co)tangente unitário de S).

Consideremos o respectivo sistema de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{q} &= H_p \\ \dot{p} &= -H_q \end{cases} \quad (1.8.24)$$

Este sistema admite dois integrais primeiros - o integral de energia H , e o integral $F(q, p) = p^2$, onde $p^2 = \|p\|^2$. Podemos pois restringir-mo-nos apenas às soluções tais que $|p| = 1$ e $H = 0$.

► **Proposição 1.9** ... Se $(q(t), p(t))$ é uma solução do sistema (1.8.24), com $H = 0$ e $F(q, p) = |p| = 1$, então a recta $\ell(t) = \ell(q(t), p(t))$ permanece sempre tangente à hipersuperfície $S = f^{-1}(0)$. Além disso, o ponto de tangência $\xi(t)$ de $\ell(t)$ com S , move-se ao longo de uma geodésica de S .

- **Dem.:** Calculemos a lei de evolução do ponto de tangência $\xi(t) = q(t) + \lambda(q(t), p(t))p(t)$. Como o Hamiltoniano é dado por:

$$H(q, p) = \min_{\lambda} f(q + \lambda p) = f(\xi) = f(q + \lambda(q, p)p)$$

deduzimos que:

$$\begin{aligned} H_q &= f_q(\xi) \cdot (1 + \lambda_q p) = f_q(\xi) \\ H_p &= f_q(\xi) \cdot (\lambda_p p + \lambda) = \lambda(q, p) f_q(\xi) \end{aligned} \quad (1.8.25)$$

e portanto as equações de Hamilton (1.8.24) ficam na forma:

$$\begin{cases} \dot{q} &= \lambda(q, p) f_q(\xi) \\ \dot{p} &= -f_q(\xi) \end{cases} \quad (1.8.26)$$

A evolução do ponto de tangência $\xi(t)$ é pois dada por:

$$\begin{aligned}\dot{\xi} &= \dot{q} + \lambda\dot{p} + \dot{\lambda}p \\ &= \dot{\lambda}p\end{aligned}\tag{1.8.27}$$

Usando $\lambda = \lambda(q(t), p(t))$ como variável independente, vem que:

$$\frac{d\xi}{d\lambda} = \frac{d\xi}{dt} \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\frac{d\xi}{dt}}{\frac{d\lambda}{dt}} = \frac{\dot{\xi}}{\dot{\lambda}} = \frac{\lambda\dot{p}}{\dot{\lambda}} = p$$

enquanto que, por outro lado:

$$\frac{dp}{d\lambda} = \frac{dp}{dt} \frac{dt}{d\lambda} = \frac{\frac{dp}{dt}}{\frac{d\lambda}{dt}} = \frac{\dot{p}}{\dot{\lambda}} = \frac{-f_q(\xi)}{\dot{\lambda}}$$

Daí que:

$$\frac{d^2\xi}{d\lambda^2} = \frac{dp}{d\lambda} = -\dot{\lambda}^{-1}f_q(\xi)$$

que é a equação diferencial para uma geodésica de S , uma vez que a aceleração de ξ é sempre normal a S .

Finalmente, como já vimos, quando nos restringimos a $H = 0$, então $f(\xi) = f(q + \lambda(q, p)p) = 0$ e ξ é o ponto de tangência de $\ell(t)$ com S .

■

O fluxo do sistema de Hamilton (1.8.26), em $\Sigma_0 = \{H = 0\}$, fica assim interpretado como um fluxo de linhas (orientadas e pontuadas) em \mathbb{R}^n - as linhas movem-se de tal forma que se mantêm tangentes a uma mesma geodésica de S . O ponto distinguido q da recta $\ell(q, p)$ move-se mantendo-se sempre perpendicular à recta ℓ . Este fluxo diz-se o **fluxo de rectas** tangentes à hipersuperfície $S = f^{-1}(0)$.

Podemos descrever de forma mais invariante esta situação. A variedade \mathcal{R}_S de rectas orientadas tangentes a S , tem codimensão 3 em $T^*\mathbb{R}^n$ e é dada por:

$$\mathcal{R}_S = \{(q, p) : p^2 = 1, f(q) = 0, p \cdot f_q(q) = 0\}\tag{1.8.28}$$

\mathcal{R}_S é uma hipersuperfície em \mathcal{R}_n , e a restrição de $\omega|_{\ker\omega}$ degenera - as características desta forma são constituídas pelas rectas tangentes a uma mesma geodésica de S e são, como vimos, dadas pelas linhas de fluxo do Hamiltoniano $H(q, p) = \min_\lambda f(q + \lambda p)$, restritas à hipersuperfície de energia constante $\{H = 0\}$.

Nota ... O resultado anterior pode ser obtido usando o formalismo da secção 1.8. De facto, consideremos a subvariedade de $T^*\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{2n}$:

$$M = \{(q, p) \in \mathbb{R}^{2n} : p^2 = 1, f_q(q) \cdot p = 0\}\tag{1.8.29}$$

M é variedade simpléctica uma vez que:

$$\{p^2, f_q(q) \cdot p\} = -2(f_{qq}(q)p \cdot p) < 0$$

já que suposemos f estritamente convexa.

Consideremos agora a restrição $h = H|_M$ e o correspondente campo Hamiltoniano X_h (calculado segundo a estrutura simpléctica de M). Como sabemos, este fluxo pode também ser obtido, através do Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H^* &= H - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2 \\ &= \min_{\lambda} f(q + \lambda p) + \frac{1}{2} \lambda_1 (p^2 - 1) + \lambda_2 (f_q(q) \cdot p) \end{aligned} \quad (1.8.30)$$

onde determinámos λ_1, λ_2 , impondo as condições:

$$\begin{aligned} 0 &= \{H - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2, F_1\} \\ &\approx \{H, F_1\} - \lambda_2 \{F_2, F_1\} \\ 0 &= \{H - \lambda_1 F_1 - \lambda_2 F_2, F_2\} \\ &\approx \{H, F_2\} - \lambda_1 \{F_1, F_2\} \end{aligned} \quad (1.8.31)$$

onde, como antes, \approx significa igualdade em M . Portanto:

$$\lambda_1 \approx \frac{\{H, F_2\}}{\{F_1, F_2\}}, \quad \lambda_2 \approx -\frac{\{H, F_1\}}{\{F_1, F_2\}} = 0$$

porque $\{H, F_1\} = 0$.

O fluxo dado pelo Hamiltoniano H^* , quando restrito a $H = 0$, pode ser simplificado introduzindo um novo parâmetro τ definido por:

$$\frac{d\tau}{dt} = -\lambda_1$$

As equações canónicas ficam então na forma:

$$\begin{cases} \frac{dq}{d\tau} = -\lambda_1^{-1} H_p^* \\ \frac{dp}{d\tau} = \lambda_1^{-1} H_q^* \end{cases} \quad (1.8.32)$$

Na hipersuperfície de energia $H^* = 0$, podemos substituir o Hamiltoniano por:

$$K = \lambda_1^{-1} H^* = \lambda_1^{-1} H + F_1$$

Notemos ainda que, em M , se tem $\min_{\lambda} f(q + \lambda p) = f(q)$, uma vez que $f_q \cdot p = 0$, e portanto:

$$H_p(q, p) = 0, \quad H_q(q, p) = f_q(q)$$

em M . Daí que:

$$K_p(q, p) = \frac{\partial}{\partial p} F_1 = p, \quad \text{em } M$$

e as equações canónicas reduzem-se a:

$$\begin{cases} \frac{dq}{d\tau} = p \\ \frac{dp}{d\tau} = -\lambda_1^{-1} H_q^* = -\lambda_1^{-1} f_q \end{cases} \quad (1.8.33)$$

ou:

$$\frac{dq^2}{d\tau^2} = -\lambda_1^{-1} f_q$$

que são novamente as equações das geodésicas. ■

Consideremos agora duas hipersuperfícies $S = \{f(q) = 0\}$ e $T = \{g(q) = 0\}$, e sejam H e G os respectivos fluxos de rectas tangentes.

► **Proposição 1.10** ... Se os hiperplanos tangentes às duas hipersuperfícies S e T , nos pontos onde uma certa recta ℓ é simultâneamente tangente, são ortogonais, então os fluxos de rectas comutam nessa recta (considerada como um ponto do espaço $\mathcal{R}_S \cap \mathcal{R}_T$).

Mais detalhadamente, se $\xi \in S$ e $\eta \in T$, são os pontos de tangência da recta ℓ com S e a T , respectivamente, e se se verifica a condição:

$$f_q(\xi) \cdot g_q(\eta) = 0 \quad (1.8.34)$$

então:

$$\{H, G\}(\ell) = 0 \quad (1.8.35)$$

• **Dem.:** Se $\ell(q, p) = \{q + \lambda p\}$ é a recta referida, sabemos que:

$$H(\xi, p) = f(\xi), \quad H_q(\xi, p) = f_q(\xi), \quad H_p(\xi, p) = -\lambda f_q(\xi)$$

no ponto de contacto $\xi = q + \lambda p \in S$, e anàlogamente:

$$G(\eta, p) = g(\eta), \quad G_q(\eta, p) = g_q(\eta), \quad G_p(\eta, p) = -\lambda' g_q(\eta)$$

no ponto de contacto $\eta = q + \lambda' p \in T$. Portanto:

$$\{H, G\} = H_q G_p - H_p G_q = (\lambda' - \lambda)(f_q(\xi) \cdot g_q(\eta)) = 0$$

■.

1.8.4 Exemplo. Geodésicas num elipsóide

Consideremos a família de **quádricas confocais** em \mathbb{R}^n :

$$\mathcal{Q}_\lambda : \quad \Phi(\lambda) = \sum_{i=1}^n \frac{x_i^2}{a_i - \lambda} = \frac{x_1^2}{a_1 - \lambda} + \frac{x_2^2}{a_2 - \lambda} + \dots + \frac{x_n^2}{a_n - \lambda} = 1 \quad (1.8.36)$$

onde supômos $a_1 < a_2 < \dots < a_n$.

Por exemplo, para $n = 2$, temos a família de **cónicas confocais** em \mathbb{R}^2 :

$$\Phi(\lambda) = \frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda} = 1 \quad (1.8.37)$$

onde supômos $a < b$. Assim para $\lambda < a$, $\Phi(\lambda) = 1$ representa uma elipse, enquanto que, para $a < \lambda < b$, $\Phi(\lambda) = 1$ representa uma hipérbole. O foco de cada uma destas cónicas está no eixo dos xx , a uma distância da origem igual a:

$$\sqrt{(a - \lambda) - (b - \lambda)} = \sqrt{a - b}$$

e portanto os focos de todas as cónicas da família coincidem.

Para $n = 3$, temos a família de **quádricas confocais** em \mathbb{R}^3 :

$$\mathcal{Q}_\lambda : \quad \Phi(\lambda) = \frac{x^2}{a - \lambda} + \frac{y^2}{b - \lambda} + \frac{z^2}{c - \lambda} = 1 \quad (1.8.38)$$

Figure 1.3: Cónicas confocais

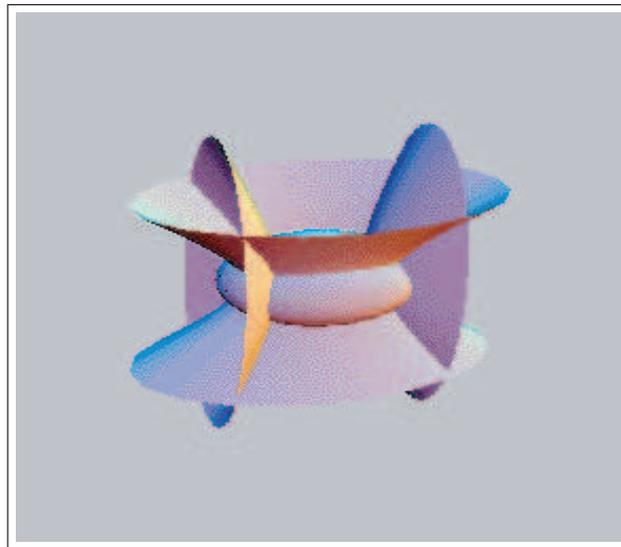


Figure 1.4: Quádricas confocais

onde supomos $a < b < c$. Assim:

$$\begin{cases} \text{Se } \lambda < a, & \mathcal{Q}_\lambda \text{ é um elipsóide} \\ \text{Se } a < \lambda < b, & \mathcal{Q}_\lambda \text{ é um hiperbolóide de uma folha} \\ \text{Se } b < \lambda < c, & \mathcal{Q}_\lambda \text{ é um hiperbolóide de duas folhas} \end{cases} \quad (1.8.39)$$

Cada uma das secções das quádricas da família \mathcal{Q}_λ , pelos planos principais $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$, formam um sistema de cónicas confocais.

Quando $\lambda \rightarrow a - 0$, o eixo menor do elipsóide \mathcal{Q}_λ , converge para 0 e esse elipsóide colapsa na parte do plano $z = 0$, interior à elipse:

$$\frac{x^2}{a-c} + \frac{y^2}{b-c} = 1 \quad (1.8.40)$$

Quando $a < \lambda < b$, \mathcal{Q}_λ é um hiperbolóide de uma folha que, quando $\lambda \rightarrow a + 0$ colapsa na parte do plano $z = 0$, exterior à elipse (1.8.40). Quando $\lambda \rightarrow b - 0$, esse hiperbolóide colapsa na parte do plano $y = 0$ que contem a origem e é limitada pela hipérbole:

$$\frac{x^2}{a-b} - \frac{z^2}{b-c} = 1 \quad (1.8.41)$$

Finalmente, quando $b < \lambda < c$, \mathcal{Q}_λ é um hiperbolóide de duas folhas que, quando $\lambda \rightarrow b + 0$ colapsa na parte do plano $y = 0$, que não contem a origem e é limitada pela hipérbole (1.8.41). Quando $\lambda \rightarrow c - 0$, esse hiperbolóide colapsa no plano $x = 0$.

A elipse (1.8.40), no plano $z = 0$, e a hipérbole (1.8.41), no plano $y = 0$, dizem-se as **cónicas focais** da família \mathcal{Q}_λ . Os vértices da elipse focal são:

$$(\pm\sqrt{a-c}, 0, 0)$$

e os focos são:

$$(\pm\sqrt{a-b}, 0, 0)$$

Por outro lado, os vértices da hipérbole focal são $(\pm\sqrt{a-b}, 0, 0)$, enquanto que os focos são $(\pm\sqrt{a-c}, 0, 0)$. Portanto, nas cónicas focais, os vértices de uma são os focos da outra.

Os resultados seguintes são válidos $\forall n$. No entanto, por simplicidade, vamos restringir a discussão ao caso $n = 3$, isto é, a quádricas confocais em \mathbb{R}^3 .

► **Proposição 1.11 (Jacobi)** ... *Por cada ponto $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, com $xyz \neq 0$, passam exactamente 3 quádricas da família de quádricas confocais \mathcal{Q}_λ , definida por (1.8.38). Além disso, as quádricas que passam em q intersectam-se aí ortogonalmente (isto é, os hiperplanos tangentes, em q , às quádricas que por aí passam, são ortogonais dois a dois).*

- **Dem.:** Fixemos o ponto $q = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, com $xyz \neq 0$, e consideremos a função $\Phi(\lambda)$ definida em (1.8.38). O seu gráfico está representado na figura 1.5. A recta $z = 1$ intersecta esse gráfico em exactamente 3 pontos cujas abcissas $\lambda_1(q)$, $\lambda_2(q)$, $\lambda_3(q)$ são exactamente os valores do parâmetro λ das 3 quádricas que passam em q . Os escalares $\lambda_1(q)$, $\lambda_2(q)$, $\lambda_3(q)$ dizem-se as **coordenadas elípticas** de q .

Figure 1.5:

O hiperplano afim tangente à quádrica $\Phi(\lambda) = 1$, num dos seus pontos $q = (q_i) = (x, y, z)$, é perpendicular ao gradiente $\nabla\Phi_\lambda(q) = \left(\frac{\partial\Phi_\lambda}{\partial q_i}(q) = \frac{2q_i}{a_i - \lambda}\right)$, onde pusemos $(a_i) = (a, b, c)$.

Se $q \in \mathcal{Q}_\lambda \cap \mathcal{Q}_\mu$, então $\nabla\Phi_\lambda(q) \cdot \nabla\Phi_\mu(q) = 0$. De facto:

$$0 = \sum_i q_i^2 \left(\frac{1}{a_i - \lambda} - \frac{1}{a_i - \mu} \right) = (\lambda - \mu) \sum_i \frac{q_i^2}{(a_i - \lambda)(a_i - \mu)}$$

■.

► **Proposição 1.12 (Chasles)** ... Seja \mathcal{Q}_λ uma família de quádricas confocais, definida por (1.8.38). Uma recta em \mathbb{R}^3 , em posição geral, é sempre tangente a 2 quádricas diferentes dessa família. Além disso, os planos tangentes a essas quádricas, nos pontos de tangência, são ortogonais.

• **Dem.:** Consideremos uma recta em \mathbb{R}^3 definida paramêtricamente por:

$$\xi = q + tp, \quad \text{isto é} \quad \xi_i = q_i + tp_i, \quad i = 1, 2, 3 \quad (1.8.42)$$

Os pontos de intersecção desta recta com uma quádrica \mathcal{Q}_λ , definida por (1.8.38), são determinados resolvendo a equação em t :

$$\sum_i \frac{(q_i + tp_i)^2}{a_i - \lambda} = 1$$

isto é:

$$\left(\sum_i \frac{p_i^2}{a_i - \lambda} \right) t^2 + 2 \left(\sum_i \frac{q_i p_i}{a_i - \lambda} \right) t + \left(\sum_i \frac{q_i^2}{a_i - \lambda} - 1 \right) = 0 \quad (1.8.43)$$

Esta equação é do segundo grau em t :

$$A(\lambda)t^2 + 2B(\lambda)t + C(\lambda) = 0$$

A condição para que ela tenha uma única solução (i.e., para que a recta seja tangente à quádrica), é que o seu discriminante seja nulo:

$$\Delta = B(\lambda)^2 - 4A(\lambda)C(\lambda) = 0$$

Esta é agora uma equação do segundo grau em λ que permite genêricamente calcular as duas raízes λ, μ , que correspondem às duas quádricas às quais a recta dada é tangente.

Se q', q'' são os pontos de tangência da recta com as quádricas \mathcal{Q}_λ e \mathcal{Q}_μ , respectivamente, então os planos tangentes a essas quádricas são ortogonais se e só se $\nabla\Phi_\lambda(q') \cdot \nabla\Phi_\mu(q'') = 0$, isto é:

$$\sum_i \frac{q'_i q''_i}{(a_i - \lambda)(a_i - \mu)} = 0$$

o que é verdade uma vez que q', q'' estão ambos sobre uma tangente comum a ambas as quádricas. ■

► **Proposição 1.13 (Jacobi/Chasles)** ... Dada uma geodésica num elipsóide $\mathcal{Q}_0 \subset \mathbb{R}^3$, existe uma quádrica \mathcal{Q} , confocal a \mathcal{Q}_0 , à qual todas as rectas tangentes a essa geodésica são também tangentes.

O fluxo geodésico em \mathcal{Q}_0 é integrável.

• **Dem.:** Dada uma recta tangente a \mathcal{Q}_0 , ela é tangente a um certa quádrica confocal \mathcal{Q} , de acordo com o teorema de Chasles. Sejam $\xi \in \mathcal{Q}_0$ e $\eta \in \mathcal{Q}$ os pontos de tangência. Na vizinhança de cada um destes pontos construímos os Hamiltonianos H e G , que definem o fluxo de rectas tangentes respectivamente a \mathcal{Q}_0 e a \mathcal{Q} .

Cada uma das curvas integrais de X_H , em $\{H = 0\}$, consiste das rectas tangentes a uma mesma geodésica de \mathcal{Q}_0 . Mas, pelo teorema de Chasles, os planos tangentes a duas quádricas confocais nos pontos onde elas tocam uma mesma recta tangente, são ortogonais. Logo, G , que define, em $\{G = 0\}$, o fluxo de rectas tangentes a \mathcal{Q} , comuta com H , atendendo à proposição 1.10.

Portanto G é integral primeiro de H e o fluxo geodésico em \mathcal{Q}_0 é integrável. ■

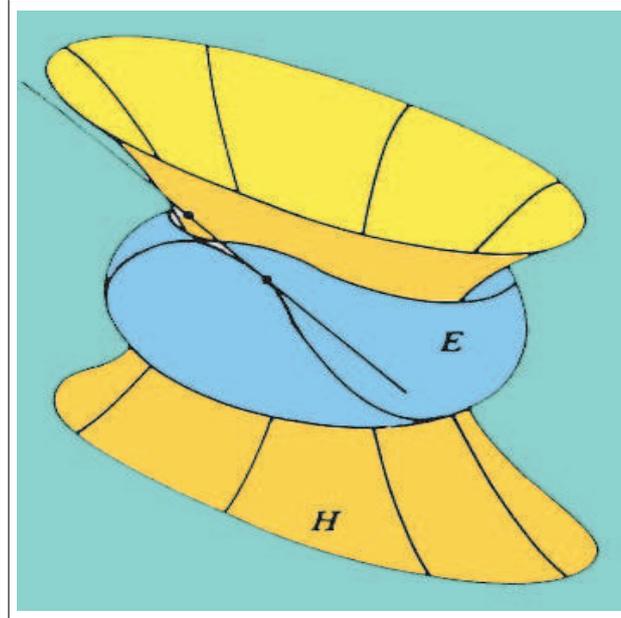


Figure 1.6: Geodésicas num elipsóide

1.9 Sistemas completamente integráveis

► **Teorema 1.5 (Liouville-Arnold)** ... Seja (M, ω) uma variedade simpléctica de dimensão $2n$ e $\{H = F_1, F_2, \dots, F_n\}$, n funções em involução:

$$\{F_i, F_j\} = 0, \quad \forall i, j \quad (1.9.1)$$

Seja M_c , onde $c = (c_i) \in \mathbb{R}^n$, um nível comum regular das funções F_i , isto é:

$$M_c = \{x \in M : F_i(x) \equiv c_i, \quad i = 1, \dots, n\} \quad (1.9.2)$$

e as diferenciais $dF_i(x)$, $i = 1, \dots, n$ são linearmente independentes $\forall x \in M_c$, de tal forma que M_c é uma subvariedade de dimensão n em M .

Então:

1. M_c é uma variedade invariante sob o fluxo de cada um dos campos Hamiltonianos X_{F_i} , isto é, todos estes campos são tangentes a M_c .

2. Se M_c for compacto e conexo, então é difeomorfo a um toro n -dimensional $T^n = (S^1)^n$. No caso geral, se M_c é conexa (mas não necessariamente compacta) e se todos os campos X_{F_i} são completos, então M_c é difeomorfa ao quociente de \mathbb{R}^n por um reticulado de \mathbb{R}^n de rank $r \leq n$. Portanto M_c é difeomorfa a $T^r \times \mathbb{R}^{n-r}$.
3. Se M_c for compacto e conexo, portanto difeomorfo a um toro n -dimensional T^n , existe uma vizinhança aberta de M_c em M , na qual podemos definir coordenadas locais canônicas $(I_1, \dots, I_n, \phi^1, \dots, \phi^n)$, onde $0 \leq \phi^i \leq 2\pi$, chamadas coordenadas **acção-ângulo**, tais que:

- (i). a forma simpléctica ω , expressa nas coordenadas (I, ϕ) tem a forma canónica:

$$\omega = dI \wedge d\phi = \sum_i dI_i \wedge d\phi^i \quad (1.9.3)$$

De forma equivalente:

$$\{I_i, I_j\} = \{\phi^i, \phi^j\} = 0, \quad \{I_i, \phi^j\} = \delta_{ij} \quad (1.9.4)$$

- (ii). As funções $I = (I_1, \dots, I_n)$ são coordenadas nas direcções transversais ao toro M_c e podem ser funcionalmente expressas em termos dos integrais F_i , isto é:

$$I_i = I_i(F_1, \dots, F_n), \quad i = 1, \dots, n \quad (1.9.5)$$

Nestas coordenadas o toro M_c é definido por:

$$I_1 = \dots = I_n = 0$$

- (iii). As funções $\phi = (\phi^1, \dots, \phi^n)$ são coordenadas angulares no toro $M_c = T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ (e portanto também nos toros próximos deste, que são variedades de nível dos integrais F_i). Cada $\phi^i \in [0, 2\pi[$ é uma coordenada angular no i -factor S^1 de $M_c = T^n$.
- (iv). Nas coordenadas acção-ângulo (I, ϕ) , um campo Hamiltoniano X_F , onde F é um qualquer dos integrais F_i , ou qualquer função que possa ser funcionalmente expressa em termos dos integrais F_i (em particular $H = F_1$), é tangente ao toro M_c , e as suas curvas integrais são descritas pelo sistema de equações diferenciais:

$$\dot{\phi}_i = w_i \text{ constantes} \quad (1.9.6)$$

onde os $w_i = w_i(I_1 = 0, \dots, I_n = 0)$, $i = 1, \dots, n$ são constantes, que dependem do nível c (note que as equações $I_i = 0$ são equivalentes às equações $F_i = c_i$, que definem o toro M_c).

Portanto o campo Hamiltoniano X_F tem uma forma particularmente simples no toro $M_c = T^n$ - as suas componentes são constantes e as suas curvas integrais são rectas enroladas no toro e descrevem por isso um movimento condicionalmente periódico de frequências (w_1, \dots, w_n) . Em cada ponto de M_c os campos X_{F_i} formam uma base para o espaço tangente ao toro.

- (v). As frequências w_i do item anterior, também estão definidas numa certa vizinhança do toro M_c . Portanto, nas variedades de nível próximas do toro M_c , que são ainda toros n -dimensionais, também se tem que $\dot{\phi} = w_i(I^o)$, onde as equações $I_i = I_i^o$ definem uma variedade de nível próxima de M_c . Portanto, o sistema inicial, definido pelo Hamiltoniano $H = F_1$, é descrito numa vizinhança de M_c , nas coordenadas (I, ϕ) , na seguinte forma:

$$\begin{cases} \dot{I}_i &= 0 \\ \dot{\phi}_i &= w_i(I_1, \dots, I_n) \end{cases}, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.9.7)$$

- **Dem.:** Os campos X_{F_i} são linearmente independentes em cada ponto, uma vez que, por hipótese, as diferenciais dF_i o são. Além disso:

$$X_{F_i} F_j = \{F_i, F_j\} = 0$$

o que implica que os campos X_{F_i} são tangentes às variedades de nível dos F_i .

Por outro lado:

$$[X_{F_i}, X_{F_i}] = X_{\{F_i, F_i\}} = 0$$

e portanto os campos comutam assim como os respectivos fluxos. Designando o fluxo do campo X_{F_i} por $\Phi_{t_i}^i$, temos pois uma acção do grupo aditivo \mathbb{R}^n na variedade M , definida por:

$$t \cdot x = (t_1, \dots, t_n) \cdot x \stackrel{\text{def}}{=} \Phi_{t_1}^1 \circ \dots \circ \Phi_{t_n}^n(x) \quad (1.9.8)$$

As órbitas desta acção coincidem com as componentes conexas das variedades de nível dos F_i . O subgrupo de isotropia de um ponto x_o :

$$\Gamma(x_o) = \{t \in \mathbb{R}^n : t \cdot x_o = x_o\}$$

é um subgrupo discreto de \mathbb{R}^n e portanto existem r vectores linearmente independentes v_1, \dots, v_r , em \mathbb{R}^n , tais que:

$$\Gamma(x_o) = \left\{ \sum_i m_i v_i : m_i \in \mathbf{Z} \right\}$$

isto é, $\Gamma(x_o)$ é o reticulado gerado pelos vectores v_i .

Concluindo - cada componente conexa de uma variedade de nível dos F_i é difeomorfa ao produto de um toro por um espaço Euclideano:

$$\mathbb{R}^n / \Gamma(x_o) \simeq T^r \times \mathbb{R}^{n-r}$$

Construção das variáveis acção-ângulo

Consideremos agora um sistema Hamiltoniano completamente integrável (M, ω, H) , com $\{H = F_1, F_2, \dots, F_n\}$, n integrais em involução:

$$\{F_i, F_j\} = 0, \quad \forall i, j \quad (1.9.9)$$

e seja M_c , onde $c = (c_i) \in \mathbb{R}^n$, um toro de Liouville, isto é, um nível comum regular, compacto e conexo, dos integrais F_i .

Vámos construir um symplectomorfismo:

$$\Psi : F^{-1}(U) \longrightarrow B^n \times T^n \quad (1.9.10)$$

Localmente, a forma ω é exacta, digámos $\omega = -d\theta$. Para sermos mais concretos, suponhamos que $\omega = dq \wedge dp$ e $\theta = pdq$. Seja $\gamma_1(c), \dots, \gamma_n(c)$ uma base para o primeiro grupo de homologia $H^1(M_c; \mathbf{Z})$, e definámos a aplicação:

$$I = (I_1, \dots, I_n) : U \longrightarrow \mathbb{R}^n$$



Figure 1.7:

através de:

$$I_i = I_i(c) = \int_{\gamma_i(c)} p dq, \quad i = 1, \dots, n \quad (1.9.11)$$

Suponhamos que I é um difeomorfismo de U sobre a imagem $I(U)$, e ainda que $I(U) = B^n$ é uma bola em \mathbb{R}^n , centrada na origem, e consideremos a função inversa:

$$c = c(I) : B^n \rightarrow U \quad (1.9.12)$$

Vamos supor que o toro $M_{c(I)}$ é localmente parametrizado pelas coordenadas q , de tal forma que $M_{c(I)}$ é definida localmente como gráfico de uma função:

$$p = p(q, I)$$

Por outras palavras - para q_0 fixo, e para cada $I \in B^n$ fixo, resolvemos a equação:

$$F(q, p) = c(I) \quad (1.9.13)$$

em ordem a p , para obter uma função:

$$p = p(q, I) \quad (1.9.14)$$

que parametriza localmente o toro $M_{c(I)}$.

Como já vimos, $\forall c$, $M_c = T^n = S^1 \times \dots \times S^1$ é um toro Lagrangeano: $\omega|_{M_c} = 0$. Portanto $d\theta|_{M_c} = 0$ e, pelo Lema de Poincaré, $\theta|_{M_c}$ é localmente exacta, isto é, $\theta = dS$ para alguma função $S : M_c \rightarrow \mathbb{R}$.

Em particular, para $c = c(I)$, a função $S : M_{c(I)} \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $\theta = dS$, pode ser vista como uma função das coordenadas q , para cada I fixo. Mais concretamente, definimos a **função geradora** S por:

$$S = S(q, I) = \int_{A_o(q_o, p_o)}^{A(q, p)} p(q, I) dq \quad (1.9.15)$$

onde o integral é calculado ao longo de um qualquer caminho em $M_{c(I)}$ que una um ponto inicial $A_o(q_o, p_o = p(q_o, I)) \in M_c$ ao ponto $A(q, p = p(q, I)) \in M_{c(I)}$. Isto está localmente

bem definido, uma vez que $\theta|_{M_{c(I)}} = (pdq)|_{M_{c(I)}}$ é fechada, desde que A esteja suficiente próximo de A_o .

Definámos finalmente as variáveis ângulo ϕ^i , em $F^{-1}(U)$, através de:

$$\phi^i(q, p) = \left. \frac{\partial S(q, I)}{\partial I_i} \right|_{I=I(c=F(q,p))} \quad (1.9.16)$$

de tal forma que $\phi = (\phi^i) : F^{-1}(U) \rightarrow T^n$.

A variação de ϕ^i em cada ciclo $\gamma_k(c(I))$, em $M_{c(I)}$, é dada por:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_k(c(I))} d\phi^i &= \int_{\gamma_k(c(I))} d \left(\frac{\partial S(q, I)}{\partial I_i} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial I_i} \int_{\gamma_k(c(I))} dS \\ &= \frac{\partial}{\partial I_i} \int_{\gamma_k(c(I))} pdq \\ &= \frac{\partial I_k}{\partial I_i} \\ &= \delta_{ik} \end{aligned} \quad (1.9.17)$$

isto é, os ϕ^i estão bem definidos $mod(2\pi)$ e definem portanto coordenadas angulares em $M_{c(I)}$.

O symplectomorfismo $\Psi : F^{-1}(U) \rightarrow B^n \times T^n$ fica então definido por $\Psi = (I \circ F, \phi)$. Note ainda que:

$$p_i(q, I) = \frac{\partial S(q, I)}{\partial q_i} \quad (1.9.18)$$

Para ver isto, fixemos I . No toro $M_{c(I)}$, a aplicação $S(q, I)$ é dada por (1.9.15), isto é, por:

$$S(q, I) = \text{constante} + \sum_i \int_{q_o}^q p_i(q, I) dq^i \quad (1.9.19)$$

Se tomarmos como caminho de integração, a reunião dos dois segmentos:

$$\overline{(q_o, p_o), (q_o, p(q, I))}, \quad \text{e} \quad \overline{(q_o, p(q, I)), (q, p)}$$

deduzimos as duas relações:

$$\phi^i(q, p) = \frac{\partial S}{\partial I_i}, \quad \text{e} \quad p_i(q, p) = \frac{\partial S}{\partial q^i}$$

isto é, S é uma função geradora da transformação $(q, p) \mapsto (I, \phi)$ e esta é pois canónica. ■

► **Definição 1.9** ... Um sistema Hamiltoniano (M, ω, H) diz-se **completamente integrável** se existirem n funções $\{H = F_1, F_2, \dots, F_n\}$, em involução e que satisfazem as condições do teorema de Liouville-Arnold.

1.9.1 Sistemas com um grau de liberdade

Cálculo das variáveis acção-ângulo para sistemas com um grau de liberdade (exemplo concreto do oscilador harmónico):

1. Aqui só temos o integral de energia $H = F_1$. Em vez de c é mais usual pôr $c = E$. No caso concreto do oscilador harmónico:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2q^2$$

O toro invariante $H \equiv E > 0$ é dado por:

$$\frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2q^2 = E$$

que é uma elipse no espaço de fases de semi-eixos $\sqrt{2mE}$ e $\sqrt{2E/mw^2}$. O ciclo gerador de homologia, $\gamma(E)$, é a própria elipse e a variável de acção é definida por:

$$\begin{aligned} I = I(E) &= \int_{\gamma(E)} p dq \\ &= \text{área limitada pela elipse } \{H = E\} \\ &= \pi\sqrt{2mE}\sqrt{2E/mw^2} \\ &= 2\pi E/w \end{aligned} \tag{1.9.20}$$

Invertendo obtém-se:

$$E = E(I) = wI/2\pi \tag{1.9.21}$$

Figure 1.8: .

2. Resolvemos a equação $F(q, p) = c(I) = E(I)$, em ordem a p , para obter uma função $p = p(q, I)$.

No caso do oscilador, essa equação é:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2q^2 = E(I) = wI/2\pi$$

o que dá:

$$p = p(q, I) = \sqrt{mwI/\pi - (mwq)^2}$$

3. Definimos a função geradora $S = S(q, I)$ através do integral (1.9.15). No caso do oscilador:

$$\begin{aligned} S(q, I) &= \int_0^q p(q, I) dq \\ &= \int_0^q \sqrt{mwI/\pi - (mwq)^2} dq \\ &= I(\phi + \sin \phi \cos \phi), \quad \text{onde } \sin \phi = q\sqrt{mwI/2I} \end{aligned} \quad (1.9.22)$$

4. A variável ângulo é então dada por (1.9.16), isto é, por:

$$\begin{aligned} \phi &= \left. \frac{\partial S(q, I)}{\partial I} \right|_{I=I(E=H(q,p))} \\ &= \phi + \sin \phi \cos \phi + I(2 \cos^2 \phi) \frac{\partial \phi}{\partial I} \\ &= \phi \end{aligned} \quad (1.9.23)$$

onde usámos o facto $\frac{\partial \phi}{\partial I} = -\tan \phi / 2I$.

5. O hamiltoniano, nas novas coordenadas (I, ϕ) é dado por:

$$K(I, \phi) = wI$$

e as equações canónicas por:

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= \frac{\partial H}{\partial I} = w \\ \dot{I} &= \frac{\partial H}{\partial \phi} = 0 \end{aligned} \quad (1.9.24)$$

donde:

$$\begin{aligned} \phi(t) &= wt + \phi^o \\ I &= I_o \end{aligned} \quad (1.9.25)$$

Vejámos um outro exemplo concreto, com um Hamiltoniano:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + U \tan^2(\alpha q)$$

onde U, α são constantes positivas. A equação (1.9.26) dá a acção:

$$I = I(E) = \frac{1}{\pi} \int_{q_1}^{q_2} \sqrt{2m(E - U \tan^2(\alpha q))} dq \quad (1.9.26)$$

onde $\tan^2 \alpha q_2 = E/U, q_1 = -q_2$. Calculando o integral, obtem-se:

$$\alpha I = \sqrt{2m(E + U)} - \sqrt{2mU}$$

O potencial e as curvas de fase nas coordenadas (q, p) e (I, ϕ) estão representadas na figura seguinte:

Note que $I \geq 0$ com igualdade sse $E = 0$. Invertendo esta relação obtemos o Hamiltoniano:

$$H(I, \phi) = \alpha I[\alpha I + 2\sqrt{2mU}]/2m \quad (1.9.27)$$

A frequência angular é dada por:

$$w = \frac{\partial H}{\partial I} = \alpha I[\alpha I + 2\sqrt{2mU}]/m = \alpha \sqrt{2(E + U)}/m$$

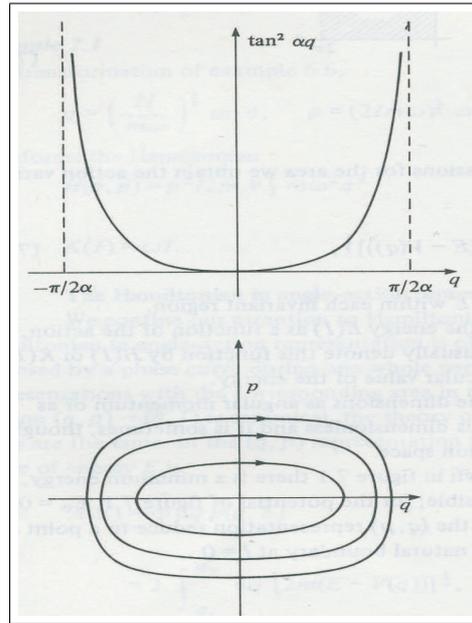


Figure 1.9:

1.10 Sistemas mecânicos com simetria. Aplicação momento

► **Definição 1.10** ... Um sistema mecânico com simetria (Q, K, V, G) , é constituído por:

- Uma variedade diferenciável Q - o espaço de configuração do sistema.
- Uma métrica Riemanniana g em Q . $K = \frac{1}{2}g$ é a **energia cinética** dessa métrica: $K(q, v) = \frac{1}{2}g_q(v, v)$, $v \in T_qQ$.
- Uma **energia potencial** $V \in C^\infty(Q)$.
- Uma **acção de simetria**, isto é, uma acção C^∞ de um grupo de Lie G , que actua à esquerda de Q , como um grupo de isometrias da métrica g , preservando também o potencial V . Portanto se $\Phi : G \times Q \rightarrow Q$ é a referida acção:

$$g_{a \cdot q}(d\Phi_a(v), d\Phi_a(w)) = g_q(v, w)$$

$\forall v, w \in T_qQ, \forall q \in Q, \forall a \in G$, e:

$$V(a \cdot q) = V(q) \quad \forall a \in G, \forall q \in Q$$

■.

Se \mathfrak{g} é a álgebra de Lie de G , para cada $\xi \in \mathfrak{g}$, define-se o gerador infinitesimal da acção Φ , associado a ξ , como sendo o campo de vectores $\xi_Q \in \mathfrak{X}(Q)$ definido por:

$$\xi_Q(q) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp t\xi}(q) \tag{1.10.1}$$

Temos assim uma aplicação natural:

$$\mathfrak{g} \rightarrow T_qQ \quad \xi \mapsto \xi_Q(q)$$

► **Definição 1.11** ... Seja (Q, K, V, G) um sistema mecânico com simetria. Defina-se então a respectiva **aplicação momento**, como sendo a aplicação:

$$J : TQ \longrightarrow \mathfrak{g}^*$$

definida através de:

$$J : (q, v) \mapsto \left(J(q, v) : \xi \mapsto J(q, v)(\xi) \stackrel{\text{def}}{=} g_q(v, \xi_Q(q)) \right) \quad (1.10.2)$$

Para cada $\xi \in \mathfrak{g}$, define-se ainda uma aplicação $\widehat{J}_\xi : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, através de:

$$\widehat{J}_\xi(q, v) \stackrel{\text{def}}{=} J(q, v)(\xi) = g_q(v, \xi_Q(q)) \quad (1.10.3)$$

■.

Se $\Phi : G \times Q \rightarrow Q$ é a acção de simetria referida na definição anterior, então Φ induz uma acção Φ^T em TQ , dita a **acção tangente**, definida por:

$$\Phi_a^T(q, v) \stackrel{\text{def}}{=} (a \cdot q, d\Phi_a(v))$$

de tal forma que π é G -equivariante:

$$\begin{array}{ccc} TQ & \xrightarrow{\Phi_a^T} & TQ \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ Q & \xrightarrow{\Phi_a} & Q \end{array}$$

Se $\xi_{TQ} \in \mathfrak{X}(TQ)$ representa o gerador infinitesimal desta acção tangente, associado a um elemento $\xi \in \mathfrak{g}$:

$$\xi_{TQ}(q, v) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi_{\exp t\xi}^T(q, v) \in T_{(q,v)}TQ$$

então a G -equivariância de π implica que:

$$d\pi \circ \xi_{TQ} = \xi_Q \circ \pi \quad (1.10.4)$$

Recorde que em TQ temos uma estrutura simpléctica dada pela forma simpléctica $\omega_g = (g^\flat)^*\omega$, onde ω é a forma simpléctica canónica em T^*Q . A acção tangente Φ^T é simpléctica, i.e., para cada $a \in G$, $\Phi_a^T : TQ \rightarrow TQ$ é um difeomorfismo simpléctico de (TQ, ω_g) . De facto, $(\Phi_a^T)^*\theta_g = \theta_g$, onde $\theta_g = (g^\flat)^*\theta$, é o pull-back da forma de Liouville θ em T^*Q , por g^\flat .

► **Proposição 1.14** ... Consideremos, para cada $\xi \in \mathfrak{g}$, a função $\widehat{J}_\xi : TQ \rightarrow \mathbb{R}$, definida em (1.10.3). Então:

$$\widehat{J}_\xi = i_{\xi_{TQ}}\theta_g \quad (1.10.5)$$

e o campo hamiltoniano associado, $X_{\widehat{J}_\xi} \in \mathfrak{X}(TQ)$, é exactamente o gerador infinitesimal ξ_{TQ} da acção tangente, isto é:

$$X_{\widehat{J}_\xi} = \xi_{TQ} \quad (1.10.6)$$

- **Dem.:** De facto:

$$\begin{aligned}
(i_{\xi_{TQ}}\theta_g)(q, v) &= \theta_g(q, v)(\xi_{TQ}(q, v)) \\
&= g_q(v, d\pi\xi_{TQ}(q, v)) \\
&= g_q(v, \xi_Q(q)) \\
&= \widehat{J}_\xi(q, v)
\end{aligned}$$

isto é:

$$\widehat{J}_\xi = i_{\xi_{TQ}}\theta_g \quad (1.10.7)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned}
(\Phi_a^T)^*\theta_g = \theta_g &\Rightarrow L_{\xi_{TQ}}\theta_g = 0 \\
&\Rightarrow di_{\xi_{TQ}}\theta_g + i_{\xi_{TQ}}d\theta_g = 0 \\
&\Rightarrow d\widehat{J}_\xi = i_{\xi_{TQ}}\omega_g \quad \text{por (1.10.7)} \\
&\Rightarrow i_{X_{\widehat{J}_\xi}}\omega_g = i_{\xi_{TQ}}\omega_g \\
&\Rightarrow X_{\widehat{J}_\xi} = \xi_{TQ} \quad \text{porque } \omega_g \text{ é não degenerada}
\end{aligned}$$

■.

Estâmos agora aptos a enunciar e demonstrar o seguinte teorema fundamental:

► **Teorema 1.6** [Teorema de E. Noether] ... *Seja (Q, K, V, G) um sistema mecânico com simetria, e $J : TQ \rightarrow \mathfrak{g}$ a respectiva aplicação momento.*

Então J é integral primeiro do campo X_E , isto é, J é constante ao longo das curvas integrais do campo hamiltoniano X_E , onde $E = K + V \circ \pi : TQ \rightarrow \mathbb{R}$ é a energia total do sistema.

- **Dem.:** Sabemos que Φ_a^T deixa E invariante: $E \circ \Phi_a^T = E, \forall a \in G$, por definição da acção de simetria. Em particular, para cada $\xi \in \mathfrak{g}$, temos que:

$$E(\Phi_{\exp t\xi}^T(q, v)) = E(q, v), \quad \forall (q, v) \in TQ$$

Derivando esta expressão em ordem a t , para $t = 0$, obtemos:

$$\begin{aligned}
dE_{(q,v)}\xi_{TQ}(q, v) = 0 &\Rightarrow \omega_g(X_E(q, v), \xi_{TQ}(q, v)) = 0 \\
&\Rightarrow \omega_g(X_E(q, v), X_{\widehat{J}_\xi}(q, v)) = 0 \\
&\Rightarrow \{E, \widehat{J}_\xi\}(q, v) = 0
\end{aligned} \quad (1.10.8)$$

por (1.10.6), e ainda por definição de X_E e do parêntesis de Poisson, ■.

1.10.1 Exemplo. O Problema de Kepler

Vamos considerar o seguinte um sistema mecânico com simetria:

$$\boxed{(Q, K, V, G) = \left(\mathbb{R}^2 - \{0\}, K = \frac{1}{2}g, V(\mathbf{x}) = \frac{1}{\|\mathbf{x}\|}, G = SO(2) \cong S^1 \right)} \quad (1.10.9)$$

onde g é a métrica euclideana usual em \mathbb{R}^2 . Este sistema descreve o movimento de uma partícula de massa unitária, que se move no plano, sob a acção de um campo de forças central Newtoniano:

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x}) = -\frac{1}{\|\mathbf{x}\|^2} \frac{\partial}{\partial \|\mathbf{x}\|} = -\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}$$

\mathbf{x} é o vector de posição da partícula, e $r = \|\mathbf{x}\|$.

É natural efectuar os cálculos em coordenadas polares r, θ em $Q = \mathbb{R}_+ \times S^1$. O grupo de simetria $G = SO(2)$ actua em Q por rotações positivas, isto é, se $R_\varphi \cong \varphi$ é a rotação de ângulo φ , no sentido directo, a acção de simetria é $\Phi : SO(2) \times Q \rightarrow Q$, onde:

$$\Phi(\varphi, (r, \theta)) \stackrel{\text{def}}{=} (r, \theta + \varphi)$$

Claramente que Φ é uma acção de simetria do sistema dado. Para calcular a respectiva aplicação momento, identificámos $\mathfrak{so}(2) \cong T_1SO(2)$ com $i\mathbb{R} \cong \mathbb{R}$, de tal forma que $\exp(it\xi) = R_{t\xi} \in SO(2)$. Portanto:

$$\begin{aligned} \xi_Q(q) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \Phi(R_{t\xi}, (r, \theta)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (r, \theta + t\xi) \\ &= \xi \frac{\partial}{\partial \theta} \Big|_q \quad \forall q = (r, \theta) \in Q \end{aligned} \quad (1.10.10)$$

A métrica g escreve-se em coordenadas polares na forma:

$$g = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$$

e se $v = \dot{r} \frac{\partial}{\partial r} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \in T_q Q$, então:

$$\begin{aligned} J(q, v)\xi &= g_q(v, \xi_Q(q)) \\ &= g_q \left(\dot{r} \frac{\partial}{\partial r} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}, \xi \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= \xi r^2 \dot{\theta} \end{aligned} \quad (1.10.11)$$

Finalmente, identificando $\mathbb{R} \cong \mathbb{R}^*$, obtemos a aplicação momento J , que não é mais do que o momento angular usual, expresso em coordenadas polares, $J : TQ \rightarrow \mathbb{R}$:

$$\boxed{J(r, \theta, \dot{r}, \dot{\theta}) = r^2 \dot{\theta}} \quad (1.10.12)$$

1.10.2 Geodésicas em superfícies de revolução

Consideremos uma superfície de revolução (Q, g) , em \mathbb{R}^3 , gerada pela revolução de uma curva mergulhada $\gamma :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}^3$, parametrizada por arco:

$$\gamma(s) = (r(s), 0, z(s)), \quad (r'(s))^2 + (z'(s))^2 = 1, \quad r(s) > 0$$

g é a métrica induzida em Q , pela métrica usual de \mathbb{R}^3 .

Como coordenadas locais em Q , usamos as coordenadas s, θ , e a parametrização local:

$$\phi(s, \theta) = (r(s) \cos \theta, r(s) \sin \theta, z(s)) \quad (1.10.13)$$

Nestas coordenadas, a métrica g tem a expressão:

$$g(s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta}) = \dot{s}^2 + r(s)^2 \dot{\theta}^2 \quad (1.10.14)$$

onde $r(s)$ é o raio do paralelo $\theta \rightarrow \phi(s, \theta)$. O Lagrangeano é:

$$L(s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta}) = \frac{1}{2} \left(\dot{s}^2 + r(s)^2 \dot{\theta}^2 \right) \quad (1.10.15)$$

e as equações de Euler-Lagrange são:

$$\begin{cases} \ddot{s} - r(s)r'(s)\dot{\theta}^2 = 0 \\ \frac{d}{dt} \left(r^2(s)\dot{\theta} \right) = 0 \end{cases} \quad (1.10.16)$$

Seja $c(t) = (s(t), \theta(t))$ uma solução deste sistema, i.e., uma geodésica de Q . Podemos já concluir o seguinte:

- os meridianos $t \rightarrow (s(t) = t, \theta(t) \equiv \theta)$ constante, são geodésicas de Q .
- um paralelo $t \rightarrow (s(t) \equiv s \text{ constante}, \theta(t) = t)$ é geodésica (a menos de reparametrização) sse $r'(s) = 0$, isto é, sse s é ponto crítico de r (neste caso, $r(s) = \text{constante} \neq 0$).

Os momentos conjugados são:

$$\begin{aligned} p_s &= L_{\dot{s}} = \dot{s} \\ p_\theta &= L_{\dot{\theta}} = r(s)^2 \dot{\theta} \end{aligned} \quad (1.10.17)$$

donde se deduz que:

$$\dot{s} = p_s, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{r(s)^2}$$

e o Hamiltoniano é:

$$\begin{aligned} H(s, \theta, p_s, p_\theta) &= \left(p_s \dot{s} + p_\theta \dot{\theta} - L(s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta}) \right) \Big|_{\dot{s}=p_s, \dot{\theta}=\frac{p_\theta}{r(s)^2}} \\ &= \frac{1}{2} \left(p_s^2 + \frac{p_\theta^2}{r(s)^2} \right) \end{aligned} \quad (1.10.18)$$

As equações de Hamilton são:

$$\begin{cases} \dot{s} = p_s \\ \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{r(s)^2} \\ \dot{p}_s = -\frac{p_\theta^2}{r(s)^3} r'(s) \\ \dot{p}_\theta = 0 \end{cases} \quad (1.10.19)$$

A segunda equação em (1.10.16) diz que $p_\theta = r(s)^2 \dot{\theta}$ é um integral primeiro do fluxo geodésico.

De facto, este integral existe como consequência da acção de simetria de S^1 , como grupo de rotações (isometrias de g) em torno do eixo dos zz . Em coordenadas locais essa acção $\Psi : S^1 \times Q \rightarrow Q$, define-se por:

$$(\varphi, (s, \theta)) \mapsto (s, \theta + \varphi) \quad (1.10.20)$$

O gerador infinitesimal desta acção é:

$$\xi_Q(s, \theta) = \xi \frac{\partial}{\partial \theta}, \quad \xi \in \mathbb{R} \quad (1.10.21)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} J(s, \theta, \dot{s}, \dot{\theta}) &= g(s, \theta) \left(\dot{s} \frac{\partial}{\partial s} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta}, \xi \frac{\partial}{\partial \theta} \right) \\ &= \xi r(s)^2 \dot{\theta} \end{aligned} \quad (1.10.22)$$

Para $\xi = 1$:

$$p_\theta = J = r(s)^2 \dot{\theta}$$

Este integral admite a seguinte interpretação geométrica. Seja $\alpha(v)$ o ângulo entre o vector $v = \dot{s} \frac{\partial}{\partial s} + \dot{\theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \in T_q^1 Q$, i.e., $\|v\| = 1$, e o vector $\frac{\partial}{\partial \theta}$, tangente ao paralelo que passa em q . Temos então que:

$$\cos \alpha(v) = \frac{\langle v, \frac{\partial}{\partial \theta} \rangle}{\|v\| \|\partial/\partial \theta\|} = \frac{\dot{\theta} r(s)^2}{r(s)} = \dot{\theta} r(s)$$

Se restringimos J a $T^1 Q$ podemos pois escrever:

$$J = r(s) \cos \alpha(v)$$

Como $r(s)$ é a distância entre $q \in Q$ e o eixo dos zz e $\alpha(v)$ o ângulo entre v e o paralelo que passa em q , obtemos a chamada **relação de Clairaut**: “*numa geodésica, parametrizada por arco, $c(t) = (s(t), \theta(t))$, tem-se que:*

$$\boxed{r(s(t)) \cos \alpha(\dot{c}(t)) \equiv \text{constante em } t} \quad (1.10.23)$$

isto é, uma geodésica intersecta sempre os paralelos de tal forma que o produto do raio desses paralelos pelo cosseno do ângulo que ela faz com esses mesmos paralelos, é sempre constante”.

Daqui se deduz que, se $r \cos \alpha = C$, então $|C| = r |\cos \alpha| \leq r$, isto é, a geodésica está sempre situada na região de Q , onde $r \geq |C|$. Além disso, quando $c(t)$ se desloca na direcção dos paralelos de raios crescentes, a inclinação de c relativamente a esses paralelos deve aumentar (para que o produto $r \cos \alpha$ se mantenha constante).

Sabemos já que $T^1 Q$ é invariante sob o fluxo geodésico Φ_t : $\Phi_t(v) \in T^1 Q$, sempre que $v \in T^1 Q$, e, por outro lado, $J(\Phi_t(v)) \equiv C$ constante. Em coordenadas (s, θ) :

$$\begin{aligned} 2K = 2E = \dot{s}^2 + r(s)^2 \dot{\theta}^2 &= 1 && \text{Lei de conservação da energia} \\ r(s)^2 \dot{\theta} &= C && \text{Lei de conservação do momento angular} \end{aligned} \quad (1.10.24)$$

Substituindo $r(s)^2 \dot{\theta} = C$ na primeira equação de Lagrange $\ddot{s} = r(s)r'(s)\dot{\theta}^2$, obtemos:

$$\ddot{s} = r(s)r'(s) \frac{C^2}{r(s)^4} = \frac{r'(s)C^2}{r(s)^3} = -V'_C(s) \quad (1.10.25)$$

onde $V_C(s) = \frac{C^2}{2r(s)^2}$. Isto significa que $s(t)$ varia como num problema com um grau de liberdade com potencial $V_C(s)$, o que permite discutir o comportamento qualitativo das geodésicas, com energia total $2E = 1$, desde que consigámos obter o gráfico de $(C, s) \mapsto V_C(s)$ e analisando para os diversos valores constantes de C .

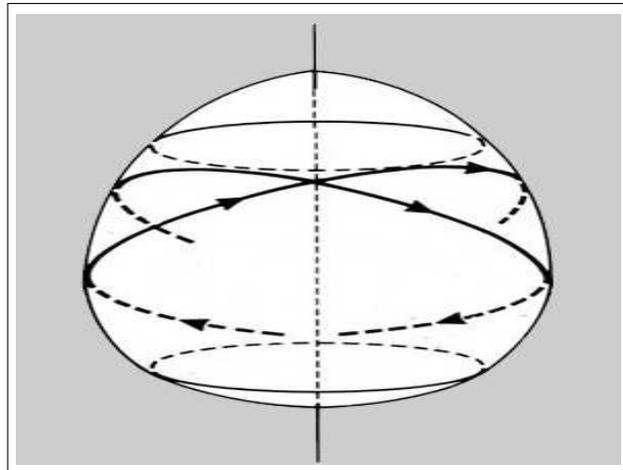


Figure 1.10: Geodésicas numa superfície de revolução

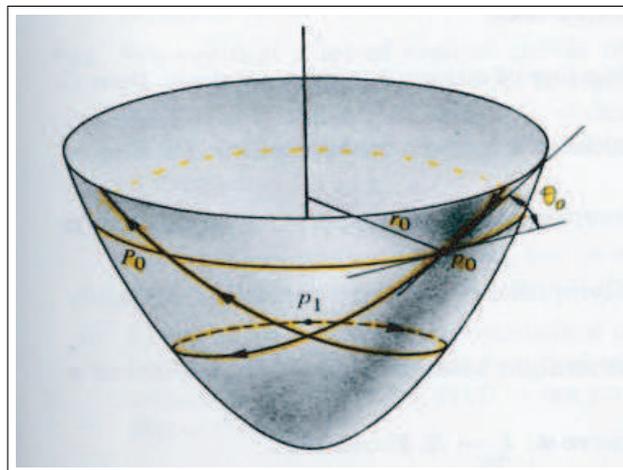


Figure 1.11: Geodésicas numa superfície de revolução

Capítulo 2

Princípios Variacionais

2.1 O problema clássico do cálculo de variações

Seja Q uma variedade de dimensão n (**espaço de configuração**) e $L : \mathbb{R} \times TQ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 (o **Lagrangeano**). Fixemos um intervalo $[t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$, dois pontos q_0, q_1 em Q , e consideremos o espaço de curvas:

$$\mathcal{P} = \stackrel{\text{def}}{=} \{c : [t_0, t_1] \rightarrow Q : c \text{ é de classe } C^2 \text{ e } c(t_0) = q_0, c(t_1) = q_1\} \quad (2.1.1)$$

Neste espaço definimos o funcional $I : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$:

$$I[c] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, c(t), \dot{c}(t)) dt \quad (2.1.2)$$

Consideremos uma família a 1-parâmetro $\alpha \in]-\epsilon, \epsilon[$ de curvas em \mathcal{P} :

$$\alpha \mapsto c_\alpha \in \mathcal{P} \quad (2.1.3)$$

que dependa diferenciavelmente do parâmetro α . Em particular, temos que:

$$c_\alpha(t_0) \equiv q_0, \quad c_\alpha(t_1) \equiv q_1, \quad \forall \alpha$$

Definamos agora um campo de vectores ao longo de $c_0 = c$, através de:

$$\boxed{\eta(t) = \delta c(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} c_\alpha(t) \in T_{c(t)}Q} \quad (2.1.4)$$

$\eta = \delta c$ diz-se uma variação de $c = c_0$, com extremidades fixas, e o conjunto de todas estas variações é, por definição, o espaço tangente a \mathcal{P} , em c :

$$T_c \mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \left\{ \eta = \delta c : [t_0, t_1] \rightarrow TQ : \eta(t) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} c_\alpha(t) \right\} \quad (2.1.5)$$

Definamos ainda a diferencial do funcional I , em c , $dI_c : T_c \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, através de:

$$dI_c(\eta) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} I[c_\alpha] \quad (2.1.6)$$

onde $\eta = \delta c$ é uma variação de $c = c_0$, com extremidades fixas.

Sejam $q = (q^i)$ coordenadas locais em Q e $(q, \dot{q}) = (q^i, \dot{q}^i)$ as correspondentes coordenadas para TQ . Pondo:

$$\phi(\alpha) = I[c_\alpha] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, c_\alpha(t), \dot{c}_\alpha(t)) dt$$

calculemos $\phi'(0) = \frac{d}{d\alpha} \Big|_{\alpha=0} I[c_\alpha] = dI_c(\eta)$, usando a regra da cadeia e a derivação sob o sinal integral.

Usando sistematicamente a convenção de Einstein, vem que:

$$\phi'(0) = \int_{t_0}^{t_1} [L_{q^i}(t, q(t), \dot{q}(t)) \eta^i(t) + L_{\dot{q}^i}(t, q(t), \dot{q}(t)) \dot{\eta}^i(t)] dt \quad (2.1.7)$$

onde pusemos $L_{q^i} = \frac{\partial L}{\partial q^i}$, $L_{\dot{q}^i} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i}$. Podemos ainda escrever o integral (2.1.7) na seguinte forma vectorial simplificada:

$$\int_{t_0}^{t_1} [L_q(t) \eta(t) + L_{\dot{q}}(t) \dot{\eta}(t)] dt \quad (2.1.8)$$

Integrando por partes e usando a hipótese de que $\eta(t_0) = 0 = \eta(t_1)$, obtemos:

$$\int_{t_0}^{t_1} \left[L_q(t) - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}}(t) \right] \eta(t) dt \quad (2.1.9)$$

e como o integrando é contínuo e esta relação deverá ser válida $\forall \eta$, deduzimos o seguinte teorema:

► **Teorema 2.1** ... Uma curva $c \in \mathcal{P}$ é ponto crítico do funcional $I : \mathcal{P} \rightarrow \mathbb{R}$, sse c satisfaz as equações de Euler-Lagrange:

$$\boxed{-\frac{d}{dt} L_{\dot{q}}(t, q(t), \dot{q}(t)) + L_q(t, q(t), \dot{q}(t)) = 0} \quad (2.1.10)$$

■.

As equações de Euler-Lagrange formam um sistema de n ODE's de segunda ordem, que escrevemos na forma simplificada seguinte:

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{q}^i} + L_{q^i} = 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.1.11)$$

A solução geral deste sistema depende pois de $2n$ parâmetros que devem ser escolhidos para que as condições de fronteira $c(t_0) = q_0, c(t_1) = q_1$ sejam verificadas pela solução. Qualquer solução das equações de Euler-Lagrange diz-se uma **extremal** do problema variacional acima formulado.

Notas ...

1. Quando o Lagrangeano L não depende explicitamente de t , isto é, $L = L(q, \dot{q})$, a chamada **energia** de L :

$$\boxed{E_L(q, \dot{q}) \stackrel{\text{def}}{=} L_{\dot{q}} \dot{q} - L(q, \dot{q})} \quad (2.1.12)$$

ou mais detalhadamente, $E_L(q^i, \dot{q}^i) = L_{\dot{q}^i} \dot{q}^i - L(q^i, \dot{q}^i)$, é um integral primeiro da equação de Euler-Lagrange. De facto, se $q(t)$ é solução da equação (2.1.10), então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E_L(q(t), \dot{q}(t)) &= \frac{d}{dt} (L_{\dot{q}} \dot{q}) - \frac{d}{dt} L(q, \dot{q}) \\ &= \left(\frac{d}{dt} L_{\dot{q}} \right) \dot{q} + L_{\dot{q}} \ddot{q} - L_q \dot{q} - L_{\dot{q}} \ddot{q} \\ &= L_q \dot{q} + L_{\dot{q}} \ddot{q} - L_q \dot{q} - L_{\dot{q}} \ddot{q} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.1.13}$$

2. Quando o Lagrangeano L não depende explicitamente da variável q^i , para um certo $i \in \{1, \dots, n\}$, o chamado **momento conjugado a q^i** :

$$p_i(t, q, \dot{q}) \stackrel{\text{def}}{=} L_{\dot{q}^i}(t, q, \dot{q}) \tag{2.1.14}$$

é um integral primeiro da equação de Euler-Lagrange. De facto, $L_{q^i} = 0$ e a i -ésima equação (2.1.10) fica apenas $-\frac{d}{dt} L_{\dot{q}^i} = 0$, isto é $p_i(q(t), \dot{q}(t)) \equiv c$. Diz-se neste caso que a variável q^i é **cíclica**.

■

2.1.1 Exemplo. A braquistócrona

A braquistócrona (Johann Bernoulli, 1696) é a curva que une dois pontos P_1 e P_2 num plano vertical, de tal modo que um ponto material de massa m , deslizando sem atrito sobre essa curva, sujeito apenas à gravidade, a percorre num tempo mínimo (do grego *brakhystós*: “o mais curto” + *khrónos*: “tempo”).

Figure 2.1: Braquistócrona

Suponhamos que o plano vertical é o plano xy , $P_1 = (0, 0)$, $P_2 = (a, b)$, com $a > 0$ e $b > 0$ e que $y = \varphi(x)$ é a equação da curva braquistócrona (o eixo dos y 's orienta-se para baixo).

A velocidade do ponto material, deslizando sem atrito sobre essa curva, é:

$$v = \frac{ds}{dt} = \sqrt{1 + [y'(x)]^2} \frac{dx}{dt}$$

e como, por outro lado, v é também determinada pela equação de conservação de energia:

$$\frac{1}{2} m v^2 = m g y \quad \Rightarrow \quad v = \sqrt{2 g y}$$

deduzimos que o tempo T de descida de $P_1 = (0, 0)$ até $P_2 = (a, b)$ é dado por:

$$\begin{aligned} T[y(\cdot)] &= \int_0^a \frac{ds}{v} \\ &= \int_0^a \frac{\sqrt{1 + [y'(x)]^2}}{\sqrt{2gy}} dx \\ &= \frac{1}{(2g)^{1/2}} \int_0^a \left[\frac{1 + y'^2}{y} \right]^{1/2} dx \end{aligned} \quad (2.1.15)$$

com condições de fronteira $y(0) = 0$ e $y(a) = b$.

Como o Lagrangeano L não depende do parâmetro x , há conservação da energia $E_L = L_y y' - L$:

$$E_L = \frac{y'^2}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} - \frac{\sqrt{1 + y'^2}}{\sqrt{y}} \equiv c$$

Simplificando, vem que:

$$\frac{1}{\sqrt{y(1 + y'^2)}} = C \quad \Rightarrow \quad y(1 + y'^2) = C_1$$

e introduzindo um parâmetro t e pondo ainda $y' = \cotg t$, obtemos:

$$y = \frac{C_1}{1 + \cotg^2 t} = C_1 \sin^2 t = \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t)$$

Por outro lado:

$$\begin{aligned} dx &= \frac{dy}{y'} = \frac{2C_1 \sin t \cos t dt}{\cotg t} = 2C_1 \sin^2 t dt = C_1(1 - \cos 2t)dt \\ \Rightarrow x &= C_1 \left(t - \frac{\sin 2t}{2} \right) + C_2 = \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) + C_2 \end{aligned} \quad (2.1.16)$$

e a forma paramétrica da solução é:

$$\begin{cases} x - C_2 &= \frac{C_1}{2}(2t - \sin 2t) \\ y &= \frac{C_1}{2}(1 - \cos 2t) \end{cases}$$

Pondo $\tau = 2t$ e como $C_2 = 0$, já que $y(0) = 0$, obtem-se a família de ciclóides:

$$\begin{cases} x(\tau) &= \frac{C}{2}(\tau - \sin \tau) \\ y(\tau) &= \frac{C}{2}(1 - \cos \tau) \end{cases} \quad (2.1.17)$$

onde C se calcula impondo a condição $y(a) = b$.

2.1.2 Exemplo. Geodésicas no semiplano de Poincaré

Calcular as extremais de:

$$I[y(\cdot)] = \int_a^b \frac{\sqrt{1 + (y')^2}}{y} dx, \quad y(a) = A, \quad y(b) = B$$

onde os pontos $(a, A), (b, B)$ pertencem ao semiplano superior $H^+ = \{(x, y) : y > 0\}$.

Como $L(x, y, y') = \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}$, não depende do parâmetro x , a energia total:

$$E_L(y, y') = y' L_{y'}(y, y') - L(y, y') = y' \frac{y'}{y\sqrt{1+(y')^2}} - \frac{\sqrt{1+(y')^2}}{y}$$

é constante. Depois de simplificar, obtemos:

$$y\sqrt{1+(y')^2} \equiv r > 0$$

Pondo $y' = \operatorname{tg} t$, vem que:

$$y^2 = \frac{r^2}{1+y'^2} = \frac{r^2}{1+\operatorname{tg}^2 t} = r^2 \cos^2 t$$

ou $y = r \cos t$. Por outro lado:

$$\frac{dy}{dx} = y' \Rightarrow dx = \frac{dy}{y'} = \frac{-r \sin t dt}{\operatorname{tg} t} = -r \cos t dt$$

ou $x = -r \sin t + C$. A solução é pois, em forma paramétrica:

$$\begin{cases} x - C & = & -r \sin t \\ y & = & r \cos t \end{cases}$$

e, eliminando t , obtemos uma família de circunferências centradas no eixo dos x' s: $(x-C)^2 + y^2 = r^2$. A extremal pedida será a que passa pelos dois pontos dados, e é única.

2.2 Transformada de Legendre. Equações canónicas

A transformada de Legendre de uma função $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é, grosso modo, a equação da família de hiperplanos tangentes ao gráfico de F . Por exemplo, para $n = 2$, F é uma função de 2 variáveis e o seu gráfico é a superfície de \mathbb{R}^3 :

$$\operatorname{gr} F = \{(x^1, x^2, z) : z = F(x^1, x^2)\}$$

A superfície $\operatorname{gr} F$, em $\mathbb{R}_{x^1 x^2 z}^3$, pode ser descrita por dois processos duais:

- **descrição pontual** - como o conjunto de pontos determinado pela equação $z = F(x^1, x^2)$,
- **descrição tangencial** - como a envolvente dos seus planos tangentes.

Veamos qual a equação a que deve satisfazer um plano afim em \mathbb{R}^3 para que seja tangente a $\operatorname{gr} F$. A equação de um plano afim não vertical em \mathbb{R}^3 , pode ser sempre escrita na forma:

$$Z - p_1 X^1 - p_2 X^2 + u = 0$$

onde (X^1, X^2, Z) são as coordenadas correntes de um ponto desse plano. Neste caso, chamamos a (p_1, p_2, u) as coordenadas desse plano, que é pois o plano perpendicular ao vector $(p_1, p_2, -1)$ e que intersecta o eixo dos zz no ponto $(0, 0, -u)$.

Como o plano tangente a $\text{gr } F$, no ponto $(x^1, x^2, z = F(x^1, x^2)) \in \text{gr } F$, é o plano de equação $[(X^1, X^2, Z) - (x^1, x^2, F(x))] \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}(x), \frac{\partial F}{\partial x^2}(x), -1\right) = 0$, onde $x = (x^1, x^2)$, isto é:

$$Z - F(x) - \frac{\partial F}{\partial x^1}(x)(X^1 - x^1) - \frac{\partial F}{\partial x^2}(x)(X^2 - x^2) = 0, \quad x = (x^1, x^2)$$

as coordenadas desse plano são portanto:

$$\begin{aligned} p_1 &= \frac{\partial F}{\partial x^1}(x^1, x^2) \\ p_2 &= \frac{\partial F}{\partial x^2}(x^1, x^2) \\ u &= x^1 \frac{\partial F}{\partial x^1}(x^1, x^2) + x^2 \frac{\partial F}{\partial x^2}(x^1, x^2) - F(x^1, x^2) \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

que se dizem as **coordenadas tangenciais** da superfície $\text{gr } F$. A superfície fica também determinada se conhecermos u como função de p_1 e p_2 , isto é, se conhecermos a família a dois parâmetros de planos tangentes ao $\text{gr } F$. Esta relação $u = \Phi(p_1, p_2)$, que se diz a **equação tangencial** do $\text{gr } F$, pode ser deduzida a partir de $z = F(x^1, x^2)$, calculando (se possível) os valores de x^1 e x^2 , como função de p_1 e p_2 , a partir das equações:

$$p_1 = \frac{\partial F}{\partial x^1}(x^1, x^2), \quad p_2 = \frac{\partial F}{\partial x^2}(x^1, x^2)$$

e substituindo esses valores $x^1(p_1, p_2)$ e $x^2(p_1, p_2)$ em u , dado por (2.2.1):

$$\begin{aligned} u &= \Phi(p_1, p_2) \\ &= x^1 \frac{\partial F}{\partial x^1}(x^1, x^2) + x^2 \frac{\partial F}{\partial x^2}(x^1, x^2) - F(x^1, x^2) \\ &= p_1 x^1(p_1, p_2) + p_2 x^2(p_1, p_2) - F(x^1(p_1, p_2), x^2(p_1, p_2)) \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

A esta função $\Phi(p_1, p_2)$ chamamos a **transformada de Legendre** da função $F(x^1, x^2)$.

Reciprocamente, para determinar as coordenadas pontuais a partir das coordenadas tangenciais, calculamos as derivadas parciais de $\Phi(p_1, p_2)$, dada por (2.2.2). Como $p_1 = \frac{\partial F}{\partial x^1}(x^1, x^2)$ e $p_2 = \frac{\partial F}{\partial x^2}(x^1, x^2)$, obtemos:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_1} = x^1 + p_1 \frac{\partial x^1}{\partial p_1} + p_2 \frac{\partial x^2}{\partial p_1} - \frac{\partial F}{\partial x^1} \frac{\partial x^1}{\partial p_1} - \frac{\partial F}{\partial x^2} \frac{\partial x^2}{\partial p_1} = x^1$$

e análogamente:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p_2} = x^2$$

Concluindo - obtemos o seguinte conjunto de fórmulas:

$$\begin{aligned} \Phi(p_1, p_2) + F(x^1, x^2) &= p_1 x^1 + p_2 x^2 \\ p_1 &= \frac{\partial F}{\partial x^1} & x^1 &= \frac{\partial \Phi}{\partial p_1} \\ p_2 &= \frac{\partial F}{\partial x^2} & x^2 &= \frac{\partial \Phi}{\partial p_2} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

que ilustra o carácter dual da passagem entre coordenadas pontuais e coordenadas tangenciais.

A transformada de Legendre de uma função $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ pode ser sempre calculada se as duas equações $p_1 = \frac{\partial F}{\partial x^1}, p_2 = \frac{\partial F}{\partial x^2}$ puderem ser resolvidas em ordem a x^1, x^2 , o que é possível se:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial (x^1)^2} \frac{\partial^2 F}{\partial (x^2)^2} - \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^1 \partial x^2} \right)^2 \neq 0$$

A generalização para funções $F : \mathbb{R}_x^n \rightarrow \mathbb{R}$ é óbvia - a transformada de Legendre de F é a função $\Phi : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}$, definida da seguinte forma. Primeiro definimos os $p = (p_i)$ através de:

$$p = p(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x), \quad \text{isto é} \quad p_i = \frac{\partial F}{\partial x^i}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2.4)$$

Supondo que:

$$\det \left[\frac{\partial^2 F}{\partial x^i \partial x^j} \right] \neq 0 \quad (2.2.5)$$

podemos inverter a relação $p = p(x)$, para calcular os x^i 's como função dos p_i 's: $x = x(p)$. Definimos então a transformada de Legendre $\Phi : \mathbb{R}_p^n \rightarrow \mathbb{R}$, de F , através de:

$$\Phi(p) = p x(p) - F(x(p)) \quad (2.2.6)$$

■

Suponhamos agora que temos um Lagrangeano $L(t, q, \dot{q})$, definido em $\mathbb{R} \times TQ$. Para cada (t, q) fixo, consideremos a função parcial $F(\dot{q}) = L(t, q, \dot{q})$ e calculemos a transformada de Legendre de F . Essa transformada é uma função $H(t, q, p)$, a que se chama o **Hamiltoniano** correspondente ao Lagrangeano L , e que é definida em $\mathbb{R} \times T^*Q$, através de:

$$\boxed{H(t, q, p) = p \dot{q} - L(t, q, \dot{q})|_{\dot{q}=\dot{q}(t, q, p)}} \quad (2.2.7)$$

Nesta fórmula, $\dot{q} = \dot{q}(t, q, p)$ obtém-se invertendo a relação (com t e q fixos):

$$\begin{aligned} p &= p(t, q, \dot{q}) \\ &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}}(t, q, \dot{q}) = L_{\dot{q}}(t, q, \dot{q}) \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

o que é possível se suposermos L **hiperregular**, isto é, se:

$$\det \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j} \right] \neq 0 \quad (2.2.9)$$

Notemos ainda que H não é mais do que a energia do Lagrangeano L , expressa nas coordenadas (t, q, p) .

Calculemos agora a diferencial do Hamiltoniano:

$$\begin{aligned} H &= H(t, q, p) \\ &= p \dot{q}(t, q, p) - L(t, q, \dot{q}(t, q, p)) \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Vem sucessivamente que:

$$\begin{aligned}
 dH &= H_t dt + H_q dq + H_p dp \\
 &= (p\dot{q}_t - L_t - L_{\dot{q}}\dot{q}_t) dt + (p\dot{q}_q - L_q - L_{\dot{q}}\dot{q}_q) dq + (\dot{q} + p\dot{q}_p - L_{\dot{q}}\dot{q}_p) dp \\
 &= (p\dot{q}_t - L_t - L_{\dot{q}}\dot{q}_t) dt + (p\dot{q}_q - L_q - p\dot{q}_q) dq + (\dot{q} + p\dot{q}_p - p\dot{q}_p) dp \\
 &= -L_t dt - L_q dq + \dot{q} dp
 \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

donde se deduz que:

$$H_t = -L_t, \quad H_q = -L_q, \quad H_p = \dot{q} \tag{2.2.12}$$

O sistema de Euler-Lagrange $-\frac{d}{dt}L_{\dot{q}} + L_q = 0$ escreve-se portanto na seguinte **forma canônica**:

$$\boxed{\begin{cases} \dot{q} = H_p(t, q, p) \\ \dot{p} = -H_q(t, q, p) \end{cases}} \tag{2.2.13}$$

já que $\dot{p} = \frac{d}{dt}L_{\dot{q}} = L_q = -H_q$. Estas equações dizem-se as **equações canônicas de Hamilton** associadas às equações de Euler-Lagrange.

Mais detalhadamente - uma curva $t \mapsto q(t)$ é solução das equações de Euler-Lagrange se e só se a curva:

$$t \mapsto (t, q(t), p(t) = L_{\dot{q}}(t, q(t), \dot{q}(t)))$$

é solução das equações canônicas.

► **Exemplo 2.1** ... Calcular as equações canônicas para o funcional:

$$I[q(t)] = \int_0^\pi (2xy - 2x^2 + \dot{x}^2 - \dot{y}^2) dt, \quad \text{onde } q = (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

O Lagrangeano $L(q, \dot{q}) = 2xy - 2x^2 + \dot{x}^2 - \dot{y}^2$ é hiperregular, já que:

$$\det \begin{bmatrix} L_{\dot{x}\dot{x}} & L_{\dot{x}\dot{y}} \\ L_{\dot{y}\dot{x}} & L_{\dot{y}\dot{y}} \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} = -4 \neq 0$$

Portanto os momentos $p = (p_x, p_y)$ são dados por:

$$\begin{aligned}
 p_x &= L_{\dot{x}} = 2\dot{x} & \Rightarrow & \dot{x} = \frac{p_x}{2} \\
 p_y &= L_{\dot{y}} = -2\dot{y} & \Rightarrow & \dot{y} = -\frac{p_y}{2}
 \end{aligned}$$

O Hamiltoniano é:

$$\begin{aligned}
 H(x, y, p_x, p_y) &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - L(x, y, \dot{x}, \dot{y})|_{\dot{x}=\frac{p_x}{2}, \dot{y}=-\frac{p_y}{2}} \\
 &= 2x^2 - 2xy + \frac{p_x^2}{4} - \frac{p_y^2}{4}
 \end{aligned}$$

e as equações canônicas são:

$$\begin{cases} \dot{x} = \frac{p_x}{2} \\ \dot{y} = -\frac{p_y}{2} \\ \dot{p}_x = -4x + 2y \\ \dot{p}_y = 2x \end{cases}$$

■.

2.3 Sistemas mecânicos conservativos

Para **sistemas mecânicos conservativos**, o Lagrangeano é dado, em coordenadas locais (q, \dot{q}) para TQ , por:

$$\boxed{L(q, \dot{q}) = \frac{1}{2}g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j - V(q)} \quad (2.3.1)$$

onde g é uma matriz simétrica definida positiva, que representa uma métrica Riemanniana em Q . As parcelas da soma (2.3.1) chamam-se respectivamente:

$$\begin{array}{ll} \frac{1}{2}g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j & \text{energia cinética} \\ V(q) & \text{energia potencial} \end{array} \quad (2.3.2)$$

O Lagrangeano (2.3.1) é hiperregular, uma vez que g é não degenerada. Portanto $g^{ij}(q) = [g_{ij}(q)]^{-1}$ define uma métrica contravariante em Q . Como:

$$p_i = L_{\dot{q}^i} = g_{ij}(q)\dot{q}^j \quad \Rightarrow \quad \dot{q}^i = g^{ij}(q)p_j$$

o Hamiltoniano é dado por:

$$\begin{aligned} H(q, p) &= p_i\dot{q}^i - L(q, \dot{q})|_{\dot{q}^i = g^{ij}(q)p_j} \\ &= \frac{1}{2}g^{ij}(q)p_i p_j + V(q) \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Como H não depende explicitamente de t , H é um integral primeiro das equações de Hamilton. De facto, se $(q(t), p(t))$ é uma solução dessas equações:

$$\begin{cases} \dot{q}(t) = H_p(q(t), p(t)) \\ \dot{p}(t) = -H_q(q(t), p(t)) \end{cases}$$

então:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(q(t), p(t)) &= H_q\dot{q} + H_p\dot{p} \\ &= H_qH_p - H_pH_q \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.4)$$

de tal forma que:

$$H(q(t), p(t)) \equiv h \quad (2.3.5)$$

para uma certa constante h , dita o **nível de energia** da solução $(q(t), p(t))$.

Por exemplo, para uma partícula de massa m , movendo-se em \mathbb{R}^3 sob a acção de um campo de forças $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x})$, o Lagrangeano é:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x})$$

onde $\dot{\mathbf{x}}^2 = \dot{\mathbf{x}} \cdot \dot{\mathbf{x}} = \|\dot{\mathbf{x}}\|^2 = \dot{\mathbf{x}}^T \dot{\mathbf{x}}$, e o Hamiltoniano é:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m}\mathbf{p}^2 + V(\mathbf{x})$$

As equações de Hamilton são:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{p}^T/m \\ \dot{\mathbf{p}} &= -\nabla V(\mathbf{x})^T \end{cases}$$

donde se deduz que:

$$\ddot{\mathbf{x}} = \frac{\dot{\mathbf{p}}^T}{m} = -\frac{\nabla V(\mathbf{x})}{m}$$

e como $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x})$:

$$m \ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(\mathbf{x}) \quad (2.3.6)$$

que é a famosa **equação de Newton**.

Mais geralmente, dado um sistema de N partículas de massas m_i e coordenadas $\mathbf{x}_i = (x_i, y_i, z_i)$, para $i = 1, \dots, N$, que se movem sob a acção de forças \mathbf{F}_i que derivam de um potencial $V = V(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_N)$, que depende apenas das posições das partículas:

$$\mathbf{F}_i = -\nabla_{\mathbf{x}_i} V, \quad i = 1, \dots, N$$

a energia cinética é:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{x}}_i^2$$

e a energia potencial é V . As equações do movimento são:

$$m_i \ddot{\mathbf{x}}_i = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, \dots, N \quad (2.3.7)$$

2.3.1 Exemplo. Oscilador harmónico

O oscilador harmónico (de dimensão 1) é descrito pela seguinte ODE de segunda ordem em \mathbb{R}_x :

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0, \quad \omega \neq 0 \quad (2.3.8)$$

cuja solução geral é:

$$x(t) = A \cos(\omega t + b), \quad A, b \text{ constantes}$$

A equação (2.3.8) é a equação de Euler-Lagrange correspondente ao Lagrangeano (que não depende de t):

$$L(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2\omega} - \frac{\omega x^2}{2} \quad (2.3.9)$$

De facto:

$$-\frac{d}{dt} L_{\dot{x}} + L_x = -\frac{\dot{x}}{\omega} - \omega x$$

Aplicando a transformada de Legendre a L , vem que $p = L_{\dot{x}} = \frac{\dot{x}}{\omega}$, donde $\dot{x} = \omega p$, e portanto o Hamiltoniano é:

$$H(x, p) = p\dot{x} - L(x, \dot{x})|_{\dot{x}=\omega p} = \frac{\omega}{2}(x^2 + p^2) \quad (2.3.10)$$

As equações canónicas são pois:

$$\begin{cases} \dot{x} &= H_p = \omega p \\ \dot{p} &= -H_x = -\omega x \end{cases} \quad (2.3.11)$$

cuja solução geral é:

$$\begin{cases} x(t) = A \cos(\omega t + b) \\ p(t) = -A \sin(\omega t + b) \end{cases}, \quad A = \sqrt{2a}, b \text{ constantes} \quad (2.3.12)$$

Note que de facto $p(t) = L_{\dot{x}}(x(t), \dot{x}(t))$.

2.3.2 Exemplo. Movimento num campo central

Consideremos um ponto material de massa m , que se move em $\mathbb{R}^3 - \{0\}$, sob a influência de um **campo de forças central**:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{\varphi(r)}{r} \mathbf{x}, \quad \text{onde } r = \|\mathbf{x}\| > 0 \quad (2.3.13)$$

Em (2.3.13), $\varphi :]0, \infty[\rightarrow \mathbb{R}$ representa uma função contínua. Podemos então escrever:

$$F(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x}) \quad (2.3.14)$$

onde:

$$V(\mathbf{x}) = -\Phi(r), \quad \text{com } \Phi(r) = \int_{r_0}^r \varphi(\rho) d\rho \quad (2.3.15)$$

O Lagrangeano é:

$$L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\mathbf{x}}^2 - V(\mathbf{x})$$

que, como não depende de t , implica a conservação de energia:

$$E_L = \frac{m \dot{\mathbf{x}}^2}{2} + V(\mathbf{x}) \equiv E \quad (2.3.16)$$

para alguma constante E (o nível de energia).

Definamos agora o **momento** $\mathbf{p}(t)$ e o **momento angular** $\boldsymbol{\ell}(t)$, do movimento $\mathbf{x}(t)$, através de:

$$\mathbf{p}(t) = L_{\dot{\mathbf{x}}} = m\dot{\mathbf{x}}(t), \quad \boldsymbol{\ell}(t) = \mathbf{x}(t) \times \mathbf{p}(t) \quad (2.3.17)$$

Deduzimos então que:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\ell}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) \times \mathbf{p}(t) + \mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{p}}(t) \\ &= \dot{\mathbf{x}} \times m\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} \times m \frac{\varphi(r)}{r} \mathbf{x} \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

isto é, o momento angular $\boldsymbol{\ell}(t)$ é conservado:

$$\boldsymbol{\ell}(t) \equiv \mathbf{a} \quad (2.3.19)$$

para algum vector constante \mathbf{a} . Os 4 integrais primeiros independentes (2.3.16) e (2.3.19), são suficientes para integrar as equações do movimento. De facto, podemos escolher um sistema de eixos tal que \mathbf{a} aponte na direcção positiva do eixo dos x' s:

$$\mathbf{a} = (0, 0, a), \quad a \geq 0$$

De $\ell(t) = \mathbf{x}(t) \times \mathbf{p}(t) = m(\mathbf{x}(t) \times \dot{\mathbf{x}}(t)) \equiv \mathbf{a}$, obtemos que $\mathbf{a} \cdot \mathbf{x}(t) = 0, \forall t$. Portanto, se $a > 0$, $\mathbf{x}(t)$ está sempre no plano xy e o movimento processa-se neste plano:

$$\mathbf{x}(t) = (x(t), y(t), 0)$$

A conservação do momento angular (2.3.19), pode então ser escrita na forma:

$$x\dot{y} - y\dot{x} = \frac{a}{m} \quad (2.3.20)$$

que é a chamada lei das áreas de Kepler: “as áreas varridas pelo vector de posição $\mathbf{x}(t)$, em tempos iguais, são iguais”. Em particular, o movimento ou é linear ($a = 0$) ou $\mathbf{x}(t)$ e $\dot{\mathbf{x}}(t)$ nunca são colineares.

A lei de conservação de energia (2.3.16) toma agora a forma seguinte:

$$\frac{m}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) = E + \Phi(r) \quad (2.3.21)$$

onde Φ é dada por (2.3.15), e $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Introduzindo coordenadas polares de pólo na origem:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

podemos escrever (2.3.20) e (2.3.21), em termos de $r(t)$ e $\theta(t)$, na forma seguinte:

$$r^2 \dot{\theta} = \frac{a}{m} \quad (2.3.22)$$

$$\frac{m}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) = E + \Phi(r) \quad (2.3.23)$$

Analiseemos mais detalhadamente o **problema de Kepler** em que:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{-\gamma m M}{r^3} \mathbf{x}, \quad r = \|\mathbf{x}\| \quad (2.3.24)$$

Esta é a força gravitacional que um ponto material de massa M , fixo no centro 0 , exerce sobre um ponto material de massa m , situado em $\mathbf{x} \neq 0$, de acordo com a **lei da atracção universal de Newton**. γ é a constante universal de gravitação. Neste caso, temos que $F(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x})$, onde:

$$V(\mathbf{x}) = \Phi(r) = \frac{\gamma m M}{r}$$

Vamos supôr que o movimento não é linear ($a > 0$, em (2.3.22)). Então (2.3.22) e (2.3.23) ficam com o aspecto:

$$\dot{\theta} = \frac{C}{r^2}, \quad \text{onde} \quad C = a/m \quad (2.3.25)$$

$$\frac{1}{2}(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) = \frac{\gamma M}{r} + W, \quad \text{onde} \quad W = E/m \quad (2.3.26)$$

Destas duas equações deduzimos que:

$$\frac{1}{2}C^2 \left[r^{-4} \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^{-2} \right] = \frac{\gamma M}{r} + W$$

e portanto a função $s(\theta) = 1/r(\theta)$ satisfaz:

$$\frac{1}{2}C^2 \left[\left(\frac{ds}{d\theta} \right)^2 + s^2 \right] - \gamma M s = W \quad (2.3.27)$$

Derivando esta equação em ordem a θ obtemos:

$$\frac{ds}{d\theta} \left(C^2 \left[\frac{d^2s}{d\theta^2} + s \right] - \gamma M \right) = 0$$

Como $\frac{ds}{d\theta} \neq 0$, excepto em pontos isolados, vemos que:

$$\frac{d^2s}{d\theta^2} + s = \frac{\gamma M}{C^2} \quad (2.3.28)$$

e portanto:

$$s(\theta) = \frac{\gamma M}{C^2} + \frac{\alpha}{C} \cos(\theta + \theta_0) \quad (2.3.29)$$

onde α e θ_0 são constantes arbitrárias, $\alpha > 0$. Pondo:

$$k = \frac{C^2}{\gamma M}, \quad \epsilon = \frac{\alpha C}{\gamma M}$$

e recordando que $r(\theta) = 1/s(\theta)$, obtemos:

$$r(\theta) = \frac{k}{1 + \epsilon \cos(\theta + \theta_0)} \quad (2.3.30)$$

que é a equação polar de uma cónica com excentricidade ϵ . Esta equação descreve uma elipse, uma parábola ou uma hipérbole, conforme $0 < \epsilon < 1$, $\epsilon = 1$ ou $\epsilon > 1$, respectivamente. Inserindo:

$$s(\theta) = \frac{1}{k} [1 + \epsilon \cos(\theta + \theta_0)], \quad s'(\theta) = -\frac{\epsilon}{k} \sin(\theta + \theta_0)$$

em (2.3.27), obtemos:

$$\epsilon^2 = 1 + \frac{2}{m} \left(\frac{C}{\gamma M} \right)^2 E$$

portanto $E < 0$ corresponde a $0 < \epsilon < 1$, i.e., a uma elipse, $E = 0$ corresponde a $\epsilon = 1$, i.e., a uma parábola, e, finalmente, $E > 1$ corresponde a $\epsilon > 1$, i.e., a uma hipérbole.

O **problema geral dos dois corpos** reduz-se facilmente ao problema anterior. De facto, consideremos dois pontos materiais $\mathbf{x}_1 = (x_1, y_1, z_1)$ de massa $M > 0$ e $\mathbf{x}_2 = (x_2, y_2, z_2)$ de massa $m > 0$, em \mathbb{R}^3 . A equações de Newton são:

$$M\ddot{\mathbf{x}}_1 = -\frac{\gamma m M}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3}(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2), \quad m\ddot{\mathbf{x}}_2 = -\frac{\gamma m M}{\|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2\|^3}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad (2.3.31)$$

Introduzindo o baricentro \mathbf{x}_b através de:

$$(m + M)\mathbf{x}_b = M\mathbf{x}_1 + m\mathbf{x}_2 \quad (2.3.32)$$

vem que $\dot{\mathbf{x}}_b(t) = 0$ e portanto:

$$\mathbf{x}_b = \mathbf{a}t + \mathbf{c}$$

onde $\mathbf{a}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$ são constantes. Podemos pois escolher o baricentro como origem de um sistema de coordenadas onde as equações de Newton permanecem inalteradas (sistema inercial). Temos então que:

$$\mathbf{x}(t) \equiv 0$$

Introduzindo coordenadas relativas $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ deduzimos que:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = -\frac{kmM^*}{r^3}\mathbf{x}, \quad r = \|\mathbf{x}\|, \quad M^* = m + M$$

que é o problema de Kepler com um centro de massa M^* no baricentro $\mathbf{x}_b = 0$.

2.4 A forma de Poincaré-Cartan

Consideremos agora o espaço seguinte:

$$\mathcal{P} = \{(t_0, t_1, c) : t_0 < t_1 \in \mathbb{R}, \quad c : [t_0, t_1] \rightarrow Q, \text{ de classe } C^2\} \quad (2.4.1)$$

Neste espaço definámos o funcional seguinte:

$$J[t_0, t_1, c] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, c(t), \dot{c}(t)) dt \quad (2.4.2)$$

e procuremos a condição para que este funcional seja estacionário sob variações (infinitesimais) de (t_0, t_1, c) .

Para isso, comecemos por considerar uma “curva” de elementos de \mathcal{P} que, no “instante” $\alpha = 0$, passa em (t_0, t_1, c) , isto é, uma família a um parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha \mapsto (t_0(\alpha), t_1(\alpha), c_\alpha = c(\cdot; \alpha)) \in \mathcal{P}$, de tal forma que, $c_\alpha : [t_0(\alpha), t_1(\alpha)] \rightarrow Q$, e:

$$t_0(\alpha = 0) = t_0, \quad t_1(\alpha = 0) = t_1, \quad c_0 = c(\cdot; \alpha = 0) = c$$

Derivando em ordem a α , para $\alpha = 0$, obtemos a chamada variação (infinitesimal) $(\delta t_0, \delta t_1, \delta c)$, de (t_0, t_1, c) , definida por:

$$\delta t_0 = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} t_0(\alpha), \quad \delta t_1 = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} t_1(\alpha), \quad \delta c = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} c(\cdot, \alpha) \quad (2.4.3)$$

de tal forma que $\delta c : [t_0, t_1] \rightarrow TQ$, i.e., para cada $t \in [t_0, t_1]$, $\delta c(t) \in T_{c(t)}Q$.

O conjunto de todas estas variações (infinitesimais) $(\delta t_0, \delta t_1, \delta c)$, de (t_0, t_1, c) , será, por definição, o espaço tangente, $T_{(t_0, t_1, c)}\mathcal{P}$, a \mathcal{P} em (t_0, t_1, c) .

O funcional será estacionário sob variações de (t_0, t_1, c) , sse:

$$J'(0) = dJ_{(t_0, t_1, c)}(\delta t_0, \delta t_1, \delta c) = 0, \quad \forall (\delta t_0, \delta t_1, \delta c) \in T_{(t_0, t_1, c)}\mathcal{P} \quad (2.4.4)$$

onde:

$$J(\alpha) = \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} L(t, c_\alpha(t), \dot{c}_\alpha(t)) dt \quad (2.4.5)$$

O problema é mais uma vez calcular a derivada $J'(0) = \left. \frac{\partial}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} J(\alpha)$.

No problema anterior, supômos que:

$$\alpha \mapsto \left(t_0(\alpha), q_0(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} c_\alpha(t_0(\alpha)) \right)$$

é uma curva suave em $\mathbb{R} \times Q$, ao longo da qual a extremidade esquerda das diversas curvas da família c_α , varia quando α varia. Anàlogamente, supômos que:

$$\alpha \mapsto \left(t_1(\alpha), q_1(\alpha) \stackrel{\text{def}}{=} c_\alpha(t_1(\alpha)) \right)$$

é uma curva suave em $\mathbb{R} \times Q$, ao longo da qual a extremidade direita das diversas curvas da família c_α , varia quando α varia. Adoptámos ainda as seguintes notações:

$$t_0 = t_0(0), \quad t_1 = t_1(0), \quad \dot{c}(t) = \dot{c}_0(t), \quad \left. \frac{\partial c(t; \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \delta c(t) = \eta(t), \quad \left. \frac{\partial \dot{c}(t; \alpha)}{\partial \alpha} \right|_{\alpha=0} = \dot{\eta}(t)$$

Figure 2.2:

Vamos então calcular $\left. \frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$. Usando coordenadas locais $q = (q^i)$ e pondo $q^i(t) = (q^i \circ c)(t)$, pelo teorema fundamental do cálculo vem que:

$$\begin{aligned} \frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} &= L\left(t_1(\alpha), q(t_1(\alpha)); \alpha, \dot{q}(t_1(\alpha); \alpha)\right) \frac{dt_1}{d\alpha} \\ &\quad - L\left(t_0(\alpha), q(t_0(\alpha)); \alpha, \dot{q}(t_0(\alpha); \alpha)\right) \frac{dt_0}{d\alpha} \\ &\quad + \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \left(L_q \frac{\partial q}{\partial \alpha} + L_{\dot{q}} \frac{\partial \dot{q}}{\partial \alpha} \right) dt \end{aligned}$$

Para $\alpha = 0$, podemos escrever isto na forma abreviada:

$$\left. \frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = L_1 \delta t_1 - L_0 \delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} (L_q(t) \eta(t) + L_{\dot{q}}(t) \dot{\eta}(t)) dt \quad (2.4.6)$$

onde adoptámos as seguintes notações:

$$\begin{aligned} \delta t_0 &= \frac{dt_0}{d\alpha}(0), & \delta t_1 &= \frac{dt_1}{d\alpha}(0) \\ L_1 &= L(t_1(0), q(t_1(0)); 0, \dot{q}(t_1(0); 0)) = L(t_1, q(t_1), \dot{q}(t_1)) \\ L_0 &= L(t_0(0), q(t_0(0)); 0, \dot{q}(t_0(0); 0)) = L(t_0, q(t_0), \dot{q}(t_0)) \\ L_q(t) &= L_q(t, q(t); 0, \dot{q}(t); 0) = L_q(t, q(t), \dot{q}(t)) \\ L_{\dot{q}}(t) &= L_{\dot{q}}(t, q(t); 0, \dot{q}(t); 0) = L_{\dot{q}}(t, q(t), \dot{q}(t)) \end{aligned}$$

Agora integrámos por partes a última parcela em (2.4.6), e obtemos:

$$\left. \frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = L_1 \delta t_1 - L_0 \delta t_0 + L_{\dot{q}} \eta|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(L_q(t) - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}}(t) \right) \eta(t) dt \quad (2.4.7)$$

Vamos finalmente modificar as parcelas fora do integral. Para isso, começamos por derivar as identidades $q_0(\alpha) = q(t_0(\alpha); \alpha)$ e $q_1(\alpha) = q(t_1(\alpha); \alpha)$ em ordem a α , para $\alpha = 0$, para obter:

$$\begin{aligned} \delta q_0 &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{dq_0}{d\alpha}(0) \\ &= \dot{q}(t_0(0); 0) \frac{dt_0}{d\alpha}(0) + \frac{\partial q}{\partial \alpha}(t_0(0); 0) \\ &= \dot{q}(t_0) \delta t_0 + \eta(t_0) \end{aligned}$$

o que implica que:

$$\eta(t_0) = \delta q_0 - \dot{q}(t_0)\delta t_0$$

Anàlogamente se obtem:

$$\eta(t_1) = \delta q_1 - \dot{q}(t_1)\delta t_1$$

Recordemos que $\eta = \delta c \dots$

Agora substituimos estes valores de $\eta(t_0)$ e $\eta(t_1)$ na terceira parcela de (2.4.7). Após reordenar os termos, vem que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} &= [L_1 - (L_{\dot{q}})_1 \dot{q}(t_1)] \delta t_1 - [L_0 - (L_{\dot{q}})_0 \dot{q}(t_0)] \delta t_0 \\ &+ (L_{\dot{q}})_1 \delta q_1 - (L_{\dot{q}})_0 \delta q_0 + \int_{t_0}^{t_1} \left(L_q(t) - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}}(t) \right) \eta(t) dt \end{aligned} \quad (2.4.8)$$

Mas recordemos que:

$$E_L(t, q, \dot{q}) = L_{\dot{q}} \dot{q} - L(t, q, \dot{q})$$

o que permite escrever (2.4.8) na forma:

$$\boxed{\left. \frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = (L_{\dot{q}} dq - E_L dt) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} (L_q(t) - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}}(t)) \eta(t) dt} \quad (2.4.9)$$

onde:

$$\begin{aligned} (L_{\dot{q}} dq - E_L dt)(t_0) &\stackrel{\text{def}}{=} (L_{\dot{q}} dq - E_L dt)_{(t_0, q(t_0))} (\delta t_0, \delta q_0) \\ &= (L_{\dot{q}})_0 \delta q_0 - [(L_{\dot{q}})_0 \dot{q}(t_0) - L_0] \delta t_0 \\ (L_{\dot{q}} dq - E_L dt)(t_1) &\stackrel{\text{def}}{=} (L_{\dot{q}} dq - E_L dt)_{(t_1, q(t_1))} (\delta t_1, \delta q_1) \\ &= (L_{\dot{q}})_1 \delta q_1 - [(L_{\dot{q}})_1 \dot{q}(t_1) - L_1] \delta t_1 \end{aligned}$$

com:

$$(\delta t_0, \delta q_0) \in T_{(t_0, q(t_0))}(\mathbb{R} \times Q), \quad \text{e} \quad (\delta t_1, \delta q_1) \in T_{(t_1, q(t_1))}(\mathbb{R} \times Q)$$

A fórmula (2.4.9) é fundamental para o que se segue. Nela surge a 1-forma em $\mathbb{R} \times TQ$:

$$\boxed{\theta_L = L_{\dot{q}} dq - E_L dt} \quad (2.4.10)$$

chamada a **forma de Poincaré-Cartan** e que será muito importante em breve. Para Lagrangeanos hiperregulares, podemos transportar esta forma para $\mathbb{R} \times T^*Q$, via transformada de Legendre, para obter a forma:

$$\boxed{\theta_H = pdq - H dt} \quad (2.4.11)$$

a que também chamamos forma de Poincaré-Cartan.

2.5 Problema com extremidades móveis. Condições de transversalidade

Como aplicação da teoria exposta na secção anterior, e usando as mesmas notações, vamos discutir o problema seguinte. Entre os elementos $(t_0, t_1, c) \in \mathcal{P}$, com $t_0 < t_1 \in \mathbb{R}$, $c : [t_0, t_1] \rightarrow Q$, de classe C^2 , como na secção anterior, e que satisfazem ainda as condições de fronteira:

$$\Phi_0(t_0, c(t_0)) = 0, \quad \Phi_1(t_1, c(t_1)) = 0 \quad (2.5.1)$$

onde $\Phi_0 : \mathbb{R} \times Q \rightarrow \mathbb{R}^k$ e $\Phi_1 : \mathbb{R} \times Q \rightarrow \mathbb{R}^\ell$, calcular aquele para o qual o funcional:

$$I[t_0, t_1, c] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, c(t), \dot{c}(t)) dt \quad (2.5.2)$$

é estacionário.

Figure 2.3:

Estamos a supôr ainda que Φ_0 e Φ_1 são submersões de tal forma que $\Sigma_0 = \Phi_0^{-1}(0)$ e $\Sigma_1 = \Phi_1^{-1}(0)$ são subvariedades em $\mathbb{R} \times Q$ de codimensão k e ℓ , respectivamente.

Se (t_0, t_1, c) é uma solução deste problema, então c será solução do problema com extremidades fixas $q_0 = c(t_0)$ e $q_1 = c(t_1)$. Portanto $c(\cdot)$ satisfaz a equação de Euler-Lagrange:

$$-\frac{d}{dt}L_{\dot{q}} + L_q = 0 \quad (2.5.3)$$

No entanto, para calcular t_0, t_1 e ainda os $2n$ parâmetros que caracterizam a solução pretendida (portanto, ao todo $2n + 2$ parâmetros), apenas dispomos, para já, das $k + \ell$ condições de fronteira (2.5.1), $\Phi_0 = 0$ e $\Phi_1 = 0$. No entanto, como vamos ver, essa solução tem de verificar outras condições de fronteira adicionais, ditas **condições de transversalidade**, que fornecem as que faltam para determinar unívocamente a solução procurada (se esta existir!).

De facto, seja $(\delta t_1, \delta q_1) \in T_{(t_1, q_1)}\Sigma_1$ um vector tangente arbitrário a $\Sigma_1 = \Phi_1^{-1}(0)$ no ponto (t_1, q_1) , e $\gamma : \alpha \mapsto (t_1(\alpha), q_1(\alpha))$ uma curva suave em Σ_1 , tal que $\gamma(0) = (t_1(0), q_1(0)) = (t_1, q_1)$ e $\frac{d\gamma}{d\alpha}(0) = (\delta t_1, \delta q_1)$. Seja $c_\alpha(t) = c(t; \alpha)$ uma família a um parâmetro α de curvas tais que $c_0(t) = c(t)$, $c_\alpha(t_1(\alpha)) = q_1(\alpha)$ e ainda $c_\alpha(t_0) \equiv q(t_0)$, isto é, a extremidade esquerda está fixa (figura 2.3).

Aplicando à família c_α a teoria exposta na secção anterior, nomeadamente a fórmula (2.4.9), obtemos:

$$\left. \frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = (L_{\dot{q}}dq - E_L dt) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} \left(L_q(t) - \frac{d}{dt}L_{\dot{q}}(t) \right) \eta(t) dt = 0 \quad (2.5.4)$$

Mas, atendendo a que c satisfaz a equação de Euler-Lagrange (2.5.3), e ainda ao facto de que todas as curvas c_α passam pelo ponto fixo $(t_0, q_0(t_0))$, e portanto $(\delta t_0, \delta q_0) = (0, 0)$, concluímos que:

$$\begin{aligned} (L_{\dot{q}}dq - E_L dt)_{(t_1, q(t_1))} (\delta t_1, \delta q_1) &= (L_{\dot{q}})_1 \delta q_1 - (E_L)_1 \delta t_1 \\ &= (L_{\dot{q}})_1 \delta q_1 - [(L_{\dot{q}})_1 \dot{q}(t_1) - L_1] \delta t_1 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.5.5}$$

para todo o vector tangente $(\delta t_1, \delta q_1)$ a Σ_1 no ponto $(t_1, q(t_1))$.

De forma completamente análoga se deduz que:

$$\begin{aligned} (L_{\dot{q}}dq - E_L dt)_{(t_0, q(t_0))} (\delta t_0, \delta q_0) &= (L_{\dot{q}})_0 \delta q_0 - (E_L)_0 \delta t_0 \\ &= (L_{\dot{q}})_0 \delta q_0 - [(L_{\dot{q}})_0 \dot{q}(t_0) - L_0] \delta t_0 \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.5.6}$$

para todo o vector tangente $(\delta t_0, \delta q_0)$ a Σ_0 no ponto $(t_0, q(t_0))$. Estas relações (2.5.5) e (2.5.6) chamam-se **condições de transversalidade** para o problema acima referido.

Por exemplo, quando a extremidade direita se pode mover apenas no hiperplano $t \equiv t_1$, a condição (2.5.5) reduz-se a:

$$L_{\dot{q}}(t_1, q(t_1), \dot{q}(t_1)) = 0$$

Como a dimensão de $\Sigma_1 = \Phi_1^{-1}(0)$ é $n + 1 - \ell$, a relação de transversalidade (2.5.5), fornece $n + 1 - \ell$ equações independentes. Análogamente, como a dimensão de $\Sigma_0 = \Phi_0^{-1}(0)$ é $n + 1 - k$, a relação de transversalidade (2.5.6), fornece $n + 1 - k$ equações independentes. Adicionando as $k + \ell$ condições de fronteira $\Phi_0 = 0$ e $\Phi_1 = 0$, que já tínhamos, obtemos finalmente as $2n + 2$ relações que precisamos para determinar unívocamente a solução optimal (se esta existir!).

► **Exemplo 2.2** ... Discutir as condições de transversalidade para o problema:

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} n(x, y) \sqrt{1 + (y')^2} dx, \quad y(x_0) = y_0, \quad y = \psi(x)$$

isto é, a extremidade esquerda está fixa, enquanto a direita se move na curva $y = \psi(x)$.

Como $L(x, y, y') = n(x, y) \sqrt{1 + (y')^2}$, vem que $L_{y'} = \frac{y' n(x, y)}{\sqrt{1 + (y')^2}}$. Qualquer vector tangente à curva $y = \psi(x)$, no ponto $(x, \psi(x))$, é da forma:

$$(\delta x, \delta y) = \lambda (1, \psi'(x)), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Portanto a condição de transversalidade (2.5.5) tem a forma (com as correspondentes adaptações de notação $t \mapsto x, q \mapsto y$):

$$\begin{aligned} 0 &= (L_{y'} dy - E_L dx)_{(x, y=\psi(x))} (\delta x, \delta y) \\ &= L_{y'} \delta y - E_L \delta x \\ &= \lambda (L_{y'} \psi'(x) - E_L) \end{aligned} \tag{2.5.7}$$

onde $E_L = L_{y'}y' - L$. Portanto:

$$\begin{aligned} L_{y'}\psi'(x) - E_L &= L_{y'}\psi'(x) - L_{y'}y' + L \\ &= L_{y'}(\psi'(x) - y') + L \\ &= \frac{y'n(x,y)}{\sqrt{1+(y')^2}}(\psi'(x) - y') + n(x,y)\sqrt{1+(y')^2} \\ &= 0 \end{aligned} \tag{2.5.8}$$

ou:

$$\frac{n(x,y)(1 + \psi'y')}{\sqrt{1+(y')^2}} = 0$$

Supondo que $n(x,y) \neq 0$, na extremidade direita da extremal, obtemos $1 + \psi'y' = 0$ ou $y' = -\frac{1}{\psi'}$, isto é, a condição de transversalidade reduz-se neste caso a uma condição de ortogonalidade usual - a extremal deve intersectar perpendicularmente a curva $y = \psi(x)$, na sua extremidade direita.

► **Exemplo 2.3** ... Calcular a distância entre a parábola $y = x^2$ e a recta $x - y = 5$.

O problema consiste em calcular o valor extremo de:

$$I[y(x)] = \int_{x_0}^{x_1} \sqrt{1+(y')^2} dx, \quad y(x_0) = x_0^2, \quad y(x_1) = x_1 - 5$$

isto é, a extremidade esquerda move-se na parábola $y = x^2$, enquanto a direita se move na recta $x - y = 5$.

A solução geral da equação de Euler-Lagrange é $y(x) = ax + b$. Pretende-se pois calcular a extremal $y(x) = ax + b$, $x \in [x_0, x_1]$, onde a, b, x_0 e x_1 são constantes a determinar. Como $L = \sqrt{1+(y')^2}$ e $L_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}$, as condições de transversalidade (2.5.5) e (2.5.6) têm, neste caso, a forma:

$$\begin{aligned} (L_{y'}\delta y - E_L\delta x)|_{x=x_1} &= \lambda (L_{y'} - L_{y'}y' + L)|_{x=x_1} \\ &= \lambda \left(\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} - y' \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} + \sqrt{1+(y')^2} \right) \Big|_{x=x_1} \\ &= 0 \end{aligned}$$

e:

$$\begin{aligned} (L_{y'}\delta y - E_L\delta x)|_{x=x_0} &= \lambda (L_{y'}2x - L_{y'}y' + L)|_{x=x_0} \\ &= \lambda \left((2x - y') \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} + \sqrt{1+(y')^2} \right) \Big|_{x=x_0} \\ &= 0 \end{aligned}$$

onde $y' = a$. Por outro lado, as condições de fronteira são $y(x_0) = x_0^2$ e $y(x_1) = x_1 - 5$, isto é:

$$\begin{aligned} ax_0 + b &= x_0^2 \\ ax_1 + b &= x_1 - 5 \end{aligned}$$

e portanto, temos um sistema de 4 equações a 4 incógnitas x_0, x_1, a e b :

$$\begin{cases} (1-a)\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \sqrt{1+a^2} = 0 \\ (2x_0-a)\frac{a}{\sqrt{1+a^2}} + \sqrt{1+a^2} = 0 \\ ax_0 + b = x_0^2 \\ ax_1 + b = x_1 - 5 \end{cases}$$

cuja solução é:

$$a = -1, \quad b = 3/4, \quad x_0 = 1/2, \quad x_1 = 23/8$$

A equação da extremal é pois $y(x) = -x + 3/4$, e a distância pedida é:

$$\ell = \int_{1/2}^{23/8} \sqrt{1 + (-1)^2} dx = 19\sqrt{2}/8$$

2.6 Um princípio variacional para sistemas Hamiltonianos. Princípio de Maupertuis

Na secção 2.2, as equações canónicas de Hamilton foram deduzidas a partir do formalismo Lagrangeano através da transformada de Legendre. Vamos nesta secção considerar as equações canónicas como equações básicas e ver como elas podem ser vistas como as equações de Euler-Lagrange de um certo problema variacional.

Recordemos que o funcional de acção, associado a um Lagrangeano $L = L(t, q, \dot{q})$ é:

$$I[q(\cdot)] = \int_{t_0}^{t_1} L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt$$

Uma extremal deste funcional é, como sabemos, uma solução $q = q(t)$ das equações de Euler-Lagrange. Por outro lado, no formalismo Hamiltoniano, essa extremal corresponde a uma solução $(q(t), p(t))$ das equações canónicas, onde $p(t) = L_{\dot{q}}(t, q(t), \dot{q}(t))$. Como:

$$H(t, q, p) = p\dot{q} - L(t, q, \dot{q}) \quad \Rightarrow \quad L(t, q, \dot{q}) = p\dot{q} - H(t, q, p)$$

vemos que:

$$\int_{t_0}^{t_1} L(t, q(t), \dot{q}(t)) dt = \int_{t_0}^{t_1} [p(t)\dot{q}(t) - H(t, q(t), p(t))] dt$$

O segundo integral tem a forma de um integral de linha de uma 1-forma ao longo da curva de fase $t \mapsto (t, q(t), p(t))$. É pois natural considerar a forma de Poincaré-Cartan:

$$\theta_H \stackrel{\text{def}}{=} pdq - H(t, q, p) dt \tag{2.6.1}$$

definida no **espaço de fases alargado** $\mathbb{R} \times T^*Q$. Dados dois pontos fixos $P_0 = (t_0, q_0)$ e $P_1 = (t_1, q_1)$, com $t_0 < t_1$, no espaço de configuração alargado $\mathbb{R} \times Q$, consideremos o conjunto \mathcal{C} constituído por todas as curvas:

$$\gamma : t \mapsto (t, q(t), p(t))$$

definidas no intervalo (fixo) $[t_0, t_1]$, tais que:

$$q(t_0) = q_0 \quad \text{e} \quad q(t_1) = q_1$$

Em particular os valores de $p(t_0)$ e $p(t_1)$ podem ser arbitrários (ver a figura 2.4).

No conjunto \mathcal{C} , de todas essas curvas, definimos o funcional seguinte:

$$\begin{aligned} S_H[\gamma(\cdot)] &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma} \theta_H \\ &= \int_{\gamma} pdq - H(t, q, p) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(p(t) \frac{dq}{dt} - H(t, q(t), p(t)) \right) dt \end{aligned} \tag{2.6.2}$$

Temos então o seguinte teorema:

Figure 2.4:

► **Teorema 2.2** ... As equações canônicas de Hamilton:

$$\begin{cases} \dot{q} = H_p(t, q, p) \\ \dot{p} = -H_q(t, q, p) \end{cases}$$

são as equações de Euler-Lagrange do problema variacional associado ao funcional S_H , definido por (2.6.2), na classe de curvas \mathcal{C} , acima descrita. Mais precisamente, o funcional S_H é estacionário em qualquer solução $(q(t), p(t))$ das equações canônicas, relativamente a todas as variações que deixam as extremidades $P_0 = (t_0, q_0 = q(t_0))$ e $P_1 = (t_1, q_1 = q(t_1))$ fixas, podendo os valores de $p(t_0)$ e $p(t_1)$ ser arbitrários.

• **Dem.:** O Lagrangeano do funcional S_H é:

$$\mathcal{L}(t, q, p, \dot{q}, \dot{p}) = p\dot{q} - H(t, q, p)$$

que é linear em \dot{q} e não depende de \dot{p} . Portanto:

$$\mathcal{L}_{\dot{q}} = p, \quad \mathcal{L}_{\dot{p}} = 0, \quad \mathcal{L}_q = -H_q, \quad \mathcal{L}_p = \dot{q} - H_p$$

e as equações de Euler-Lagrange são:

$$\begin{cases} -\frac{d}{dt}\mathcal{L}_{\dot{q}} + \mathcal{L}_q = 0 \\ -\frac{d}{dt}\mathcal{L}_{\dot{p}} + \mathcal{L}_p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -\frac{d}{dt}p - H_q = 0 \\ 0 + \dot{q} - H_p = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{p} = -H_q \\ \dot{q} = H_p \end{cases}$$

que são exactamente as equações canônicas de Hamilton. Por outro lado, a energia de \mathcal{L} é:

$$\begin{aligned} E_{\mathcal{L}}(t, q, p, \dot{q}, \dot{p}) &= \mathcal{L}_{\dot{q}}\dot{q} + \mathcal{L}_{\dot{p}}\dot{p} - \mathcal{L}(t, q, p, \dot{q}, \dot{p}) \\ &= p\dot{q} - p\dot{q} + H(t, q, p) \\ &= H(t, q, p) \end{aligned} \tag{2.6.3}$$

O espaço de configuração alargado deste problema variacional é o espaço $\mathbb{R} \times T^*Q \cong \mathbb{R}^{2n+1}$, munido das coordenadas (t, q, p) . As restrições são:

$$\begin{aligned} \Phi_0 : \mathbb{R}^{2n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, & \Phi_0(t, q, p) &= (t - t_0, q - q_0) \\ \Phi_1 : \mathbb{R}^{2n+1} &\rightarrow \mathbb{R}^{n+1}, & \Phi_1(t, q, p) &= (t - t_1, q - q_1) \end{aligned} \tag{2.6.4}$$

e portanto as condições de transversalidade reduzem-se a:

$$\mathcal{L}_{\dot{p}}\delta p_0 = 0 = \mathcal{L}_{\dot{p}}\delta p_1 \tag{2.6.5}$$

que não impõem qualquer restrição aos valores de $p(t_0)$ e $p(t_1)$.

■.

Suponhamos agora que $H = H(q, p)$ não depende explicitamente de t . Por conservação de energia, se $t \mapsto (q(t), p(t))$ é uma solução das equações canônicas então:

$$H(q(t), p(t)) \equiv h \quad (\text{constante})$$

Suponhamos ainda que h é valor regular de H , de tal forma que:

$$\Sigma_h \stackrel{\text{def}}{=} \{(q, p) \in T^*Q : H(q, p) \equiv h\} \quad (2.6.6)$$

é uma hipersuperfície de codimensão 1 em T^*Q . Uma solução das equações canônicas que comece em Σ_h permanecerá sempre em Σ_h .

Fixemos dois pontos $q_0, q_1 \in Q$ e consideremos o conjunto \mathcal{C}_h , definido por:

$$\mathcal{C}_h = \left\{ \begin{array}{l} (t_0, t_1, \gamma) : t_0 < t_1 \in \mathbb{R}, \quad \gamma : [t_0, t_1] \rightarrow T^*Q, \text{ de classe } C^2, \text{ tais que} \\ q(t_0) = q_0, q(t_1) = q_1, \text{ com energia constante } h, \text{ i.e.: } H(\gamma(t)) \equiv h \end{array} \right\} \quad (2.6.7)$$

onde pusemos $q(t) = (\pi \circ \gamma)(t)$.

Note que agora os valores de $t_0, t_1, p_0 = p(t_0)$ e $p_1 = p(t_1)$ podem ser arbitrários (ver a figura 2.5). A fixação do nível de energia é de certa forma compensada pela variação do intervalo de parametrização da curva.

Figure 2.5:

Definamos o **funcional de acção reduzida** S_{red} , através de:

$$S_{red}[\gamma(\cdot)] \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma} pdq \quad (2.6.8)$$

e vamos mostrar que este funcional é estacionário em cada solução $\gamma(t) = (q(t), p(t))$ das equações canônicas, relativamente a variações em \mathcal{C}_h .

Para isso, consideremos uma “curva” em \mathcal{C}_h , $\alpha \mapsto (t_0(\alpha), t_1(\alpha), \gamma_\alpha = \gamma(\cdot; \alpha)) \in \mathcal{C}_h$, com:

$$\gamma_\alpha(t) = \gamma(t; \alpha) = (q(t; \alpha), p(t; \alpha)), \quad t \in [t_0(\alpha), t_1(\alpha)] \quad (2.6.9)$$

tal que:

$$q(t_0(\alpha), \alpha) \equiv q_0, \quad \text{e} \quad q(t_1(\alpha), \alpha) \equiv q_1$$

Temos então que:

$$\begin{aligned} S_{red}(\alpha) &\stackrel{\text{def}}{=} \int_{\gamma_\alpha} pdq \\ &= \int_{t_0(\alpha)}^{t_1(\alpha)} \left(p(t; \alpha) \frac{dq(t; \alpha)}{dt} \right) dt \end{aligned} \quad (2.6.10)$$

Calculemos a derivada em ordem a α , para $\alpha = 0$. Nesse cálculo, usaremos as notações seguintes:

$$\begin{aligned} t_0(0) = t_0, \quad t_1(0) = t_1, \quad \frac{dt_0}{d\alpha}(0) = \delta t_0, \quad \frac{dt_1}{d\alpha}(0) = \delta t_1 \\ \frac{\partial q}{\partial \alpha}(t; 0) = \eta(t), \quad \frac{\partial p}{\partial \alpha}(t; 0) = \xi(t) \\ \eta(t_0) = \eta_0, \quad \eta(t_1) = \eta_1, \quad \xi(t_0) = \xi_0, \quad \xi(t_1) = \xi_1 \\ p(t_0; 0) = p_0, \quad p(t_1; 0) = p_1 \end{aligned}$$

Como estamos a supôr que:

$$q_0(\alpha) = q(t_0(\alpha); \alpha) \equiv q_0, \quad \text{e} \quad q_1(\alpha) = q(t_1(\alpha); \alpha) \equiv q_1$$

isso implica que, para $\alpha = 0$:

$$0 = \delta q_0 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dq_0}{d\alpha}(0) = \dot{q}(t_0)\delta t_0 + \eta_0, \quad \text{e} \quad 0 = \delta q_1 \stackrel{\text{def}}{=} \frac{dq_1}{d\alpha}(0) = \dot{q}(t_1)\delta t_1 + \eta_1 \quad (2.6.11)$$

Calculando finalmente a derivada de $S_{red}(\alpha)$, em ordem a α , para $\alpha = 0$, vem que:

$$\begin{aligned} \left. \frac{dS_{red}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} &= [p_1 \dot{q}(t_1)] \delta t_1 - [p_0 \dot{q}(t_0)] \delta t_0 + \int_{t_0}^{t_1} \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \left(p(t; \alpha) \frac{dq(t; \alpha)}{dt} \right) dt \\ &= -p_1 \eta_1 + p_0 \eta_0 + p(t) \eta(t) \Big|_{t_0}^{t_1} + \int_{t_0}^{t_1} [\dot{q}(t) \xi(t) - \dot{p}(t) \eta(t)] dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} [\dot{q}(t) \xi(t) - \dot{p}(t) \eta(t)] dt \end{aligned} \quad (2.6.12)$$

onde usamos integração por partes e as condições (2.6.11).

Por outro lado, recordemos que estamos a supôr que as curvas $\gamma_\alpha(t) = \gamma(t; \alpha) = (q(t; \alpha), p(t; \alpha))$, têm toda energia constante, igual a h :

$$H(q(t; \alpha), p(t; \alpha)) \equiv h$$

Portanto, calculando a derivada em ordem a α , para $\alpha = 0$, vem que:

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} H(q(t; \alpha), p(t; \alpha)) \\ &= H_q(q(t), p(t)) \eta(t) + H_p(q(t), p(t)) \xi(t) \\ &= \dot{p}(t) \eta(t) - \dot{q}(t) \xi(t) \end{aligned} \quad (2.6.13)$$

já que estamos a supôr que $(q(t), p(t))$ é solução das equações canônicas. Concluindo:

$$\left. \frac{dS_{red}}{d\alpha} \right|_{\alpha=0}$$

e, resumindo toda esta discussão, podemos pois enunciar o seguinte teorema:

► **Teorema 2.3 (Princípio de Maupertuis)** ... Suponhamos que $H = H(q, p)$ não depende explicitamente de t , e que fixamos um certo nível regular de energia constante h . Então as soluções $(q(t), p(t))$ das equações canónicas são as extremais do funcional de acção reduzida:

$$S_{red}[\gamma(\cdot)] = \int_{\gamma} \theta = \int_{\gamma} p dq \quad (2.6.14)$$

relativamente à classe \mathcal{C}_h de todas as curvas situadas em Σ_h (portanto de energia constante h), que deixam as extremidades q_0 e q_1 fixas (podendo os valores de t_0, t_1, p_0 e p_1 ser arbitrários).

■

2.7 Os princípios variacionais de Jacobi e de Fermat. Analogia óptico-mecânica

Consideremos uma partícula de massa m , movendo-se em \mathbb{R}^3 , sob a acção de um campo de forças conservativo $F(q) = -\nabla V(q)$. Como já sabemos, o Hamiltoniano é:

$$H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + V(q)$$

Consideremos, como na secção anterior, a restrição do funcional de acção reduzida $S_{red} = \int p dq$, à classe \mathcal{C}_h de curvas regulares (com velocidade que nunca se anula), de energia constante h . Ao longo de cada uma dessas curvas, temos que:

$$H(q(t), p(t)) = \frac{1}{2m} p(t)^2 + V(q(t)) \equiv h$$

e portanto $h > V(q(t))$ e ainda:

$$\|p(t)\| = \sqrt{2m [h - V(q(t))]} > 0 \quad (2.7.1)$$

Por outro lado, ao longo de uma extremal, i.e., ao longo de uma solução das equações canónicas, tem-se que $\dot{q} = H_p = \frac{p}{m}$, isto é, \dot{q} e p são colineares, e daí que¹:

$$p\dot{q} = p \cdot \dot{q} = \|p\| \|\dot{q}\|$$

Portanto:

$$\begin{aligned} S_{red}[q(\cdot), p(\cdot)] &= \int p(t)\dot{q}(t) dt \\ &= \int \|p\| \|\dot{q}\| dt \\ &= \int \sqrt{2m [h - V(q(t))]} ds \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

isto é:

¹pela desigualdade de Cauchy-Schwartz, que, neste caso, é igualdade já que $\dot{q} = \frac{p}{m}$

► **Proposição 2.1 (Princípio de Jacobi)** ... As projecções $q(t)$, das soluções regulares de energia constante h , das equações canónicas, com Hamiltoniano $H(q, p) = \frac{1}{2m} p^2 + V(q)$, são as geodésicas (não parametrizadas) da métrica Riemanniana em $\mathcal{U} = \{q \in \mathbb{R}^3 : V(q) < h\}$:

$$d\sigma \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{2m[h - V(q)]} ds \quad (2.7.3)$$

onde ds é a métrica Euclideana usual em \mathbb{R}^3 . ■

Consideremos agora o Hamiltoniano $H(q, p) = \frac{\|p\|}{n(q)}$, onde $q = (x, y, z)$, $p = (p_x, p_y, p_z)$ e $\|p\| = \sqrt{p_x^2 + p_y^2 + p_z^2}$. Este Hamiltoniano descreve a propagação dos raios de luz num meio isotrópico com índice de refração $n(q) > 0$ (ver [?] ou [?]). Pondo $v(q) = 1/n(q)$, o Hamiltoniano escreve-se na forma:

$$H(q, p) = v(q) \|p\|$$

Consideremos, como antes, a restrição do funcional de acção reduzida $S_{red} = \int pdq$, à classe de curvas regulares de energia constante $h = 1$:

$$1 \equiv H(q(t), p(t)) = v(q) \|p\| \quad (2.7.4)$$

Ao longo de uma extremal, i.e., ao longo de uma solução das equações canónicas, tem-se que $\dot{q} = H_p = v(q) \frac{p}{\|p\|}$. Em particular, $\|\dot{q}\| = v(q)$, isto é, $v(q) = 1/n(q)$ é a velocidade com que o raio de luz passa em q .

Como, por (2.7.4), $v(q)\|p\| = 1$, tem-se que $\|p\| = 1/v(q)$. Por outro lado, como $\dot{q} = v(q) \frac{p}{\|p\|}$, vemos que p e \dot{q} são colineares e portanto $p\dot{q} = p \cdot \dot{q} = \|p\| \|\dot{q}\|$. Daí que:

$$\begin{aligned} S_{red}[q(\cdot), p(\cdot)] &= \int p(t)\dot{q}(t) dt \\ &= \int \|p\| \|\dot{q}\| dt \\ &= \int \frac{1}{v(q)} ds \\ &= \int n(q) ds \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

O integral $\int_{\gamma} n(q) ds$ chama-se o comprimento óptico do raio γ . Note que esse mesmo integral é igual a $\int_{\gamma} \frac{ds}{v(q)}$, e portanto é o tempo de percurso da luz, ao longo do raio γ . Obtemos assim o seguinte:

► **Proposição 2.2 (Princípio de Fermat)** ... Entre todas as curvas diferenciáveis que unem dois pontos fixos q_0 e q_1 , o caminho seguido efectivamente pela luz é aquele em que o tempo de percurso atinge um extremo. Estas curvas (os raios de luz) são as geodésicas da métrica:

$$d\sigma = n(q) ds \quad (2.7.6)$$

onde ds é a métrica Euclideana usual em \mathbb{R}^3 .

■.

Comparando os dois princípios anteriores - o de Jacobi, no contexto da mecânica clássica (conservativa) com o de Fermat, no contexto da óptica geométrica - mais especificamente, as fórmulas (2.7.3) e (2.7.6), concluímos que, pondo:

$$n(q) = \sqrt{2m [h - V(q)]} \quad (2.7.7)$$

a mecânica clássica pode ser interpretada como uma óptica geométrica de propagação de raios num meio isotrópico de índice de refração $n(q) = \sqrt{2m [h - V(q)]}$.

Esta analogia este na base dos trabalhos de Hamilton e à sua formulação geométrica da mecânica clássica, hoje chamada mecânica Hamiltoniana. Mais tarde, com Schrödinger, essa mesma analogia esteve também na base da criação da mecânica ondulatória e posteriormente da mecânica quântica.

Capítulo 3

A função de acção. Teoria de Hamilton-Jacobi

3.1 A função de acção S . Equação de Hamilton-Jacobi $S_t + H(t, q, S_q) = 0$

Fixemos um ponto $P_0 = (t_0, q_0) \in \mathbb{R} \times Q$ e consideremos o espaço:

$$\mathcal{C}_0 = \{(t, c) : t_0 < t \in \mathbb{R}, c : [t_0, t] \rightarrow Q\} \quad (3.1.1)$$

e o funcional $I[t, c] = \int_{t_0}^t L(t, c(t), \dot{c}(t)) dt$. Agora estamos a fixar a extremidade esquerda $P_0 = (t_0, q_0)$, e variamos a extremidade direita $P = (t, q) \in \mathbb{R} \times Q$.

Vamos supôr ainda que existe um aberto $\mathcal{U} \subseteq \mathbb{R} \times Q$ tal que, para todo o ponto $P = (t, q) \in \mathcal{U}$ existe uma única extremal que une P_0 a P . Diz-se neste caso que, em \mathcal{U} , está definido um **feixe central de extremais**, de pólo P_0 .

Figure 3.1: Feixe central de extremais.

Definámos agora uma função $S : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}$, chamada a **função acção**, cujo valor num ponto $P = (t, q) \in \mathcal{U}$, é igual ao valor do funcional I na única extremal que une P_0 a P . Portanto:

$$S(t, q) = S(t_0, q_0; t, q) = \int_{t_0}^t L(\tau, c(\tau), \dot{c}(\tau)) dt \quad (3.1.2)$$

onde $c : [t_0, t] \rightarrow Q$ é a única extremal que une $P_0 = (t_0, q_0)$ a $P = (t, q = c(t)) \in \mathcal{U}$. O nosso objectivo é calcular a diferencial de S .

Para isso, definámos primeiro o chamado **campo de inclinações** do feixe central de extremais. Com as hipóteses anteriores, para cada ponto $P = (t, q) \in \mathcal{U}$, podemos definir um único vector tangente $\dot{c}(t) \in T_q Q$, que não é mais do que o vector velocidade, em t , da única extremal $c : [t_0, t] \rightarrow Q$, que une $P_0 = (t_0, q_0)$ a $P = (t, q = c(t))$.

À função $\mathfrak{J} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R} \times TQ$ definida por:

$$\mathfrak{J}(t, q) = (t, c(t), \dot{c}(t)) \quad (3.1.3)$$

chamámos o **campo de inclinações** do feixe central de extremais. A imagem de \mathfrak{J} é uma subvariedade de dimensão $n + 1$ em $\mathbb{R} \times TQ$, parametrizado pelos pontos $(t, q) \in \mathcal{U}$.

► **Proposição 3.1** ... A diferencial da acção é dada por:

$$dS = \mathfrak{J}^* \theta_L \quad (3.1.4)$$

onde $\theta_L = L_{\dot{q}} dq - E_L dt$ é a forma de Poincaré-Cartan em $\mathbb{R} \times TQ$.

- **Dem.:** Seja $(\delta t, \delta q) \in T_{(t,q)}(\mathbb{R} \times Q)$ um vector tangente arbitrário a $\mathbb{R} \times Q$ no ponto $(t, q) \in \mathcal{U}$, e $\gamma : \alpha \mapsto (t(\alpha), q(\alpha))$ uma curva suave, em \mathcal{U} , tal que $\gamma(0) = (t(0), q(0)) = (t, q)$ e $\frac{d\gamma}{d\alpha}(0) = (\delta t, \delta q)$. Seja $q(t; \alpha)$ a família a um parâmetro α de extremais, tal que $q(t; 0) = c(t)$, $q(t(\alpha); \alpha) = q(\alpha)$ e ainda $q(t_0; \alpha) \equiv q_0$. Por definição da acção:

$$S(t(\alpha), q(\alpha)) = J(\alpha) = \int_{t_0}^{t(\alpha)} L(t, q(t; \alpha), \dot{q}(t; \alpha)) dt$$

Aplicando à família $q(t; \alpha)$ a teoria exposta na resolução do problema ??, nomeadamente a fórmula (2.4.9), obtemos:

$$\begin{aligned} dS_{(t,q)}(\delta t, \delta q) &= \left. \frac{dS(t(\alpha), q(\alpha))}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} = \left. \frac{dJ(\alpha)}{d\alpha} \right|_{\alpha=0} \\ &= (L_{\dot{q}} dq - E_L dt) \Big|_{t_0}^t + \int_{t_0}^t \left(L_q(t) - \frac{d}{dt} L_{\dot{q}}(t) \right) \eta(t) dt \\ &= (L_{\dot{q}} dq - E_L dt)_{(t,q)}(\delta t, \delta q) \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

atendendo a que c satisfaz a equação de Euler-Lagrange (2.5.3), e ainda ao facto de que todas as curvas $q(t; \alpha)$ passam pelo ponto fixo $P_0 = (t_0, q_0)$. Portanto $dS = \mathfrak{J}^*(L_{\dot{q}} dq - E_L dt)$, como se pretendia. ■

Supondo agora que o Lagrangeano é hiperregular, podemos passar ao formalismo canónico, via transformada de Legendre. Definimos então o chamado **campo de momentos** do feixe central de extremais, através de:

$$p(t, q) = L_{\dot{q}}(t, q, \dot{c}(t, q)), \quad (t, q) \in \mathcal{U} \quad (3.1.6)$$

O respectivo gráfico é agora uma subvariedade de dimensão $n + 1$ em $\mathbb{R} \times T^*Q$, parametrizado por:

$$\mathcal{P}(t, q) = (t, q, p(t, q)), \quad (t, q) \in \mathcal{U} \quad (3.1.7)$$

Como o Hamiltoniano $H = H(t, q, p)$ é a energia E_L , expressa nas coordenadas canónicas (t, q, p) , vemos que:

$$dS = \mathcal{P}^* \theta_H \quad (3.1.8)$$

onde $\theta_H = pdq - H dt$ é a forma de Poincaré-Cartan em $\mathbb{R} \times T^*Q$. Mais detalhadamente:

$$\boxed{dS(t, q) = p(t, q) dq - H(t, q, p(t, q)) dt} \quad (3.1.9)$$

Como $-H dt + p dq = dS = \frac{\partial S}{\partial t} dt + \frac{\partial S}{\partial q} dq$, concluímos que:

$$p = \frac{\partial S}{\partial q} \quad \text{e} \quad H = -\frac{\partial S}{\partial t}$$

e portanto S satisfaz a PDE de primeira ordem:

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t}(t, q) + H\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}(t, q)\right) = 0} \quad (3.1.10)$$

ou simplesmente:

$$\boxed{S_t + H(t, q, S_q) = 0} \quad (3.1.11)$$

que se chama a **equação de Hamilton-Jacobi** para a função $S = S(t, q)$.

► **Exemplo 3.1** ... Consideremos o funcional:

$$I[y(x)] = \frac{1}{2} \int_0^a (y'^2 - y^2) dx$$

A equação de Euler-Lagrange é:

$$0 = \frac{d}{dx} L_{y'} - L_y = y'' + y$$

cuja a solução geral é:

$$y(x) = a \cos x + b \sin x$$

Considerando as extremais que passam na origem $\mathbf{0} = (0, 0)$, obtemos a família:

$$y(x) = b \sin x$$

(já que $0 = y(0) = a$) que constitui um feixe central de extremais de pólo $\mathbf{0}$, no aberto $\mathcal{U} =]0, \pi[\times \mathbb{R} \subset \mathbb{R}_{xy}^2$. A extremal que une o ponto $(0, 0)$ ao ponto $(x, y) \in \mathcal{U}$ é $y(\tau) = \frac{y}{\sin x} \sin \tau$, $0 \leq \tau \leq x$ e, portanto a acção é:

$$\begin{aligned} S(x, y) &= \frac{1}{2} \int_0^x (y'(\tau)^2 - y(\tau)^2) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \int_0^x \left(\left(\frac{y}{\sin x} \right)^2 \cos^2 \tau - \left(\frac{y}{\sin x} \right)^2 \sin^2 \tau \right) d\tau \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sin x} \right)^2 \int_0^x \cos 2\tau d\tau \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{y}{\sin x} \right)^2 \frac{\sin 2x}{2} \\ &= \frac{1}{2} y^2 \cotg x \end{aligned}$$

A sua diferencial é:

$$dS = -\frac{1}{2}y^2 \operatorname{cosec}^2 x dx + y \cotg x dy$$

Vamos verificar que $dS = p dy - H dx$ (com uma óbvia simplificação de notação). O campo de inclinações do feixe é:

$$\mathfrak{J}(x, y) = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=x} \frac{y}{\sin x} \sin \tau = y \cotg x$$

e portanto o respectivo campo de momentos é:

$$p(x, y) = L_{y'}(x, y, \mathfrak{J}(x, y)) = \mathfrak{J}(x, y) = y \cotg x$$

já que $L = \frac{1}{2}(y'^2 - y^2)$ e $p = L_{y'} = y'$.

Por outro lado: $H(x, y, p) = py' - L|_{y'=p} = y'^2 - \frac{1}{2}(y'^2 - y^2)|_{y'=p} = \frac{1}{2}(p^2 + y^2)$, e portanto:

$$\begin{aligned} p(x, y)dy - H(x, y, p(x, y))dx &= y \cotg x dy - \frac{1}{2}y^2(\cotg^2 x + 1) dx \\ &= -\frac{1}{2}y^2 \operatorname{cosec}^2 x dx + y \cotg x dy \\ &= dS \end{aligned}$$

como se pretendia. A equação de Hamilton-Jacobi é pois:

$$S_x + \frac{1}{2}(S_y^2 + y^2) = 0$$

3.1.1 Equação H-J para sistemas mecânicos conservativos

A equação de Hamilton-Jacobi para a acção $S = S(t, q)$ tem, neste caso, a forma:

$$S_t + H(q, S_q) = 0 \tag{3.1.12}$$

onde o Hamiltoniano H é dado por (2.3.3):

$$H(q, p) = \frac{1}{2}g^{ij}(q)p_i p_j + V(q) \tag{3.1.13}$$

Portanto, a equação de Hamilton-Jacobi é:

$$S_t + \frac{1}{2}g^{ij}(q)S_{q^i}S_{q^j} + V(q) = 0 \tag{3.1.14}$$

Usando o método de separação de variáveis, vamos procurar soluções da forma:

$$S(t, q) = f(t) + W(q)$$

Vem então que $S_t(t, q) = f'(t)$ e $S_q(t, q) = W_q(q)$. Substituindo na equação (3.1.12), obtemos:

$$f'(t) = -H(q, W_q(q))$$

Como o primeiro membro depende apenas de t e o segundo apenas de \mathbf{x} , isto implica que:

$$f(t) \equiv -ht + a, \quad \text{e} \quad H(q, W_q(q)) \equiv h$$

onde h e a são constantes. A solução geral da equação (3.1.12) será pois:

$$S(t, q) = -ht + W(q) + a$$

onde W é solução da chamada **equação reduzida de Hamilton-Jacobi**:

$$H(q, W_q) \equiv h \quad (3.1.15)$$

Por exemplo, para uma partícula de massa m , movendo-se em \mathbb{R}^3 sob a acção de um campo de forças $\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla V(\mathbf{x})$, o Hamiltoniano é:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + V(\mathbf{x})$$

e a equação reduzida de Hamilton-Jacobi, para $W = W(\mathbf{x})$, tem a forma (3.5.14), isto é:

$$\frac{1}{2m} (\nabla W)^2 + V(\mathbf{x}) \equiv h \quad (3.1.16)$$

onde $(\nabla W)^2 = \nabla W \cdot \nabla W = \|\nabla W\|^2$.

3.1.2 A acção para uma partícula livre

Para uma partícula de massa m , movendo-se livremente em \mathbb{R}^3 (sob a acção de um campo de forças nulo) o Hamiltoniano é:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2$$

e a equação de Hamilton-Jacobi, para $S = S(t, \mathbf{x})$, tem a forma:

$$S_t - \frac{1}{2m} (S_{\mathbf{x}})^2 = 0 \quad (3.1.17)$$

Em coordenadas cartesianas $\mathbf{x} = (x, y, z)$, a equação (3.1.20) escreve-se na forma:

$$S_t - \frac{1}{2m} (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) = 0 \quad (3.1.18)$$

A equação de Newton é:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{0}$$

cuja solução geral é:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{a}\tau + \mathbf{b}$$

a que corresponde um movimento rectilíneo e uniforme (velocidade constante). Dado um ponto arbitrário $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, a família de trajectórias que, no instante $\tau = t_0$, começam em \mathbf{x}_0 , é dada por:

$$\mathbf{x}(\tau) = \mathbf{a}(\tau - t_0) + \mathbf{x}_0$$

Essa família constitui um feixe central de pólo $P_0 = (t_0, \mathbf{x}_0)$, definido em $\mathcal{U} = \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : t \neq t_0\}$. A única trajectória, desse feixe, que une $P_0 = (t_0, \mathbf{x}_0)$ a um outro ponto $P = (t, \mathbf{x}) \in \mathcal{U}$ é:

$$\mathbf{x}(\tau) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t - t_0} (\tau - t_0) + \mathbf{x}_0, \quad t_0 \leq \tau \leq t$$

A acção é dada por:

$$\begin{aligned} S(t, \mathbf{x}) = S(t_0, \mathbf{x}_0; t, \mathbf{x}) &= \frac{1}{2}m \int_{t_0}^t \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{(t - t_0)^2} d\tau \\ &= \frac{1}{2}m \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{t - t_0}, \quad (t, \mathbf{x}) \in \mathcal{U} \end{aligned} \quad (3.1.19)$$

atendendo a que o Lagrangeano é $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2$ e a que $\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t - t_0}$.

O campo de inclinações do feixe é:

$$\mathfrak{J}(t, \mathbf{x}) = \left. \frac{d}{d\tau} \right|_{\tau=t} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t - t_0} (\tau - t_0) + \mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t - t_0}$$

e o campo de momentos:

$$\mathbf{p}(t, \mathbf{x}) = L_{\dot{\mathbf{x}}}(t, \mathbf{x}, \mathfrak{J}(t, \mathbf{x})) = m \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t - t_0}$$

O pull-back da forma de Poincaré-Cartan, $\mathcal{P}^*\theta_H$ é:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^*\theta_H &= \mathbf{p}(t, \mathbf{x})d\mathbf{x} - H(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}(t, \mathbf{x}))dt \\ &= m \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t - t_0} d\mathbf{x} - \frac{1}{4m^2} m^2 \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{(t - t_0)^2} dt \\ &= m \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t - t_0} d\mathbf{x} - \frac{1}{4} \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{(t - t_0)^2} dt \end{aligned}$$

e é óbvio que $dS = \mathcal{P}^*\theta_H$. É fácil ver que S , dada por (3.1.19), é solução da equação de Hamilton-Jacobi $S_t - \frac{1}{2m}(S_{\mathbf{x}})^2 = 0$.

Consideremos a hipersuperfície Σ_m , em \mathcal{U} , definida por:

$$\frac{1}{2}m \frac{(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2}{t - t_0} \equiv \frac{1}{2}m$$

Para cada $t > t_0$ fixo, a intersecção da hipersuperfície Σ_m , com o hiperplano $\{t\} \times \mathbb{R}^3$, é dada por:

$$(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)^2 = t - t_0$$

e projectando estas superfícies no espaço de configuração $\mathbb{R}_{\mathbf{x}}^3$, obtemos uma família de esferas, centradas em \mathbf{x}_0 , de raio $(t - t_0)^{1/2}$, a que chamamos as superfícies de onda da partícula livre.

3.1.3 A acção para uma partícula num campo constante

Para uma partícula de massa m , movendo-se em \mathbb{R}^3 sob a acção de um campo de forças constante $\mathbf{F}(\mathbf{x}) \equiv \mathbf{F}$, o Hamiltoniano é:

$$H(\mathbf{x}, \mathbf{p}) = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + \mathbf{F}\mathbf{x}$$

e a equação de Hamilton-Jacobi, para $S = S(t, \mathbf{x})$, tem a forma:

$$S_t - \frac{1}{2m}(S_{\mathbf{x}})^2 + \mathbf{F}\mathbf{x} = 0 \quad (3.1.20)$$

Em coordenadas cartesianas $\mathbf{x} = (x, y, z)$, a equação (3.1.20) escreve-se na forma:

$$S_t - \frac{1}{2m} (S_x^2 + S_y^2 + S_z^2) + Ax + By + Cz = 0 \quad (3.1.21)$$

onde $\mathbf{F} = (A, B, C)$. A equação de Newton é:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}$$

cuja solução geral é:

$$\mathbf{x}(\tau) = \frac{\mathbf{F}}{m} \frac{\tau^2}{2} + \mathbf{a}\tau + \mathbf{b}$$

a que corresponde um movimento uniformemente acelerado (aceleração constante). Dado um ponto arbitrário $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^3$, a família de trajectórias que, no instante $\tau = t_0$, começam em \mathbf{x}_0 , é dada por:

$$\mathbf{x}(\tau) = \frac{\mathbf{F}}{2m} (\tau^2 - t_0^2) + \mathbf{a}(\tau - t_0) + \mathbf{x}_0$$

Essa família constitui um campo central de pólo $P_0 = (t_0, \mathbf{x}_0)$. A única trajectória, desse campo, que une (t_0, \mathbf{x}_0) a um outro ponto (t, \mathbf{x}) é:

$$\mathbf{x}(\tau) = \frac{\mathbf{F}}{2m} (\tau^2 - t_0^2) - \left[\frac{\mathbf{F}}{2m} (t + t_0) + \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t - t_0} \right] (\tau - t_0) + \mathbf{x}_0, \quad t_0 \leq \tau \leq t$$

Efectuando os cálculos para a acção, vemos que ela é dada por:

$$S(t, \mathbf{x}) = S(t_0, \mathbf{x}_0; t, \mathbf{x}) = \frac{\mathbf{F}^2}{24m} (t - t_0)^3 - \mathbf{F}\mathbf{x}(t - t_0) + \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t + t_0} \quad (3.1.22)$$

atendendo a que o Lagrangeano é $L(\mathbf{x}, \dot{\mathbf{x}}) = \frac{1}{2}m\dot{\mathbf{x}}^2 - \mathbf{F}\mathbf{x}$ e a que $\dot{\mathbf{x}}(\tau) = \frac{\mathbf{F}}{2m}(2\tau - t - t_0) - \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_0}{t - t_0}$.

3.1.4 Equação H-J para o oscilador harmónico

Continuemos com o exemplo 2.3.1. A equação de Hamilton-Jacobi para uma função $S(t, x)$, correspondente ao Hamiltoniano $H = \frac{\omega}{2}(x^2 + p^2)$ é:

$$S_t + \frac{\omega}{2} (x^2 + S_x^2) = 0 \quad (3.1.23)$$

A solução geral da equação de Euler-Lagrange é, como vimos antes:

$$x(\tau) = A \cos(\omega\tau + b)$$

onde A, b são constantes. Se consideramos o feixe de extremais que parte de $\mathbf{0} = (0, 0)$, obtemos $b = \pi/2$, uma vez que $0 = x(0) = A \cos b$. Portanto essa extremais são do tipo $x(\tau) = A \cos(\omega\tau + \pi/2)$. Dado um ponto (t, x) , com $0 < t < \pi$, a única extremal que une $(0, 0)$ a (t, x) tem por equação:

$$x(\tau) = \frac{x}{\cos(\omega t + \pi/2)} \cos(\omega\tau + \pi/2), \quad 0 \leq \tau \leq t$$

e portanto o campo de inclinações do feixe é:

$$\mathfrak{J}(t, x) = -x\omega \operatorname{tg}(\omega t + \pi/2)$$

Por outro lado, como $L(x, \dot{x}) = \frac{\dot{x}^2}{2\omega} - \frac{\omega x^2}{2}$, vem que $L_{\dot{x}} = \dot{x}/\omega$, e o campo de momentos do feixe é:

$$p(t, x) = L_{\dot{x}}(t, x, \mathfrak{J}(t, x)) = -x \operatorname{tg}(\omega t + \pi/2)$$

O pull-back da forma de Poincaré-Cartan, $\mathcal{P}^*\theta_H$, é pois dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^*\theta_H &= p(t, x)dx - H(t, x, p(t, x))dt \\ &= -x \operatorname{tg}(\omega t + \pi/2)dx - \frac{\omega}{2}(x^2 + (-x \operatorname{tg}(\omega t + \pi/2))^2)dt \end{aligned}$$

A acção $S = S(t, x)$ é dada por:

$$\begin{aligned} S(t, x) &= \int_0^t \left[\frac{x^2\omega^2}{2\omega \cos^2(\omega\tau + \pi/2)} \sin^2(\omega\tau + \pi/2) - \frac{\omega}{2} \frac{x^2}{\cos^2(\omega\tau + \pi/2)} \cos^2(\omega\tau + \pi/2) \right] d\tau \\ &= -\frac{x^2\omega}{2 \cos^2(\omega t + \pi/2)} \int_0^t \cos(2\omega\tau + \pi) \\ &= -\frac{x^2 \sin(2\omega t + \pi)}{4 \cos^2(\omega t + \pi/2)} \\ &= \frac{x^2}{2} \operatorname{cotg}(\omega t) \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

Verifiquemos que S satisfaz a equação de Hamilton-Jacobi (3.1.23):

$$S_t = -\frac{x^2\omega}{2 \sin^2(\omega t)}, \quad S_x = x \operatorname{cotg}(\omega t)$$

e portanto:

$$\begin{aligned} S_t + \frac{\omega}{2} (x^2 + S_x^2) &= -\frac{x^2\omega}{2 \sin^2(\omega t)} + \frac{\omega}{2} (x^2 + x^2 \operatorname{cotg}^2(\omega t)) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

como se pretendia.

3.2 Transformações canónicas. Método de Hamilton

Para motivar o conceito de transformação canónica e respectivas funções geradoras, vamos, nesta secção, descrever a abordagem de Hamilton, baseada em argumentos muito simples de óptica geométrica.

Suponhamos então que temos um sistema óptico, onde se propagam os raios de luz. Estes partem de um plano \mathcal{P}_0 (o plano objecto), atravessam o sistema óptico, e atingem um outro plano \mathcal{P}_1 (o plano imagem). Supômos que esse sistema óptico admite um eixo a que, como é tradicional, chamamos o eixo dos t 's, e que os raios luminosos ρ se projectam difeomòrficamente sobre esse eixo, de tal forma que podem ser parametrizados na forma $t \mapsto \rho(t) = (t, q(t))$. Os planos objecto \mathcal{P}_0 e imagem \mathcal{P}_1 , correspondem a $t = t_0$ e a $t = t_1$, respectivamente. Adoptámos coordenadas $(Q, \dot{Q}) = (Q^i, \dot{Q}^i)$ para $T\mathcal{P}_0$ e $(q, \dot{q}) = (q^i, \dot{q}^i)$ para $T\mathcal{P}_1$ e ainda coordenadas canónicas $(Q, P) = (Q^i, P_i)$ para $T^*\mathcal{P}_0$ e $(q, p) = (q^i, p_i)$ para $T^*\mathcal{P}_1$.

O nosso objectivo é mostrar que os raios luminosos definem uma transformação:

$$F_{t_0, t_1} : T^*\mathcal{P}_0 \rightarrow T^*\mathcal{P}_1$$

Figure 3.2: .

que é canónica, isto é, preserva as estruturas simplécticas (figura 3.2).

Qualquer raio ρ , dado por $t \mapsto \rho(t) = (t, q(t))$, $t \in [t_0, t_1]$, tem um comprimento óptico dado por:

$$\begin{aligned} S[\rho] &= \int_{t_0}^{t_1} L(t, q, \dot{q}) dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} p\dot{q} - H(t, q, p) dt \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

onde:

$$\begin{aligned} L(t, q, \dot{q}) &= n(t, q)\sqrt{1 + \dot{q}^2} \\ H(t, q, p) &= p\dot{q} - L \\ &= \frac{-n}{\sqrt{1 + \dot{q}^2}} \\ &= -\sqrt{n^2 - p^2} \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

estão relacionados através da transformada de Legendre:

$$p = L_{\dot{q}} = \frac{n\dot{q}}{\sqrt{1 + \dot{q}^2}} \quad (3.2.3)$$

O raio incidente é completamente determinado pelo seu ponto $Q = (Q^i)$ de intersecção com o plano objecto \mathcal{P}_0 , e pelos seus “cossenos directores ópticos” $P = (P_i = n_0 \cos a_i)$. A intersecção $q = (q^i)$, do raio refractado com o plano imagem \mathcal{P}_1 , e os respectivos cossenos directores ópticos $p = (p_i)$, são funções dos dados iniciais em \mathcal{P}_0 :

$$\begin{aligned} q &= q(t_0, t_1; Q, P) \\ p &= p(t_0, t_1; Q, P) \end{aligned} \quad (3.2.4)$$

e são estas funções que definem a transformação canónica:

$$F = F_{t_0, t_1} : T^* \mathcal{P}_0 \rightarrow T^* \mathcal{P}_1 \quad (3.2.5)$$

Como o plano objecto \mathcal{P}_0 estará fixo, durante toda a discussão, omitimos a referência a t_0 . Mantemos porém a dependência explícita de $t = t_1$, isto é, do plano imagem, pois essa dependência é importante no projecto de sistemas ópticos.

A imagem óptica do plano objecto $\mathcal{P}_0 = \{t = t_0\}$ no plano imagem $\mathcal{P}_1 = \{t = t_1\}$ diz-se **perfeita** se a primeira equação em (3.2.8) se reduz a:

$$q = cQ \quad (3.2.6)$$

onde c é uma constante igual para todos os pontos $Q \in \mathcal{P}_0$ e todas as direcções P . O problema principal da concepção de instrumentos ópticos é o de determinar uma distribuição dos meios ópticos $n = n(t, q)$ tais que (3.2.6) seja verificada. Os desvios:

$$\Delta q = q - cQ \quad (3.2.7)$$

dizem-se as **aberrações** do sistema óptico (para um tratamento detalhado deste assunto ver [?]).

O resultado principal da abordagem de Hamilton ao problema anterior, é que **é possível reduzir o problema de calcular as $2n = 4$ funções (3.2.8), que definem a transformação canónica (3.2.5), ao problema de calcular apenas uma! função**. Esta função dir-se-á por isso a **função geradora** da transformação canónica $F = F_{t_0, t_1} : T^*\mathcal{P}_0 \rightarrow T^*\mathcal{P}_1$. As funções (3.2.8) são então calculadas a partir desta função geradora, usando apenas as operações de derivação e eliminação! Vejamos como.

Em primeiro lugar, as funções (3.2.4) (omitindo t_0 e fazendo $t = t_1$):

$$\begin{aligned} q &= q(t; Q, P) \\ p &= p(t; Q, P) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

são calculadas directamente a partir das equações canónicas. Mais concretamente - suponhamos que:

$$\begin{aligned} q(\tau) &= q(\tau; Q, P) \\ p(\tau) &= p(\tau; Q, P) \end{aligned} \quad (3.2.9)$$

é a solução das equações canónicas:

$$\begin{cases} \frac{dq}{d\tau} = H_p \\ \frac{dp}{d\tau} = -H_q \end{cases} \quad (3.2.10)$$

que, para $\tau = t_0$, tem os valores iniciais Q, P , isto é:

$$\begin{aligned} Q &= q(t_0) = q(t_0; Q, P) \\ P &= p(t_0) = p(t_0; Q, P) \end{aligned} \quad (3.2.11)$$

No plano imagem \mathcal{P}_1 essas funções (3.2.9) tomam os valores:

$$q = q(t) = q(t; Q, P) \quad (3.2.12)$$

$$p = p(t) = p(t; Q, P) \quad (3.2.13)$$

que são os valores que definem as funções (3.2.8) e, portanto, a transformação canónica (3.2.5).

Suponhamos agora que o Jacobiano $\frac{\partial(q)}{\partial(P)}$, da aplicação (3.2.12), é não nulo:

$$\frac{\partial(q)}{\partial(P)} = \frac{\partial(q^1, \dots, q^n)}{\partial(P_1, \dots, P_n)} \neq 0 \quad (3.2.14)$$

Neste caso, podemos calcular (localmente) P , a partir das equações (3.2.12), como função de $(t; Q, q)$:

$$P = P(t; Q, q) \quad (3.2.15)$$

Substituindo então esta função P , assim obtida, em (3.2.9), obtemos $2n$ funções q, p das variáveis $(t; Q, q)$ e ainda τ , que notamos por:

$$\begin{aligned} q &= q(t; Q, q; \tau) \\ p &= p(t; Q, q; \tau) \end{aligned} \quad (3.2.16)$$

que representam o raio de luz $\rho(A_0, A_1)$ que passa nos pontos $A_0 = (t_0, Q) \in \mathcal{P}_0$ e $A_1 = (t, q) \in \mathcal{P}_1$.

Introduzamos agora estas funções no integral (??), para o comprimento óptico, para obter uma função $S = S(t; Q, q)$:

$$S(t; Q, q) = \int_{\rho(A_0, A_1)} pdq - H \quad (3.2.17)$$

que dá a distância óptica entre os pontos A_0 e A_1 .

A esta função dá-se o nome de **iconal** ou de **função característica pontual de Hamilton**. Trata-se exactamente da função distância geodésica, que foi tratada numa secção anterior. Como vimos nessa secção, a diferencial dS é dada por:

$$dS = pdq - PdQ - Hdt \quad (3.2.18)$$

onde os coeficientes P, p são as funções de $(t; Q, q)$, dadas por (3.2.15) e por (3.2.16) (fazendo $\tau = t$), respectivamente, e:

$$H = H(t, q, p) = H(t, q, p(t; Q, q)) \quad (3.2.19)$$

Sendo assim, deduzimos de (3.2.18) as seguintes **fórmulas fundamentais**:

$$P = -S_Q, \quad p = S_q, \quad H = -S_t \quad (3.2.20)$$

As duas primeiras equações são equivalentes às equações (3.2.12) e (3.2.13), e demonstram o facto mencionado no início desta secção de que as funções (3.2.12) e (3.2.13) (que definem a transformação canónica F), podem ser calculadas a partir de uma única - a função geradora $S(t; Q, q)$ - por derivação e eliminação. Quanto à última equação, ela representa uma PDE obtida introduzindo as derivadas parciais de S , dadas por (3.2.20), em H . Obtemos então a equação de Hamilton-Jacobi:

$$S_t + H\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0 \quad (3.2.21)$$

Interpretações das fórmulas fundamentais (3.2.20):

Int. A... Como acabámos de ver, para cada Q fixo, $S = S(t, q; Q)$ é uma solução da equação de Hamilton-Jacobi (3.2.21):

$$S_t + H(t, q, S_q) = 0$$

que depende dos n parâmetros $Q = (Q^1, \dots, Q^n)$.

As duas primeiras equações nas fórmulas fundamentais (3.2.20) têm agora a forma:

$$\begin{aligned} P &= -S_Q(t, q; Q) \\ p &= S_q(t, q; Q) \end{aligned} \quad (3.2.22)$$

De acordo com a interpretação óptica, acima discutida, estas fórmulas definem, para cada t fixo, uma transformação canônica $(Q, P) \mapsto (q, p)$, gerada pela iconal S , e que é obtida usando a primeira equação em (3.2.22), para exprimir q como função de Q e P :

$$P = -S_Q(q, Q) \quad \longrightarrow \quad q = q(Q, P)$$

e depois substituindo este valor de q na segunda equação em (3.2.22), para obter p como função de Q e P :

$$p = p(Q, P) = S_q(q, Q)|_{q=q(Q, P)}$$

(omitimos a dependência de t).

Int. B... Vamos agora dar uma segunda interpretação das fórmulas (3.2.22). Desta vez fixamos o plano objecto \mathcal{P}_0 , mas variamos o plano imagem $\mathcal{P}(t)$. Como vimos, as fórmulas (3.2.22) estabelecem uma correspondência entre os elementos ópticos (t_0, Q, P) do plano objecto e os elementos ópticos (t, q, p) do plano imagem $\mathcal{P}(t)$. Fixando Q e P , e variando t , obtemos um raio:

$$\rho(t) = \left(t, q(t, Q, P), p(t, Q, P) \right)$$

que satisfaz as equações canônicas:

$$\dot{q} = H_p(t, q, p), \quad \dot{p} = -H_q(t, q, p)$$

e que depende dos $2n$ parâmetros Q, P . Analiticamente, esta solução das equações canônicas obtem-se do seguinte modo - primeiro usamos a primeira equação (3.2.22):

$$-P = S_Q(t, q; Q)$$

para exprimir q como uma função de t e dos $2n$ parâmetros Q, P :

$$q = q(t, Q, P) \quad (3.2.23)$$

Em seguida inserimos esta função em:

$$p = S_q(t, q; Q)|_{q=q(t, Q, P)}$$

para obter p como uma função de t e também dos $2n$ parâmetros Q, P :

$$p = p(t, Q, P) \quad (3.2.24)$$

Então (3.2.23) e (3.2.24) são solução das equações canônicas, que depende dos $2n$ parâmetros Q, P . Esta é, essencialmente, a ideia base do método de Jacobi para integrar as equações canônicas, que vamos discutir na próxima secção.

3.3 Método de Jacobi para integrar as equações canônicas de Hamilton. Teorema de Jacobi

Como vimos na prova da proposição ??, uma solução $S(t, q)$ da equação de Hamilton-Jacobi determina uma família a n parâmetros de soluções das equações canônicas de Hamilton, obtida resolvendo o sistema (não autónomo) de n ODE's de primeira ordem (??):

$$\dot{q} = H_p(t, q, p(t, q)) \quad (3.3.1)$$

(uma solução para cada “parâmetro” $q \in \mathbb{R}^n$, como condição inicial para esse sistema de ODE's). Se $t \mapsto q(t)$ é uma solução do sistema (3.3.1), então a curva:

$$t \mapsto \left(q(t), p(t) = S_q(t, q(t)) \right)$$

é solução das equações canônicas, como se viu antes.

Portanto uma família a n parâmetros $Q = (Q^i)$, de soluções $S(t, q; Q)$ da equação de Hamilton-Jacobi, que dependa “essencialmente” dos n parâmetros $Q = (Q^1, \dots, Q^n) \in \mathbb{R}^n$, no sentido em que:

$$\det [S_{qQ}] = \det [S_{q^i Q^k}] \neq 0 \quad (3.3.2)$$

deve, em princípio, determinar toda a família a $2n$ parâmetros de soluções das equações de Hamilton.

Uma família a n parâmetros $S(t, q; Q)$ de soluções da equação de Hamilton-Jacobi, que satisfaça a condição (3.3.2), diz-se um **integral completo** da equação de Hamilton-Jacobi. O método de Jacobi para obter a solução geral $q(t, Q, P), p(t, Q, P)$ das equações canônicas:

$$\begin{cases} \dot{q} = H_p(t, q, p) \\ \dot{p} = -H_q(t, q, p) \end{cases} \quad (3.3.3)$$

que dependa dos $2n$ parâmetros $Q = (Q^1, \dots, Q^n), P = (P_1, \dots, P_n)$, a partir de uma solução completa $S(t, q, Q)$ da equação de Hamilton-Jacobi, consiste nos passos seguintes:

I ... Primeiro resolvem-se as n equações implícitas seguintes:

$$S_{Q^i}(t, q; Q) = -P_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.3.4)$$

em ordem a q , para obter uma solução do tipo:

$$q = q(t, Q, P) \quad (3.3.5)$$

II ... Em seguida complementamos esta função $q = q(t, Q, P)$, por uma outra função $p = p(t, Q, P)$, definida como habitualmente por:

$$p = p(t, Q, P) = S_q(t, q(t, Q, P), Q) \quad (3.3.6)$$

Antes de demonstrar porque é que este método funciona, vejamos um exemplo concreto:

► **Exemplo 3.2 (Oscilador harmónico)** ... Como já vimos, o oscilador harmónico é descrito pelo seguinte Hamiltoniano:

$$H(q, p) = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2) \quad (3.3.7)$$

As equações canônicas são:

$$\begin{cases} \dot{q} = H_p = \omega p \\ \dot{p} = -H_q = -\omega q \end{cases} \quad (3.3.8)$$

cuja solução geral é:

$$\begin{cases} q(t) = A \cos(\omega t + b) \\ p(t) = -A \sin(\omega t + b) \end{cases}, \quad A \text{ e } b \text{ constantes} \quad (3.3.9)$$

A equação de Hamilton-Jacobi para uma função $S(t, q)$, correspondente ao Hamiltoniano $H = \frac{\omega}{2}(q^2 + p^2)$ é:

$$S_t + \frac{\omega}{2}(q^2 + S_q^2) = 0 \quad (3.3.10)$$

Vamos tentar encontrar um integral completo $S(t, q; Q)$, pelo método de separação de variáveis, com o *ansatz* da forma:

$$S(t, q) = f(t) + \psi(q)$$

Com este S , (3.3.10) escreve-se na forma:

$$\dot{f}(t) + \frac{\omega}{2}(q^2 + \psi'(q)^2) = 0$$

o que implica que:

$$\dot{f}(t) = -\frac{\omega}{2}(q^2 + \psi'(q)^2) = \text{constante} = -Q$$

e portanto:

$$\dot{f}(t) = -Q, \quad \psi'(q) = \pm \sqrt{\frac{2Q}{\omega} - q^2}$$

Concluimos portanto que:

$$S(t, q; Q) = -Qt + \int_0^q \sqrt{\frac{2Q}{\omega} - \tau^2} d\tau \quad (3.3.11)$$

é uma solução da equação de Hamilton-Jacobi (3.1.23), que depende de um parâmetro Q . Não é necessário calcular este integral, já que o nosso objectivo é calcular:

$$S_Q(t, q; Q) = -P$$

o que é equivalente a:

$$-t + \frac{1}{\omega} \int_0^q \frac{d\tau}{\sqrt{\frac{2Q}{\omega} - \tau^2}} = -P$$

Pondo $\beta = -\omega P - \arccos A$, com $A = \sqrt{\frac{2Q}{\omega}}$, vem que:

$$-\arccos(q/A) = \omega t + \beta$$

donde se deduz a solução usual:

$$q(t) = A \cos(\omega t + \beta)$$

De:

$$p = S_q(t, q; Q) = \sqrt{A^2 - q^2}$$

deduzimos ainda que:

$$p(t) = \pm A \sin(\omega t + \beta)$$

e como $q(t), p(t)$ satisfazem as equações canônicas:

$$\dot{q} = H_p = \omega p, \quad \dot{p} = -H_q = -\omega q$$

obtemos:

$$p(t) = -A \sin(\omega t + \beta)$$

Por outro lado, por construção, temos que:

$$Q = -S_t = H(q, S_q)$$

e, para $q = q(t)$, vem que:

$$Q = H(q(t), p(t))$$

isto é, Q é o nível de energia da trajectória:

$$q(t) = A \cos(\omega t + \beta), \quad p(t) = -A \sin(\omega t + \beta)$$

Finalmente, (3.3.11) dá que:

$$S(t, q; Q) = \frac{A^2}{2} \arcsin \frac{q}{A} + \frac{1}{2} q \sqrt{A^2 - q^2} - Qt, \quad A = \sqrt{\frac{2Q}{\omega}}$$

■.

Antes de enunciar e demonstrar o Teorema de Jacobi, vejamos uma proposição prévia:

► **Proposição 3.2** ... *Seja $S = S(t, q; Q)$ uma solução da equação de Hamilton-Jacobi, que depende dos parâmetros $Q = (Q^i)$. Então cada derivada S_{Q^i} , é um integral primeiro das equações canônicas, isto é, S_{Q^i} mantém-se sempre constante, ao longo de cada extremal.*

- **Dem.:** Temos que mostrar que $\frac{d}{dt} S_{Q^i} = 0$, ao longo de cada extremal. Em primeiro lugar, temos que:

$$S_t(t, q; Q) + H(t, q, S_q(t, q; Q)) = 0$$

já que, por hipótese, $S = S(t, q; Q)$ é uma solução da equação de Hamilton-Jacobi.

Derivando esta relação em ordem a Q^i , vem que:

$$S_{Q^i t} + H_p S_{Q^i q} = 0 \tag{3.3.12}$$

Vem então que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} S_{Q^i}(t, q(t); Q) &= S_{tQ^i} + S_{qQ^i} \dot{q} \\ &= -H_p S_{Q^i q} + S_{qQ^i} \dot{q}, && \text{por (3.3.12)} \\ &= (\dot{q} - H_p) S_{Q^i q} \\ &= 0 \end{aligned}$$

porque, $\dot{q} = H_p$, ao longo de cada extremal.

■.

► **Teorema 3.1 (Teorema de Jacobi)** ... Seja $S(t, q; Q)$ uma solução completa da equação de Hamilton-Jacobi:

$$S_t + H(t, q, S_q) = \frac{\partial S}{\partial t} + H\left(t, q, \frac{\partial S}{\partial q}\right) = 0$$

e suponhamos que $q = q(t; Q, P)$ e $p = p(t; Q, P)$ são funções que satisfazem as equações seguintes:

$$\begin{aligned} S_Q(t, q(t; Q, P); Q) &= -P \\ p(t; Q, P) &= S_q(t, q(t; Q, P); Q) \end{aligned} \quad (3.3.13)$$

Então $t \mapsto (q(t; Q, P), p(t; Q, P))$ é uma solução das equações canônicas (3.3.3), que depende dos $2n$ parâmetros Q e P .

- **Dem.:** Derivando, para cada (Q, P) fixos, a primeira equação em (3.3.13), em ordem a t , obtemos:

$$\begin{aligned} 0 &= S_{tQ} + S_{qQ}\dot{q} \\ &= S_{qQ}(\dot{q} - H_p) \end{aligned} \quad (3.3.14)$$

onde na última igualdade usamos (3.3.12). Como estamos a supôr que $\det S_{qQ} \neq 0$, a igualdade (3.3.14) permite deduzir que:

$$\dot{q} = H_p$$

que é a primeira equação canônica. Para obter a segunda, derivamos a segunda equação em (3.3.13), em ordem a t :

$$\begin{aligned} \dot{p} &= S_{tq} + S_{qq}\dot{q} \\ &= S_{tq} + S_{qq}H_p \\ &= -H_q \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

onde na última igualdade usamos $S_{qt} + H_q + H_p S_{qq} = 0$, que se obtem, derivando em ordem a q , a equação de Hamilton-Jacobi. ■

3.4 Transformações canônicas. Discussão geométrica

► **Definição 3.1** ... Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) duas variedades simpléticas com a mesma dimensão. Uma aplicação diferenciável $\phi : M_1 \rightarrow M_2$, diz-se **canônica ou simplética**, se $\phi^*\omega_2 = \omega_1$. ■

► **Exercício 3.1** ... Seja Q uma variedade e $F \in \text{Diff}(Q)$ um difeomorfismo de Q . O **levantamento de F a T^*Q** , é a aplicação $T^*F : T^*Q \rightarrow T^*Q$, definida através do diagrama seguinte:

$$\begin{array}{ccc}
 T^*Q & \xrightarrow{T^*F} & T^*Q \\
 \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\
 Q & \xleftarrow{F} & Q
 \end{array}$$

isto é:

$$\boxed{T^*F : (q, \alpha) \mapsto T^*F((q, \alpha) : (X \mapsto T^*F(q, \alpha)(X) \stackrel{\text{def}}{=} \langle \alpha, dF_q(X) \rangle} \quad (3.4.1)$$

$\forall \alpha \in T^*_q Q$ e $\forall X \in T_{F^{-1}(q)} Q$.

Mostre que T^*F é uma transformação simpléctica e que $(T^*F)^*\theta = \theta$, onde θ é a forma de Liouville em T^*Q .

► **Exercício 3.2** ... Seja (Q, g) uma variedade riemanniana e $F : Q \rightarrow Q$ uma isometria. Provar que $TF : TQ \rightarrow TQ$ é simpléctica relativamente à forma simpléctica ω_g e que $(TF)^*\theta_g = \theta_g$.

■.

► **Exemplo 3.3 (Oscilador harmónico)** ...

O oscilador harmónico de massa m e frequência angular w , é descrito pelo seguinte Hamiltoniano:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}mw^2q^2 \quad (3.4.2)$$

As equações canónicas são:

$$\begin{cases} \dot{q} = H_p = \omega p/m \\ \dot{p} = -H_q = -m\omega q \end{cases} \quad (3.4.3)$$

A transformação $\phi : (Q, P) \mapsto (q, p)$, definida por:

$$\begin{aligned} q &= \sqrt{\frac{2P}{mw}} \sin Q \\ p &= \sqrt{2mwP} \cos Q \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

é canónica, já que:

$$\begin{aligned} \phi^*(dq \wedge dp) &= d\left(\sqrt{\frac{2P}{mw}} \sin Q\right) \wedge d\left(\sqrt{2mwP} \cos Q\right) \\ &= \dots \\ &= dQ \wedge dP \end{aligned}$$

Calculemos uma função geradora do tipo $S = S(q, Q)$. De (3.4.4) obtemos:

$$\begin{aligned} P &= \frac{1}{2}mwq^2 \csc^2 Q \\ p &= \sqrt{mwq} \cot Q \end{aligned} \quad (3.4.5)$$

donde se deduz que:

$$\begin{aligned} pdq - PdQ &= (mwq \cot Q) dq - \frac{1}{2}(mwq^2 \csc^2 Q) dQ \\ &= d\left(\frac{1}{2}mwq^2 \cot Q\right) \end{aligned} \quad (3.4.6)$$

isto é:

$$S(q, Q) = \frac{1}{2}mwq^2 \cot Q \quad (3.4.7)$$

Nas coordenadas (Q, P) o novo Hamiltoniano é:

$$K(Q, P) = H \circ \phi(Q, P) = wP$$

que não depende de Q . Por outras palavras, Q é uma **variável cíclica**. O sistema Hamiltoniano (3.4.3) escreve-se, nas novas coordenadas (Q, P) , na forma:

$$\begin{cases} \dot{Q} = K_P = w \\ \dot{P} = -K_Q = 0 \end{cases} \quad (3.4.8)$$

cuja solução geral é:

$$\begin{cases} Q(t) = wt + b \\ P(t) = a \end{cases}, \quad a, b \text{ constantes} \quad (3.4.9)$$

Regressando às coordenadas (q, p) , via ϕ , obtemos a solução:

$$\begin{cases} q(t) = \sqrt{\frac{2a}{mw}} \sin(wt + b) \\ p(t) = \sqrt{2mwa} \cos(wt + b) \end{cases} \quad (3.4.10)$$

As coordenadas $(\phi = Q, I = P)$ são exemplo de coordenadas acção-ângulo que serão tratadas mais tarde.

■.

Consideremos a variedade produto $M_1 \times M_2$ e as projecções naturais $\pi_1 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_1$ e $\pi_2 : M_1 \times M_2 \rightarrow M_2$. É fácil ver que a 2-forma Ω , definida em $M_1 \times M_2$, através de:

$$\Omega = \omega_1 - \omega_2 \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1^* \omega_1 - \pi_2^* \omega_2 \quad (3.4.11)$$

é uma forma simpléctica em $M_1 \times M_2$.

► **Proposição 3.3** ... *Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) duas variedades simplécticas com a mesma dimensão. Uma aplicação diferenciável $\phi : M_1 \rightarrow M_2$, é canónica ou simpléctica, sse o seu gráfico, $\Gamma_\phi \subset M_1 \times M_2$:*

$$\Gamma_\phi = \{(x, \phi(x)) \in M_1 \times M_2, \quad x \in M_1\}$$

é uma Lagrangeana em $(M_1 \times M_2, \Omega)$.

- **Dem.:** A aplicação $x \mapsto (x, \phi(x))$ é um difeomorfismo de M_1 sobre Γ_ϕ , e portanto:

$$T_{(x, \phi(x))}\Gamma_\phi = \{(v, d\phi(v)) : v \in T_x M_1\}$$

Daí que:

$$\Omega((v, d\phi(v)), (w, d\phi(w))) = \omega_1(v, w) - \omega_2(d\phi(v), d\phi(w)) = (\omega_1 - \phi^*\omega_2)(v, w)$$

donde se deduz que $\Omega|_{\Gamma_\phi} = 0$ sse $\phi^*\omega_2 = \omega_1$ sse ϕ é canônica. ■

Suponhamos que $\Omega = -d\Theta$ (localmente). Por exemplo, $\Theta = \theta_1 - \theta_2 \stackrel{\text{def}}{=} \pi_1^*\theta_1 - \pi_2^*\theta_2$, onde $-d\theta_i = \omega_i$, $i = 1, 2$. Então, ϕ é canônica sse:

$$0 = \iota_\phi^*\Omega = \iota_\phi^*d\Theta = d\iota_\phi^*\Theta \quad (3.4.12)$$

onde $\iota_\phi : \Gamma_\phi \hookrightarrow M_1 \times M_2$ é a inclusão natural. Isto é, ϕ é canônica sse $\iota_\phi^*\Theta$ é fechada. Pelo lema de Poincaré:

$$\iota_\phi^*\Theta = -dS \quad (3.4.13)$$

para uma certa função (local):

$$S : \Gamma_\phi \longrightarrow \mathbb{R}$$

a que chamamos uma **função geradora função característica** de ϕ .

Suponhamos por exemplo, que $M_1 = T^*Q_1$, $M_2 = T^*Q_2$ e que $(Q, P) = (Q^i, P_i)$, $(q, p) = (q^i, p_i)$ são coordenadas canônicas em T^*Q_1 e T^*Q_2 , respectivamente.

Se:

$$\phi(Q, P) = (q = q(Q, P), p = p(Q, P)) \quad (3.4.14)$$

então ϕ é canônica sse:

$$\phi(dq \wedge dp) = dQ \wedge dP$$

O gráfico de ϕ , Γ_ϕ , pode ser parametrizado de muitas formas. Pode por exemplo ser parametrizado pelas variáveis (Q, q) , pelas variáveis (P, q) , ou ainda pelas variáveis (P, p) , por exemplo. Assim, a função S , geradora de ϕ , pode ser descrita como uma função $S = S(Q, q)$ (**característica pontual**), como uma função $S = S(P, q)$ (**característica mista**), ou ainda como uma função $S = S(P, p)$ (**característica angular**).

Se, por exemplo, considerámos os potenciais simpléticos:

$$\theta_1 = PdQ, \quad e \quad \theta_2 = pdq$$

em T^*Q_1 e T^*Q_2 , respectivamente, e se considerámos a característica pontual $S = S(Q, q)$ (o que significa que estamos a parametrizar Γ_ϕ pelas variáveis (Q, q)), então a relação (3.4.13), $\iota_\phi^*\Theta = -dS$, escreve-se na forma:

$$\begin{aligned} -dS &= S_Q dQ + S_q dq \\ &= \iota_\phi^*\Theta \\ &= \iota_\phi^*(\theta_1 - \theta_2) \\ &= \iota_\phi^*(PdQ - pdq) \\ &= P(Q, q)dQ - p(Q, q)dq \end{aligned} \quad (3.4.15)$$

isto é:

$$P(Q, q) = S_Q = \frac{\partial S}{\partial Q}(Q, q), \quad \text{e} \quad p(Q, q) = S_q = -\frac{\partial S}{\partial q}(Q, q) \quad (3.4.16)$$

Nestas equações estamos a supôr que nas funções $q = q(Q, P)$, que surgem na definição (3.4.14) de ϕ , o Jacobiano $\frac{\partial q}{\partial P} \neq 0$, o que permite (localmente) definir P como funcao de (Q, q) : $P = P(Q, q)$. Esta última será então substituída em $p = p(Q, P)$ (que surge também na definição (3.4.14) de ϕ) para obter p também como funcao de (Q, q) : $p = p(Q, q) = p(Q, P(Q, q))$.

Suponhamos agora que as funções $p = p(Q, P)$, que surgem na definição (3.4.14) de ϕ , são tais que o Jacobiano $\frac{\partial p}{\partial P} \neq 0$. Agora podemos (localmente) definir P como funcao de (Q, p) : $P = P(Q, p)$. Esta última será então substituída em $q = q(Q, P)$ (que surge também na definição (3.4.14) de ϕ) para obter q também como funcao de (Q, p) : $q = q(Q, p) = q(Q, P(Q, p))$.

Agora o gráfico Γ_ϕ pode ser parametrizado pelas variáveis mistas (Q, p) , e a função geradora de ϕ , é então descrita como uma função $W = W(Q, p)$ (característica mista). Como potencial simpléctico tomámos desta vez:

$$\Theta = PdQ - pdq + d(qp) = PdQ + qdp$$

e a relação (3.4.13), $\iota_\phi^* \Theta = -dW$, escreve-se na forma:

$$P(Q, p) = -\frac{\partial W}{\partial Q}(Q, p), \quad \text{e} \quad q(Q, p) = -\frac{\partial W}{\partial p}(Q, p) \quad (3.4.17)$$

Um raciocínio análogo permite calcular a característica angular $T = T(P, p)$.

■

As transformações canônicas preservam a estrutura das equações de Hamilton. Mais precisamente, se $(Q, P) = (Q^i, P_i)$ são coordenadas canônicas em M , e se $\phi(Q, P) = (q(Q, P), p(Q, P)) = (q^i(Q, P), p_i(Q, P))$, então (q^i, p_i) são também coordenadas canônicas ¹ em M . Se:

$$K(Q^i, P_i) = H(q, p) = H(q(Q, P), p(Q, P)) \quad (3.4.18)$$

isto é, $K = H \circ \phi$, então $t \mapsto (Q(t), P(t))$ é uma solução das equações canônicas:

$$\begin{cases} \dot{Q} &= & K_P \\ \dot{P} &= & -K_Q \end{cases}$$

se e só se $t \mapsto (q(t), p(t)) = \phi(Q(t), P(t))$ é solução das equações canônicas:

$$\begin{cases} \dot{q} &= & H_p \\ \dot{p} &= & -H_q \end{cases}$$

Este facto tem uma importância crucial na integração das equações canônicas. Com efeito, se conseguirmos encontrar uma transformação canónica $\phi : (Q^i, P_i) \mapsto (q^i, p_i)$ tal que o novo Hamiltoniano $K = H \circ \phi$ tenha uma forma particularmente simples que permita integrar as correspondentes equações canônicas, então podemos calcular as soluções do sistema inicialmente dado. Esta é aliás, grosso modo, a base do método de Jacobi para integrar as equações canônicas.

¹estámos a interpretar ϕ do ponto de vista passivo, i.e., como uma mudança das coordenadas (Q^i, P_i) para as coordenadas (q^i, p_i) .

Em particular, se conseguirmos encontrar uma transformação canônica tal que o novo Hamiltoniano $K = H \circ \phi$ dependa apenas dos Q^i , $K = K(Q^i)$, então as correspondentes equações canônicas são:

$$\begin{cases} \dot{Q}^i &= 0 \\ \dot{P}_i &= -K_{Q^i} \end{cases}$$

que se integram fãcilmente:

$$Q^i(t) \equiv Q^i(0), \quad P_i(t) = P_i(0) - \int^t \frac{\partial K}{\partial Q^i}(Q^i(0)) dt \quad (3.4.19)$$

Suponhamos então que se pretende calcular uma aplicação canônica

$$\phi(Q, P) = (q = q(Q, P), p = p(Q, P)) \quad (3.4.20)$$

com função geradora (pontual) $S = S(Q, q)$, que reduza o Hamiltoniano $H = H(q, p)$ à forma $K = K(Q)$.

Então por (3.4.16), virá que:

$$P(Q, q) = \frac{\partial S}{\partial Q}(Q, q), \quad \text{e} \quad p(Q, q) = -\frac{\partial S}{\partial q}(Q, q)$$

e substituindo em (3.4.18), obtemos a condição:

$$K(Q) = H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}(Q, q)\right) \quad (3.4.21)$$

3.5 Discussão geométrica da equação de Hamilton-Jacobi reduzida

Seja θ a 1-forma canônica de Liouville em T^*Q , dada, em coordenadas canônicas $(q, p) = (q^i, p_i)$, por:

$$\theta = pdq = \sum_{i=1}^n p_i dq^i \quad (3.5.1)$$

e $\omega = -d\theta$ a forma simpléctica associada. Localmente $\omega = dq \wedge dp = \sum_i dq^i \wedge dp_i$. Recordemos que θ se define por:

$$\theta_{(q,p)}(\xi) = \langle p, d\pi(\xi) \rangle, \quad p \in T_q^*Q, \quad \xi \in T_{(q,p)}T^*Q \quad (3.5.2)$$

e que, além disso, θ satisfaz a propriedade tautológica seguinte: “se $\alpha \in \Omega^1 Q$ é uma 1-forma em Q , interpretada como uma secção $\alpha : Q \rightarrow T^*Q$, do fibrado $\pi : T^*Q \rightarrow Q$, então:

$$\alpha^*\theta = \alpha \quad (3.5.3)$$

► **Definição 3.2** ... (i). Uma subvariedade imersa $\varphi : \Lambda \subseteq \mathbb{R}_\alpha^k \hookrightarrow T^*Q$, de dimensão $k \leq n$, diz-se uma **variedade isotrópica** se $\varphi^*\omega = 0$.

(ii). Uma subvariedade imersa $\varphi : \Lambda \subseteq \mathbb{R}_\alpha^n \hookrightarrow T^*Q$, de dimensão n , diz-se uma **variedade de Lagrange** ou uma **Lagrangeana** se $\varphi^*\omega = 0$.

(iii). Uma subvariedade imersa $\varphi : \Lambda \subseteq \mathbb{R}_\alpha^n \hookrightarrow T^*Q$, de dimensão n , diz-se uma **variedade Lagrangeana cônica** se $\varphi^*\theta = 0$, onde θ é a 1-forma canônica de Liouville em T^*Q .

■.

É claro que toda a Lagrangeana cônica é uma Lagrangeana. Uma Lagrangeana é uma variedade isotrópica de dimensão maximal (igual a n). Vejamos agora alguns exemplos.

► **Exemplos 3.1 ...**

1. $\Lambda_{q_0} = T_q^*Q$, onde $q_0 \in Q$ é um ponto fixo, é uma Lagrangeana cônica.
2. Seja $\Gamma \subset Q$ uma subvariedade de dimensão $d \leq n - 1$, e Λ_Γ o chamado **fibrado conormal** a Γ , definido por:

$$\Lambda_\Gamma = \left\{ (q, p) : q \in \Gamma, \quad p \in T_q^*Q, \quad \text{tal que} \quad \langle p, T_q\Gamma \rangle = p|_{T_q\Gamma} = 0 \right\} \quad (3.5.4)$$

O exemplo 1. é o caso especial em que Γ se reduz ao ponto q_0 . Λ_Γ é uma Lagrangeana cônica.

3. Seja $\Gamma \subset Q$ uma subvariedade de codimensão 1, e $f : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ uma função dada, com diferencial $df_q \in T_q^*\Gamma$, para cada ponto $q \in \Gamma$. Define-se então:

$$\Lambda_{\Gamma, f} = \left\{ (q, p) : q \in \Gamma, \quad p \in T_q^*Q, \quad \text{tal que} \quad \langle p, T_q\Gamma \rangle = p|_{T_q\Gamma} = df_q \right\} \quad (3.5.5)$$

O exemplo 3. é o caso especial em que Γ tem codimensão 1 e $f \equiv 0$. $\Lambda_{\Gamma, f}$ é uma Lagrangeana que não é cônica (a não ser que f seja constante).

■.

O exemplo seguinte tem importância crucial para o que se segue.

► **Proposição 3.4 ...** *Consideremos o gráfico de uma 1-forma $\alpha \in \Omega^1(Q)$:*

$$\Lambda_\alpha = \{ (q, p) \in T^*Q : \quad p = \alpha(q), \quad q \in Q \} \quad (3.5.6)$$

Λ_α é uma subvariedade Lagrangeana em T^*Q se e só se α é fechada: $d\alpha = 0$.

- **Dem.:** De facto, pela propriedade tautológica, $\alpha^*\theta = \alpha$, e portanto $d\alpha = d\alpha^*\theta = \alpha^*d\theta = \alpha^*\omega$ e, portanto, $d\alpha = 0$ sse $\alpha^*\omega = 0$.

■.

Quando Λ_α é uma subvariedade Lagrangiana em T^*Q , α é fechada e portanto localmente exacta, isto é, numa vizinhança U , de cada ponto de Q , podemos encontrar uma função $S : U \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\alpha = dS$. Diz-se então que $S : U \subseteq Q \rightarrow \mathbb{R}$ é uma **função geradora** ou uma **iconal** (local) para Λ_α . Pômos então, neste caso, $\Lambda_\alpha = \Lambda_{dS}$, em U . Em coordenadas:

$$\alpha = dS = S_x dx = \frac{\partial S}{\partial x^i} dx^i \quad (3.5.7)$$

e:

$$\Lambda_\alpha = \Lambda_{dS} = \left\{ (\mathbf{q}, p) : p = S_q(q) = \left(\frac{\partial S}{\partial q^i}(q) \right)_{i=1, \dots, n} \right\} \quad (3.5.8)$$

Qualquer Lagrangeana $\Lambda \subset T^*Q$, que (localmente) se projecte difeomòrficamente sobre o espaço de configuração Q , é da forma $\Lambda = \Lambda_\alpha = \Lambda_{dS}$, para alguma iconal (local) S .

Por outro lado, dada uma Lagrangeana $\Lambda \subset T^*Q$, como a forma $\theta = pdq$ é fechada em Λ , o **integral de acção reduzida**:

$$\int_{P_0}^P \theta \quad (3.5.9)$$

definido para todas as curvas contidas em Λ , que partem de um ponto fixo $P_0 \in \Lambda$, define uma função localmente unívoca:

$$\begin{aligned} W : \Lambda &\longrightarrow \mathbb{R} \\ P &\longmapsto W(P) = \int_{P_0}^P \theta \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

a que chamámos uma **fase local** em Λ . O integral de linha é calculado ao longo de uma qualquer curva em Λ , que una P_0 a P . Se Λ (localmente) se projecta difeomòrficamente sobre o espaço de configuração Q , então, como vimos, será da forma $\Lambda = \Lambda_\alpha = \Lambda_{dS}$, e $S = W \circ \alpha$ é uma iconal (local) para Λ .

Figure 3.3:

É claro que as transformações canónicas transformam Lagrangeanas em Lagrangeanas. Por exemplo, a transformação $(\mathbf{x}, \mathbf{p}) \mapsto (\mathbf{p}, -\mathbf{x})$ permuta $\Lambda_{\mathbf{x}_0}$ com $\Lambda_{\mathbf{p}_0}$.

Suponhamos agora dado um Hamiltoniano $H \in C^\infty(T^*Q)$. Como sabemos, existe conservação de energia - uma curva integral $(q(t), p(t))$ do campo Hamiltoniano X_H , isto é, uma solução das equações canónicas:

$$\begin{cases} \dot{q} = H_p \\ \dot{p} = -H_q \end{cases} \quad (3.5.11)$$

está sempre contida num mesmo nível de energia:

$$\Sigma_h \stackrel{\text{def}}{=} \{(q, p) \in T^*Q : H(q, p) \equiv h\}, \quad h \text{ constante} \quad (3.5.12)$$

Nestas condições, temos então a seguinte proposição:

► **Proposição 3.5** ... (i). O campo Hamiltoniano $X_H = H_p \frac{\partial}{\partial q} - H_q \frac{\partial}{\partial p}$ é tangente à hipersuperfície de nível Σ_h .

(ii).

$$\omega(X_H, \xi) = 0, \quad \forall \xi \in T\Sigma_h \tag{3.5.13}$$

(iii). Seja Λ uma Lagrangeana em T^*Q , contida na hipersuperfície de nível Σ_h . Então o campo Hamiltoniano X_H é tangente a Λ e, em particular, Λ contém toda a curva integral de X_H , sempre que esta intersecta Λ em algum ponto.

• **Dem.:** Para mostrar (i)., temos que provar que $dH(X_H) = 0$. Mas, por definição, $i_{X_H}\omega = dH$. Portanto $0 = \omega(X_H, X_H) = (i_{X_H}\omega)(X_H) = dH(X_H)$.

Por outro lado, $dH(\xi) = 0, \forall \xi \in T\Sigma_h$, uma vez que H é constante em Σ_h . Logo $0 = dH(\xi) = i_{X_H}\omega(\xi) = \omega(X_H, \xi)$, o que mostra (ii).

Mostremos agora (iii). Seja $P \in \Lambda \subset \Sigma_h$, e seja $\{\xi_1, \dots, \xi_n\}$ uma base para o espaço tangente $T_P\Lambda \subset T_P\Sigma_h$. Por (ii)., sabemos que $\omega(X_H, \xi_i) = 0, i = 1, \dots, n$. Mas, como $T_P\Lambda$ é maximalmente isotrópico (a dimensão máxima de um subespaço onde ω se anula é n), isto implica que $X_H = \sum \lambda^i \xi_i$, o que significa que o campo Hamiltoniano X_H é tangente a Λ . ■

Consideremos agora uma variedade isotrópica Λ_0 , de dimensão $n - 1$, contida na hipersuperfície de nível Σ_h . Por cada ponto $P_0 = (q_0, p_0) \in \Lambda_0$, façamos passar uma curva integral $(q(t), p(t))$ do campo Hamiltoniano X_H , com condição inicial $(q_0, p_0) \in \Lambda_0$. Suponhamos que a variedade Λ , que assim se obtém, tem dimensão n (o que acontece, se X_H fôr transversal a Λ_0 e se t fôr suficientemente pequeno).

Figure 3.4:

Então Λ será uma Lagrangeana, de dimensão n , contida na hipersuperfície de nível Σ_h . Se Λ se define localmente por uma equação do tipo:

$$p = \alpha(q) = S_q(q) = \left(\frac{\partial S}{\partial q^i}(q) \right)_{i=1, \dots, n} \tag{3.5.14}$$

isto é, se Λ fôr localmente da forma $\Lambda = \Lambda_{dS}$, então S satisfaz a **equação reduzida de Hamilton-Jacobi**:

$$H(q, S_q) = h \tag{3.5.15}$$

Suponhamos agora que o Hamiltoniano é homogéneo positivo de grau 1 nas variáveis p :

$$H(q, \lambda p) = \lambda H(q, p), \quad \forall \lambda > 0 \quad (3.5.16)$$

Como exemplos típicos temos:

- o Hamiltoniano óptico $H(q, p) = \|p\|/n(q)$, que rege a propagação dos raios num meio isotrópico com índice de refração $n(q)$.
- As geodésicas de uma métrica Riemanniana podem ser deduzidas do Lagrangeano $L = g_{ij}(q)\dot{q}^i\dot{q}^j$ ao qual corresponde o Hamiltoniano $H = g^{ij}p_i p_j$. No entanto, podemos também usar o Hamiltoniano $\sqrt{H} = \sqrt{g^{ij}p_i p_j}$. Para um nível de energia $H = h$ constante, as equações de Hamilton são proporcionais com um factor de proporcionalidade constante. De facto, se $H = h$ constante, então em Σ_h :

$$X_H = 2\sqrt{h} X_{\sqrt{H}} \quad (3.5.17)$$

► **Proposição 3.6** ... O fluxo Φ_t , de um campo Hamiltoniano X_H , associado a uma Hamiltoniano H , homogéneo positivo de grau 1 nas variáveis p , preserva a 1-forma canónica de Liouville $\theta = pdq$.

- **Dem.:** É suficiente provar que a derivada de Lie $L_{X_H}\theta = 0$. Como $X_H = H_p\partial_q - H_q\partial_p$, vem que:

$$\begin{aligned} L_{X_H}\theta &= L_{X_H}(pdq) \\ &= (i_{X_H}d + di_{X_H})(pdq) \\ &= i_{X_H}(dp \wedge dq) + d(pdq(X_H)) \\ &= dp(X_H)dq - dq(X_H)dp + d(pH_p) \\ &= -H_qdq - H_pdp + H_pdp + pdH_p \\ &= -H_qdq - pdH_p \\ &= 0 \end{aligned} \quad (3.5.18)$$

A última igualdade deve-se à identidade de Euler $pH_p - H = 0$, que é válida atendendo à homogeneidade de H . Dessa identidade obtem-se:

$$\begin{aligned} 0 &= d(pH_p) - dH = H_pdp + pd(H_p) - dH \\ &= H_pdp + pd(H_p) - H_qdq - H_pdp = pd(H_p) - H_qdq \end{aligned}$$

que é (3.5.18). ■

Desta proposição concluímos que o fluxo Φ_t , de um Hamiltoniano homogéneo positivo de grau 1, nas Variáveis p , preserva a classe das Lagrangeanas cónicas (aquelas onde a forma $\theta = pdx$ se anula idênticamente).

Como já vimos, dado um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^n_x$, a Lagrangeana:

$$\Lambda_{x_0} = \{x_0\} \times T_{x_0}^*\mathbb{R}^n = \{(x_0, p) : p \in \mathbb{R}^n\}$$

é cónica - é a fibra de $T^*\mathbb{R}^n$ por cima de x_0 . Dado um Hamiltoniano homogéneo H , podemos construir um feixe central de trajectórias de centro x_0 , projectando no espaço de configuração \mathbb{R}_x^n , as curvas integrais de X_H , com condição inicial (x_0, p_0) , onde p_0 varia numa variedade inicial dada $V_0 \subset \Lambda_{x_0}$, de dimensão $n - 1$, tal que:

$$V_0 \subset \Lambda_{x_0} \cap \Sigma_h \tag{3.5.19}$$

Para $t > 0$ teremos uma certa variedade V_t , em $T^*\mathbb{R}^n$, também de dimensão $n - 1$, cuja projecção no espaço de configuração \mathbb{R}_x^n é a chamada **frente de onda**, no instante t , correspondente ao feixe central de trajectórias de centro x_0 .

Vspace5.0cm

Figure 3.5:

Consideremos agora uma Lagrangeana cónica qualquer Λ , em $T^*\mathbb{R}^n$, (portanto $\dim \Lambda = n$, e $pdx|_\Lambda = 0$).

A respectiva projecção, no espaço de configuração \mathbb{R}_x^n , tem dimensão $\leq (n - 1)$. De facto, se $\xi = \mathbf{a}\partial_x + \mathbf{b}\partial_p$ é um Vector tangente a Λ , num dos seus pontos $(x, p) \in \Lambda$, então $d\pi(\xi) = \mathbf{a}\partial_x$ onde a x -componente \mathbf{a} , tem que satisfazer a equação linear:

$$0 = (pdx)(\bar{\xi}) = (pdx)(\mathbf{a}\partial_x + \mathbf{b}\partial_p) = \mathbf{a}p$$

Portanto, o espaço tangente à projecção $\pi(\Lambda)$, tem uma dimensão $\leq (n - 1)$. Em particular, Λ não pode ser definida como gráfico de uma 1-forma (mesmo localmente), o que impede de gerar Λ por uma iconal (local), contrariamente ao que eventualmente acontece com variedades não cónicas.

Por isso, de forma análoga ao caso anterior, em que $\Lambda = \Lambda_{x_0}$, consideramos uma variedade inicial V_0 , de dimensão $n - 1$, contida em Λ , e definida por $H \equiv h$ (constante):

$$V_0 \subset \Lambda \cap \Sigma_h$$

Dado um Hamiltoniano homogéneo H , construímos então o tubo de trajectórias de X_H , com base em V_0 . Por outras palavras, varremos V_0 pelo fluxo de X_H . Desta forma obtemos uma Lagrangeana $\tilde{\Lambda}$, contida na hipersuperfície de nível $H \equiv h$ (constante):

$$\tilde{\Lambda} = \cup_t \Phi_t(V_0) \tag{3.5.20}$$

Sob certas condições, pode acontecer que $\tilde{\Lambda}$ seja já gerada (localmente) por uma certa iconal S , de tal forma que $p = S_x(x)$, onde S verifica a equação reduzida de Hamilton-Jacobi:

$$H(x, S_x) \equiv h \tag{3.5.21}$$

Como Λ é cónica, a forma $\theta = pdx$ anula-se em $V_0 \subset \Lambda$. Portanto ela também se anula em cada superfície $V_t = \Phi_t(V_0)$, já que, como vimos, o fluxo Φ_t preserva a forma θ . Mas isto implica que a fase local:

$$W(P) = \int_{P_0}^P pdx$$

definida em $\tilde{\Lambda}$, é constante em cada $V_t = \Phi_t(V_0)$, $\forall t$. Vemos pois que as superfícies de nível $S(x) \equiv \text{constante}$, onde $S = W \circ \alpha$, confundem-se exactamente com as projecções das superfícies V_t sobre o espaço de configuração \mathbb{R}_x^n , isto é, com as frentes de onda.