
cker4.1.478

FCUP
Dep. Matemática Pura

Geometria Regrada e
Aplicações.

Tese de Mestrado

Mestrado em Matemática - Fundamentos e Aplicações

Ano lectivo de 2000/01

Belmira Mota

ÍNDICE

1	Introdução	3
2	Elementos de Geometria Analítica Projectiva	4
2.1	Espaços projectivos	4
2.2	Coordenadas homogéneas. Referenciais projectivos	6
2.3	Espaços Afins. Referenciais Afins. O Grupo Afim	7
2.4	Fecho Projectivo de um espaço afim	12
2.5	Coordenadas afins e coordenadas homogéneas	13
2.6	Complementar de um Hiperplano num espaço projectivo	18
2.7	Homografias. O grupo projectivo	19
2.8	Dualidade Projectiva	22
2.9	Polaridade	27
2.10	Geração das quádricas em \mathbb{P}^3 . O Regulus	29
2.11	Correlações Involutivas	35
2.12	Correlação nula relativamente a uma cúbica não plana	38
3	Geometria regradada (ou de linhas) no espaço	47
3.1	Coordenadas de Pluecker axiais e radiais	47
3.2	Quádrlica de Klein. Mergulho de Pluecker-Klein	48
3.3	Complexos lineares de linhas em \mathbb{P}^3	52
3.4	Variedades lineares de linhas em \mathbb{P}^3	55
3.5	Rectas conjugadas	58
3.5.1	Propriedades lineares	58
3.5.2	Propriedades quadráticas	66
3.5.3	Propriedades métricas	70
3.6	Complexo Tetraédrico	72
3.6.1	Definição	72
3.6.2	Equação do Complexo Tetraédrico	73
3.6.3	Modos de Geração de um Complexo Tetraédrico	74
4	Aplicações	77
4.1	Complexo de rectas nulas \mathcal{N}_T	77
4.1.1	Equação do complexo \mathcal{N}_T	78

4.1.2	Equação do plano polar	79
4.1.3	Complexo de normais às trajectórias dos pontos de um espaço móvel, num dado instante t	79
4.1.4	Equação reduzida do complexo	81
4.2	Triangulação de uma trajectória sobre uma linha recta	82
4.2.1	Interpretação Geométrica	83
4.3	Referência a outras aplicações	85
4.4	Apêndice. Vectores deslizantes. Momentos. Torsores	85
5	Congruências Lineares. Feixes de Complexos Lineares	102
5.1	Geração das congruências lineares	102
5.2	Congruências Lineares	103
5.3	Superfícies Regradas	104
6	Bibliografia	107

Capítulo 1

Introdução

A Geometria Regrada (ou de linhas), está relacionada com o estudo de conjuntos de rectas no espaço tridimensional. Esta geometria surgiu em meados do século XIX, essencialmente com as investigações de três matemáticos: Sophus Lie (que estabeleceu uma correspondência entre a geometria regrada e a geometria projectiva), Julius Plucker e Felix Klein. Distinguiu-se de todas as geometrias, conhecidas até então, pelo facto de o seu estudo ter por elementos-base as rectas, ao contrário dos usuais pontos, pelo que se tornou indispensável a introdução da noção de coordenadas de uma recta, que ficaram conhecidas como coordenadas de Plucker, em homenagem a Julius Plucker. Apesar de ter surgido há mais de um século, a geometria regrada surge naturalmente e permite a solução mais elegante e eficiente, quando estudamos problemas geométricos da Matemática Aplicada, em Computação e Visualização. Deste modo, antes de apresentar a teoria da Geometria Regrada, serão apresentados alguns conceitos básicos da Geometria Projectiva, tais como espaço projectivo, coordenadas homogéneas ou geração de uma quádrlica no espaço projectivo de dimensão três, que serão necessários à compreensão das secções apresentadas no capítulo seguinte, nomeadamente as coordenadas dos elementos-base da Geometria de Linhas, as linhas do espaço tridimensional (coordenadas de Plucker) bem como as propriedades de conjuntos de linhas, que Plucker denominou por complexos de linhas e, cujas coordenadas satisfazem duas condições algébricas: a equação de uma (hiper)quádrlica, chamada Quádrlica de Klein, e uma equação homogénea de grau n . Estes complexos são classificados conforme o grau desta última equação e, obviamente, os mais simples são os de grau 1, ou complexos lineares. De entre os complexos do segundo grau, iremos estudar com mais detalhe um complexo especial que se denomina por complexo tetraédrico, que é constituído pela totalidade das rectas (do espaço tridimensional) cuja razão anarmónica dos seus quatro pontos de intersecção com o tetraedro de referência é constante e diferente de um, zero e infinito. Em seguida, serão apresentadas algumas das aplicações desta teoria à cinemática, estática e a alguns problemas práticos, de modo a podermos ter a percepção das imensas aplicações desta geometria às outras ciências. Por último, iremos estudar feixes de complexos, assim como as linhas comuns a dois complexos lineares que, como iremos ver, formam uma congruência linear.

Capítulo 2

Elementos de Geometria Analítica Projectiva

2.1 Espaços projectivos

Espaços projectivos ... Seja \mathbf{V} um espaço vectorial sobre um corpo comutativo \mathbb{k} ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}). O **espaço projectivo associado ao espaço vectorial \mathbf{V}** é, por definição, o conjunto $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, constituído por todas as rectas vectoriais de \mathbf{V} :

$$\mathbb{P}(\mathbf{V}) \stackrel{\text{def}}{=} \{ \ell : \ell \text{ é subespaço de dimensão 1 em } \mathbf{V} \} \quad (2.1.1)$$

De forma equivalente:

$$\mathbb{P}(\mathbf{V}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{V} - \{\mathbf{0}\} / \sim \quad (2.1.2)$$

onde \sim é a relação de equivalência em $\mathbf{V} - \{\mathbf{0}\}$ seguinte: $\mathbf{v} \sim \mathbf{w}$ se e só se $\mathbf{w} = \lambda \mathbf{v}$ para algum $\lambda \in \mathbb{k} - \{0\}$. Temos então uma aplicação natural sobrejectiva:

$$\begin{aligned} \pi : \mathbf{V} - \{\mathbf{0}\} &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}) \\ \mathbf{v} &\longmapsto \pi(\mathbf{v}) = [\mathbf{v}] \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

onde $[\mathbf{v}] = \mathbb{k}\mathbf{v}$ representa o subespaço gerado pelo vector $\mathbf{v} \in \mathbf{V} - \{\mathbf{0}\}$. Se \mathbf{V} tem dimensão finita $n = \dim_{\mathbb{k}} \mathbf{V} \geq 0$, então a dimensão de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ é, por definição:

$$\dim_{\mathbb{k}} \mathbb{P}(\mathbf{V}) \stackrel{\text{def}}{=} n - 1 \geq -1$$

Se $\mathbf{V} = \{\mathbf{0}\}$, então $\dim \mathbf{V} = 0$ e $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = -1$ sse $\mathbb{P}(\mathbf{V}) = \emptyset$. Para cada $n \geq 0$, põe-se $\mathbb{R}\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{R}^{n+1})$, que se diz o espaço projectivo real standard de dimensão n . De forma análoga, $\mathbb{C}\mathbb{P}^n = \mathbb{P}(\mathbb{C}^{n+1})$ é o espaço projectivo complexo standard de dimensão n . Como $\mathbb{R}^{n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ temos uma inclusão natural $\mathbb{R}\mathbb{P}^n \hookrightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$.

Um espaço projectivo de dimensão 0 diz-se um ponto, um espaço projectivo de dimensão 1 diz-se uma recta (projectiva), um de dimensão 2 um plano (projectivo), etc...

Variedades lineares projectivas ... Um subconjunto $\mathcal{L} \subseteq \mathbb{P}(\mathbf{V})$ diz-se uma **variedade linear (projectiva)** ou um **subespaço projectivo** de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ se:

$$\widehat{\mathcal{L}} \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{0}\} \cup \pi^{-1}(\mathcal{L}) \subseteq \mathbf{V} \quad (2.1.4)$$

fôr um subespaço vectorial de \mathbf{V} . Neste caso temos então que $\pi(\widehat{\mathcal{L}} - \{\mathbf{0}\}) = \mathcal{L}$. É fácil ver que:

- a intersecção de uma família qualquer $\{\mathcal{L}_i\}_{i \in I}$, de variedades lineares de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ é ainda uma variedade linear de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. De facto:

$$\bigcap_{i \in I} \mathcal{L}_i = \mathbb{P} \left(\bigcap_{i \in I} \widehat{\mathcal{L}}_i \right)$$

- Se $A \subset \mathbb{P}(\mathbf{V})$ é um subconjunto qualquer em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, existe uma variedade linear mínima (para a inclusão) que contem A . Esta variedade nota-se por $\mathcal{V}_{\mathbb{P}}(A)$ e diz-se a **variedade** (linear projectiva) **gerada por A** . É dada por:

$$\mathcal{V}_{\mathbb{P}}(A) = \mathbb{P}(\text{subespaço gerado por } \pi^{-1}(A))$$

Usaremos também a notação $\mathcal{L} \vee \mathcal{M}$ para a variedade linear gerada pelas variedades \mathcal{L} e \mathcal{M} . Por exemplo $P \vee Q$ representa a recta que une os dois pontos $P, Q \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$.

Como sabemos, se \mathbf{S} e \mathbf{T} são dois subespaços vectoriais de um espaço vectorial \mathbf{V} , de dimensão finita, então $\dim \mathbf{S} + \dim \mathbf{T} = \dim(\mathbf{S} + \mathbf{T}) - \dim(\mathbf{S} \cap \mathbf{T})$. Daqui se deduz o seguinte teorema:

- **Teorema 2.1.1 Teorema de incidência** ... *Sejam \mathcal{L} e \mathcal{M} duas variedades (lineares projectivas) num espaço projectivo $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ de dimensão finita. Então:*

$$\dim \mathcal{L} + \dim \mathcal{M} = \dim(\mathcal{L} \vee \mathcal{M}) - \dim(\mathcal{L} \cap \mathcal{M}) \quad (2.1.5)$$

- **Corolário 2.1.1** ... *Seja $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ um espaço projectivo de dimensão finita.*
 - *Se \mathcal{L} e \mathcal{M} são duas variedades em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, e se $\dim \mathcal{L} + \dim \mathcal{M} \geq \dim \mathbb{P}(\mathbf{V})$, então $\mathcal{L} \cap \mathcal{M}$ é não vazia.*
 - *Duas rectas distintas de um plano projectivo intersectam-se num e num só ponto.*
 - *Se $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = n$ então n hiperplanos têm pelo menos um ponto em comum.*
 - *Sejam \mathcal{H} um hiperplano e P um ponto, ambos em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, com $P \notin \mathcal{H}$. Então toda a recta ℓ que passa em P , intersecta \mathcal{H} num e num só ponto.*

Relação vectorial - projectivo ...

Espaço vectorial de dimensão $n + 1$	Espaço projectivo de dimensão n
Recta vectorial	Ponto projectivo
Plano vectorial	Recta projectiva
Espaço vectorial (tridimensional)	Plano projectivo
Hiperplano vectorial	Hiperplano projectivo
Subespaço vectorial de dimensão k	Variedade linear projectiva de dimensão $k - 1$

2.2 Coordenadas homogéneas. Referenciais projectivos

Coordenadas homogéneas ... Seja $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ um espaço projectivo de dimensão finita n , sobre o corpo \mathbb{k} ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), e fixemos uma base $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1}\}$ de \mathbf{V} .

Seja $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ um ponto de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Chama-se **sistema de coordenadas homogéneas de P , relativamente à base \mathcal{B}** , a toda a sequência ordenada $(x^1, \dots, x^{n+1}) \in \mathbb{k}^{n+1} - \{0\}$, tal que:

$$\pi \left(\sum_{i=1}^{n+1} x^i \mathbf{v}_i \right) = P \quad (2.2.1)$$

Neste caso escrevemos $P = [x^i]_{\mathcal{B}}$, ou apenas $P = [x^i]$, se é claro qual a base \mathcal{B} que estamos a considerar. É claro que um sistema de coordenadas homogéneas de P , $[x^1, \dots, x^{n+1}]$, relativamente à base \mathcal{B} , está determinado a menos da multiplicação por uma constante não nula $\lambda \in \mathbb{k} - \{0\}$, isto é:

$$[x^i]_{\mathcal{B}} = [\lambda x^i]_{\mathcal{B}}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{k} - \{0\}$$

Referenciais projectivos ... Um sistema de coordenadas homogéneas em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ fica unívocamente determinado pelos $n + 2$ pontos $V_1 = [\mathbf{v}_1] = [1, 0, \dots, 0]$, $V_2 = [\mathbf{v}_2] = [0, 1, \dots, 0]$, \dots , $V_{n+1} = [\mathbf{v}_{n+1}] = [0, 0, \dots, 1]$ e $E = [\mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_{n+1}] = [1, 1, \dots, 1]$, em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.

Ao conjunto $\mathcal{R} = \{V_1, V_2, \dots, V_{n+1}\}$ constituído pelos primeiros $n + 1$ pontos chama-se o **simplexo de referência de vértices V_i** , e ao ponto $E = [1, 1, \dots, 1]$ chama-se o **ponto unidade** (relativamente à base \mathcal{B} inicialmente considerada para \mathbf{V}). Quando $n = 2$, $\mathcal{R} = \{V_1, V_2, V_3\}$ chama-se o **triângulo de referência** (de vértices V_i , $i = 1, 2, 3$), e ao ponto $E = [1, 1, 1]$ chama-se o ponto unidade. Quando $n = 3$, $\mathcal{R} = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$ chama-se o **tetraedro de referência** (de vértices V_i , $i = 1, 2, 3, 4$) e ao ponto $E = [1, 1, 1, 1]$ chama-se o ponto unidade. Às respectivas coordenadas homogéneas costumam chamar-se, nestes casos, respectivamente coordenadas triangulares (no plano projectivo, quando $n = 2$), ou coordenadas tetraédricas (no espaço projectivo, quando $n = 3$).

Note que os $n + 1$ vértices $V_i = [\mathbf{v}_i]$, $i = 1, \dots, n + 1$ do simplexo de referência, onde $\{\mathbf{v}_i\}_{i=1, \dots, n+1}$ é a base \mathcal{B} de \mathbf{V} , inicialmente considerada, não são suficientes para determinar as coordenadas homogéneas em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. De facto não são suficientes para determinar a base de \mathbf{V} , relativamente à qual se definem as coordenadas homogéneas. Com efeito, $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1}\}$ e $\{\lambda_1 \mathbf{v}_1, \lambda_2 \mathbf{v}_2, \dots, \lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1}\}$, onde $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n+1} \in \mathbb{k} - \{0\}$, são ambas bases tais que $V_i = [\mathbf{v}_i] = [\lambda_i \mathbf{v}_i]$. No entanto se essas duas bases atribuem ao ponto unidade E as coordenadas homogéneas $[1, 1, \dots, 1]$, então isso significa que:

$$\begin{aligned} E &= \pi(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_{n+1}) \\ &= \pi(\lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1}) \\ &\Rightarrow \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_{n+1} \mathbf{v}_{n+1} = \lambda(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2 + \dots + \mathbf{v}_{n+1}), \quad \text{para algum } \lambda \in \mathbb{k} - \{0\} \\ &\Rightarrow \lambda = \lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_n \end{aligned}$$

Isto é - duas bases de \mathbf{V} , $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1}\}$ e $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+1}\}$, que sejam determinadas pelos $n + 1$ vértices $P_i = \pi(\mathbf{v}_i) = \pi(\mathbf{w}_i)$, $i = 1, \dots, n + 1$, e que atribuam ao ponto E as coordenadas homogêneas $[1, 1, \dots, 1] - E = \pi(\mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_{n+1}) = \pi(\mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_{n+1})$ - são necessariamente proporcionais: $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+1}\} = \{\lambda\mathbf{v}_1, \dots, \lambda\mathbf{v}_{n+1}\}$, para algum $\lambda \in \mathbb{k} - \{0\}$.

Se agora $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ é um ponto cujas coordenadas homogêneas na primeira base são $[x^1, \dots, x^{n+1}]$, então $P = \pi(x^i \mathbf{v}_i) = \pi\left(\frac{x^i}{\lambda}(\lambda\mathbf{v}_i)\right) = \pi\left(\frac{x^i}{\lambda} \mathbf{w}_i\right)$, e $\left[\frac{x^1}{\lambda}, \frac{x^2}{\lambda}, \dots, \frac{x^{n+1}}{\lambda}\right]$ são as coordenadas homogêneas relativamente à segunda base. Como $[x^1, \dots, x^{n+1}] = \left[\frac{x^1}{\lambda}, \dots, \frac{x^{n+1}}{\lambda}\right]$, as coordenadas homogêneas de P ficam unívocamente determinadas.

2.3 Espaços Afins. Referenciais Afins. O Grupo Afim

Seja G um grupo, X um conjunto e $Bij(X)$ o grupo das bijecções de X em si próprio. Uma **acção esquerda de G em X** , é, por definição um homomorfismo de grupos:

$$\begin{aligned} \Phi : G &\longrightarrow Bij(X) \\ g &\longmapsto \Phi_g \end{aligned}$$

Diz-se então que G **actua à esquerda** de X . Como Φ é um homomorfismo de grupos, concluímos que:

- $\Phi_{gh} = \Phi_g \circ \Phi_h$.
- $\Phi_e = \text{Id}_X$.
- $\Phi_{g^{-1}} = \Phi_g^{-1}$.

$\forall g, h \in G$. A acção Φ diz-se **transitiva** se dados dois quaisquer elementos $x, y \in X$, existe $g \in G$, tal que $\Phi_g(x) = y$. Se, além disso, g é único a acção diz-se **simplesmente transitiva**.

Espaços afins ... Apliquemos a definição anterior à situação em que $X = \mathcal{A}$ é um conjunto sobre o qual está definida uma **acção simplesmente transitiva** do grupo aditivo de um espaço vectorial \mathbf{V} . Neste caso diz-se que \mathcal{A} é um **espaço afim, modelado no espaço vectorial \mathbf{V}** . Usando a notação aditiva para o grupo aditivo de \mathbf{V} , temos portanto um homomorfismo de grupos $\Phi = T$:

$$\boxed{\begin{aligned} T : \mathbf{V} &\longrightarrow Bij(\mathcal{A}) \\ \mathbf{v} &\longmapsto T_{\mathbf{v}} \end{aligned}} \tag{2.3.1}$$

A bijecção $T_{\mathbf{v}} : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ diz-se a **translação de vector $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$** . Os elementos de \mathcal{A} chamam-se **pontos**, e a imagem de um ponto $P \in \mathcal{A}$, pela translação $T_{\mathbf{v}}$, é o ponto de \mathcal{A} que se nota por $P + \mathbf{v}$:

$$\boxed{T_{\mathbf{v}}(P) \stackrel{\text{def}}{=} P + \mathbf{v} \in \mathcal{A}, \quad P \in \mathcal{A}, \mathbf{v} \in \mathbf{V}} \tag{2.3.2}$$

Como T é um homomorfismo de grupos e o grupo aditivo de \mathbf{V} é abeliano, concluímos que:

- $T_{\mathbf{v}+\mathbf{w}} = T_{\mathbf{v}} \circ T_{\mathbf{w}} = T_{\mathbf{w}} \circ T_{\mathbf{v}}$.
- $T_{\mathbf{0}} = \text{Id}_{\mathcal{A}}$.
- $T_{-\mathbf{v}} = (T_{\mathbf{v}})^{-1}$.

Por outro lado, como a acção do grupo aditivo de \mathbf{V} , em \mathcal{A} , é simplesmente transitiva, dados dois pontos quaisquer $P, Q \in \mathcal{A}$, existe uma e uma só translação que envia P em Q . Esta translação nota-se por $T_{\overrightarrow{PQ}}$, onde $\overrightarrow{PQ} \in \mathbf{V}$ é o único vector de \mathbf{V} a que corresponde a referida translação, isto é:

$$T_{\overrightarrow{PQ}}(P) = Q$$

ou ainda:

$$\boxed{P + \overrightarrow{PQ} = Q} \quad (2.3.3)$$

Por isso, o vector $\overrightarrow{PQ} \in \mathbf{V}$ se simboliza às vezes por $Q - P$.

$$\boxed{Q - P \stackrel{\text{def}}{=} \overrightarrow{PQ} \in \mathbf{V}} \quad (2.3.4)$$

Relação de Chasles ... Consideremos agora três pontos arbitrários $A, B, C \in \mathcal{A}$. Temos então sucessivamente que:

$$\begin{aligned} T_{\overrightarrow{AB+\overrightarrow{BC}}}(A) &= \left(T_{\overrightarrow{BC}} \circ T_{\overrightarrow{AB}} \right) (A) = T_{\overrightarrow{BC}}(A + \overrightarrow{AB}) = T_{\overrightarrow{BC}}(B) = B + \overrightarrow{BC} = C \\ &= T_{\overrightarrow{AC}}(A) \end{aligned}$$

o que implica a chamada **relação de Chasles** seguinte, em \mathbf{V} :

$$\boxed{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \forall A, B, C \in \mathcal{A}} \quad (2.3.5)$$

ou, com a notação (2.3.4):

$$\boxed{(B - A) + (C - B) = C - A, \quad \forall A, B, C \in \mathcal{A}} \quad (2.3.6)$$

- **Teorema 2.3.1** ... *Um conjunto \mathcal{A} tem estrutura de espaço afim, modelado no espaço vectorial \mathbf{V} , se e só se existe uma aplicação Θ :*

$$\begin{aligned} \Theta : \mathcal{A} \times \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbf{V} \\ (P, Q) &\longmapsto \Theta(P, Q) = \overrightarrow{PQ} \end{aligned} \quad (2.3.7)$$

que satisfaz as condições seguintes:

- $\forall P \in \mathcal{A}$, a aplicação parcial $\Theta_P : \mathcal{A} \rightarrow \mathbf{V}$, definida por $\Theta_P(Q) = \Theta(P, Q) = \overrightarrow{PQ}$, é bijectiva.

– Θ verifica a relação de Chasles $\Theta(A, B) + \Theta(B, C) = \Theta(A, C)$, isto é:

$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}, \quad \forall A, B, C \in \mathcal{A}$$

Variedades lineares afins ... Uma **variedade (linear) afim** de \mathcal{A} , é um subconjunto $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$, que é da forma:

$$\mathcal{L} = P + \mathbf{L} \quad (2.3.8)$$

onde $P \in \mathcal{A}$ e \mathbf{L} é um subespaço vectorial de \mathbf{V} , chamado o **subespaço director** da variedade \mathcal{L} .

Vectorialização em O ... A escolha de um ponto $O \in \mathcal{A}$, determina uma bijecção:

$$\begin{aligned} \phi_O : \mathbf{V} &\longrightarrow \mathcal{A} \\ \mathbf{v} &\longmapsto O + \mathbf{v} \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

Diz-se então que $O \in \mathcal{A}$ é a “origem” do espaço afim \mathcal{A} , e que \mathcal{A} fica vectorializado em O , isto é, \mathcal{A} fica munido da única estrutura vectorial para a qual a bijecção ϕ_O é um isomorfismo de espaços vectoriais. Por definição, a dimensão de \mathcal{A} é a dimensão de \mathbf{V} .

Referenciais afins ... Suponhamos que \mathcal{A} é um espaço afim, modelado no espaço vectorial (real ou complexo) \mathbf{V} , de dimensão finita n . Um **referencial afim** para \mathcal{A} é um conjunto constituído por um ponto $O \in \mathcal{A}$, chamado a **origem** do referencial, e por uma base (ordenada) $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ para \mathbf{V} . Esse referencial será notado por:

$$\mathcal{R} = \{O; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$$

Coordenadas afins ... Consideremos um referencial afim $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ para \mathcal{A} . Dado um ponto $A \in \mathcal{A}$, o vector \overrightarrow{OA} está em \mathbf{V} , e podemos considerar as respectivas coordenadas relativas à base $\{\mathbf{v}_i\}$ para \mathbf{V} :

$$\overrightarrow{OA} = \sum_i a^i \mathbf{v}_i$$

Pômos então:

$$\boxed{A = O + \sum_{i=1}^n a^i \mathbf{v}_i} \quad (2.3.10)$$

e diz-se que (a^i) são as **coordenadas afins do ponto $A \in \mathcal{A}$, no referencial afim $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{v}_i\}$** .

Um referencial $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{v}_i\}$, define pois um **sistema de coordenadas afins para \mathcal{A}** , isto é, define uma bijecção:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{R}} : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathbb{k}^n \\ A &\longmapsto (a^i) \end{aligned} \quad \text{onde} \quad A = O + \sum_{i=1}^n a^i \mathbf{v}_i \quad (2.3.11)$$

É claro que a bijecção recíproca é:

$$\begin{aligned} \psi_{\mathcal{R}}^{-1} : \mathbb{k}^n &\longrightarrow \mathcal{A} \\ (a^i) &\longmapsto A = O + \sum_{i=1}^n a^i \mathbf{v}_i \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

Aplicações afins ... Suponhamos agora que temos dois espaços afins - \mathcal{A} , modelado no espaço vectorial \mathbf{V} , e \mathcal{B} modelado no espaço vectorial \mathbf{W} . Uma aplicação $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ diz-se uma **aplicação afim**, se existe uma aplicação linear $\mathbf{L} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$, tal que o diagrama seguinte é comutativo, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{f} & \mathcal{B} \\ T_{\mathbf{v}} \downarrow & & \downarrow T_{\mathbf{L}(\mathbf{v})} \\ \mathcal{A} & \xrightarrow{f} & \mathcal{B} \end{array}$$

isto é:

$$(T_{\mathbf{L}(\mathbf{v})} \circ f)(A) = (f \circ T_{\mathbf{v}})(A), \quad \forall A \in \mathcal{A}$$

ou ainda:

$$\boxed{f(A + \mathbf{v}) = f(A) + \mathbf{L}(\mathbf{v}), \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}, \quad \forall A \in \mathcal{A}} \quad (2.3.13)$$

É fácil ver que a aplicação linear \mathbf{L} é única (e apenas depende de f), e por isso, diz-se a **parte linear** de f .

Uma aplicação afim bijectiva $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$, diz-se um isomorfismo afim. O conjunto de todos os isomorfismos afins de \mathcal{A} formam um grupo que se diz o **grupo afim de \mathcal{A}** , e nota-se por $GA(\mathcal{A})$.

O Grupo Afim $GA_{\mathbb{k}}(n)$... Consideremos o espaço \mathbb{k}^n ($= \mathbb{R}^n$ ou \mathbb{C}^n), com a sua estrutura afim canónica, isto é, \mathbb{k}^n actua sobre si próprio através da soma usual de vectores. Pontos ($=$ vectores) de \mathbb{k}^n serão representados por $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \dots$ (vectores-coluna). Um **isomorfismo afim** $g : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ é uma aplicação que é da forma:

$$g : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{a} + \mathbf{A}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} \in \mathbb{k}^n \quad (2.3.14)$$

onde $\mathbf{a} = g(\mathbf{0}) \in \mathbb{k}^n$, e $\mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{k})$ é uma aplicação linear inversível, chamada a **parte linear** associada a g . As bijecções afins de \mathbb{k}^n constituem um grupo $GA_{\mathbb{k}}(n)$, chamado **grupo afim** de \mathbb{k}^n , que pode ser identificado com o subgrupo de $GL(n+1, \mathbb{k})$ constituído pelas matrizes da forma:

$$g = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{a} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbf{a}, \mathbf{A}) \quad \text{com} \quad \mathbf{A} \in GL(n, \mathbb{k}), \quad \mathbf{a} \in \mathbb{k}^n \quad (2.3.15)$$

Note que o produto em $GA(n)$ é dado por:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{A})(\mathbf{b}, \mathbf{B}) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{a} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{b} & \mathbf{B} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b} & \mathbf{A}\mathbf{B} \end{bmatrix} = (\mathbf{a} + \mathbf{A}\mathbf{b}, \mathbf{A}\mathbf{B})$$

e que:

$$(\mathbf{a}, \mathbf{A})^{-1} = (-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}, \mathbf{A}^{-1})$$

Uma bijecção afim $g : \mathbb{k}^n \rightarrow \mathbb{k}^n$ fica completamente determinada pelo ponto $\mathbf{a} = g(\mathbf{0}) \in \mathbb{k}^n$ no qual ela transforma a origem $\mathbf{0} \in \mathbb{k}^n$, e pelos vectores $\mathbf{e}_1 = \mathbf{A}(\mathbf{E}_1), \dots, \mathbf{e}_n = \mathbf{A}(\mathbf{E}_n)$ nos quais a aplicação linear homogénea \mathbf{A} , associada a g , transforma os vectores $\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_n$ da base canónica de \mathbb{k}^n . Para representar isto, usamos a notação matricial seguinte:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \cdots & \mathbf{e}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_1 & \mathbf{E}_2 & \cdots & \mathbf{E}_n \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}$$

ou simplesmente:

$$\mathbf{e} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}$$

Um **referencial afim** em \mathbb{k}^n é uma sequência da forma:

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{a}; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\} \in \mathbb{k}^n \times \underbrace{\mathbb{k}^n \times \cdots \times \mathbb{k}^n}_{n \text{ factores}} \quad (2.3.16)$$

onde \mathbf{a} é um ponto de \mathbb{k}^n , chamado a origem do referencial \mathcal{R} , e $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é uma base de \mathbb{k}^n . Representamos o referencial (2.3.16) por:

$$\mathcal{R} = \{\mathbf{a}; \mathbf{e}_i\}$$

O conjunto de todos os referenciais afins em \mathbb{k}^n está em correspondência bijectiva com o grupo afim $GA_{\mathbb{k}}(n)$, e é notado por $\mathcal{RA}(\mathbb{k}^n)$:

$$\begin{aligned} \iota : \quad GA(n) &\xrightarrow{\cong} \mathcal{RA}(\mathbb{k}^n) \\ g = (\mathbf{a}, \mathbf{A}) &\longleftrightarrow \mathcal{R}_g = \{\mathbf{a}; \mathbf{e} = \mathbf{E} \cdot \mathbf{A}\} \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Dado um qualquer espaço afim \mathcal{A} , e uma vez fixo um referencial afim $r = \{O; \mathbf{v}_i\}$, para \mathcal{A} , todos os outros referenciais se obtêm a partir deste, por acção do grupo $GA_{\mathbb{k}}(n)$ - o grupo afim de \mathbb{k}^n .

De facto, dado o referencial $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{v}_i\}$ e um isomorfismo afim $g = (\mathbf{a} = (a^i), \mathbf{A} = (A_j^i)) \in GA_{\mathbb{k}}(n)$, associamos um novo referencial afim $\widehat{\mathcal{R}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{R} \cdot g = \{\widehat{O}; \widehat{\mathbf{v}}_i\}$, para \mathcal{A} , pondo:

$$\begin{aligned} \widehat{O} &= O + \sum_i a^i \mathbf{v}_i \\ \widehat{\mathbf{v}}_j &= \sum_i A_j^i \mathbf{v}_i \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Reciprocamente, é fácil ver que, dado um qualquer referencial $\widehat{\mathcal{R}}\{\widehat{O}; \widehat{\mathbf{v}}_i\}$, existe um e um só isomorfismo afim $g = (\mathbf{a} = (a^i), \mathbf{A} = (A_j^i)) \in GA(n)$, tal que $\widehat{\mathcal{R}} = \mathcal{R} \cdot g$.

Desta forma, podemos concluir que, uma vez fixo um referencial afim $\mathcal{R} = \{O; \mathbf{v}_i\}$, para \mathcal{A} , o conjunto de todos os referenciais afins de \mathcal{A} está em correspondência bijectiva com o grupo $GA_{\mathbb{k}}(n)$, e portanto, com $\mathcal{RA}(\mathbb{k}^n)$, atendendo a (2.3.17).

2.4 Fecho Projectivo de um espaço afim

Seja \mathcal{A} um espaço afim modelado num espaço vectorial \mathbf{V} , sobre um corpo $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} . Fixando, de uma vez por todas, uma “origem” $O \in \mathcal{A}$, para o espaço afim \mathcal{A} , podemos identificar \mathcal{A} com o hiperplano afim $\mathbf{V} \times \{1\} \subset \mathbf{V} \times \mathbb{k}$, através de:

$$\begin{aligned} j_O : \mathcal{A} &\xrightarrow{\cong} \mathbf{V} \times \{1\} \\ P &\longrightarrow (\overrightarrow{OP}, 1) \end{aligned} \quad (2.4.1)$$

De aqui em diante usaremos sempre esta identificação $\mathcal{A} \cong j_O(\mathcal{A}) = \mathbf{V} \times \{1\}$ e, por simplicidade de notações, identificaremos o ponto $P \in \mathcal{A}$ com o vector $j_O(P) = (\overrightarrow{OP}, 1) \in \mathbf{V} \times \mathbb{k}$, e uma qualquer variedade afim $\mathcal{L} \subset \mathcal{A}$ com o subconjunto $j_O(\mathcal{L})$ (não haverá risco de confusão...).

Define-se o **fecho (ou complemento) projectivo** de \mathcal{A} , como sendo o espaço projectivo:

$$\mathcal{A}^{\mathbb{P}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\mathbf{V} \times \mathbb{k}) \quad (2.4.2)$$

Com as convenções atrás referidas, podemos definir uma injeção canónica através de:

$$\begin{aligned} \iota_O : \mathcal{A} &\longrightarrow \mathcal{A}^{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(\mathbf{V} \times \mathbb{k}) \\ P &\longrightarrow \pi(P) = \pi((\overrightarrow{OP}, 1)) = [(\overrightarrow{OP}, 1)] \end{aligned} \quad (2.4.3)$$

onde $\pi : \mathbf{V} \times \mathbb{k} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V} \times \mathbb{k})$ é a projecção canónica (ver a figura 2.1). Portanto ι_O é a composta de π com a identificação (2.4.1).

A imagem $\iota_O(\mathcal{A}) \subset \mathcal{A}^{\mathbb{P}}$ é evidentemente o complementar do hiperplano $\mathbb{P}(\mathbf{V} \times \{0\}) \cong \mathbb{P}(\mathbf{V})$ em $\mathcal{A}^{\mathbb{P}}$. Este hiperplano:

$$\mathcal{A}_{\infty} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\mathbf{V} \times \{0\}) \cong \mathbb{P}(\mathbf{V}) \subset \mathcal{A}^{\mathbb{P}} \quad (2.4.4)$$

chama-se o **hiperplano no infinito**, e nota-se por \mathcal{A}_{∞} (ver a figura 2.1).

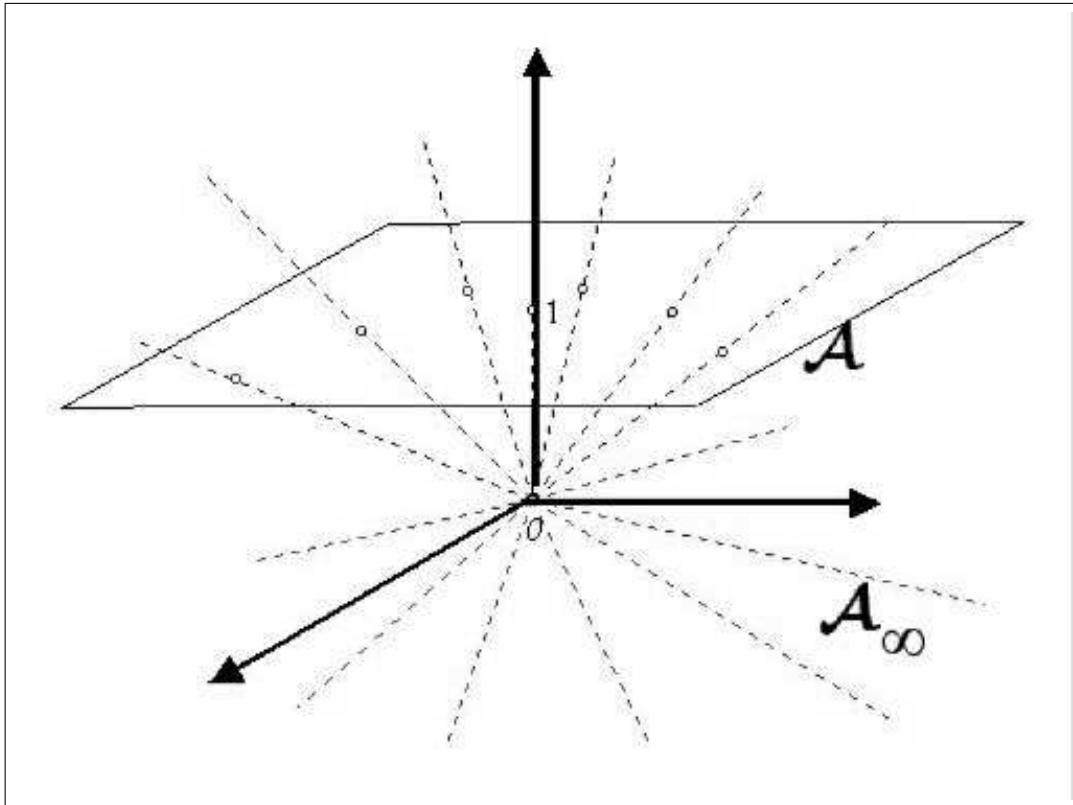
Como conjuntos, o fecho projectivo $\mathcal{A}^{\mathbb{P}}$ do espaço afim \mathcal{A} é obtido adicionando a \mathcal{A} os “pontos no infinito” de \mathcal{A} , isto é, os elementos de \mathcal{A}_{∞} :

$$\mathcal{A}^{\mathbb{P}} = \mathcal{A} \cup \mathcal{A}_{\infty}, \quad (\text{como conjuntos})$$

Note que $\mathcal{A}_{\infty} \cong \mathbb{P}(\mathbf{V})$ é o conjunto dos subespaços de dimensão 1 em \mathbf{V} , ou de forma equivalente, é o conjunto das direcções das rectas (afins) em \mathcal{A} . De facto, no fecho projectivo, a cada recta afim $\ell : \{A + \lambda \mathbf{v} : \lambda \in \mathbb{k}\}$ em \mathcal{A} , de direcção $\mathbf{v} \in \mathbf{V}$, adiciona-se o ponto no infinito $\ell_{\infty} = [\mathbf{v}] \in \mathcal{A}_{\infty}$. Como conjuntos, é claro que $\ell^{\mathbb{P}} = \ell \cup \ell_{\infty}$. No entanto, enquanto que $\ell^{\mathbb{P}}$ tem estrutura projectiva, $\ell \cup \ell_{\infty}$ é apenas o conjunto subjacente a $\ell^{\mathbb{P}}$.

Mais geralmente, se $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ é uma variedade afim em \mathcal{A} , de subespaço director $\mathbf{L} \subset \mathbf{V}$, isto é, $\mathcal{L} = A + \mathbf{L}$, onde $A \in \mathcal{A}$, o seu fecho projectivo define-se por (ver a figura 2.1):

$$\mathcal{L}^{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(\mathbb{k}A \oplus \mathbf{L})$$

Figure 2.1: Fecho projectivo $\mathcal{A}^{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(\mathbf{V} \times \mathbb{k})$.

(Recorde que estamos a identificar, como sempre, o ponto A com o vector $(\overrightarrow{OA}, 1) \in \mathbf{V} \times \{1\} \cong \mathcal{A}$). À variedade projectiva:

$$\mathcal{L}_{\infty} = \mathcal{L}^{\mathbb{P}} - \iota_O(\mathbf{L}) \cong \mathbb{P}(\mathbf{L}) \subseteq \mathcal{A}_{\infty}$$

chama-se a parte no infinito de \mathcal{L} . Note que $\dim \mathcal{L} = \dim \mathbf{L}^{\mathbb{P}} = 1 + \dim \mathcal{L}_{\infty}$.

Portanto cada recta afim de \mathcal{A} tem, em $\mathcal{A}^{\mathbb{P}}$, um ponto no infinito, cada plano afim de \mathcal{A} tem, em $\mathcal{A}^{\mathbb{P}}$, uma recta no infinito, etc....

Uma aplicação projectiva (ou homografia) de \mathcal{A} , é, por definição, uma homografia do fecho projectivo $\mathcal{A}^{\mathbb{P}}$.

2.5 Coordenadas afins e coordenadas homogéneas

Com as notações da secção anterior, fixemos um referencial afim de “origem” $O \in \mathcal{A}$, $\mathcal{R}_O = \{O; \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, para o espaço afim \mathcal{A} , de dimensão n , sobre \mathbb{k} . Um ponto $P \in \mathcal{A}$ terá coordenadas (X^1, \dots, X^n) , relativamente a esse referencial, dadas por:

$$\overrightarrow{OP} = \sum_{i=1}^n X^i \mathbf{e}_i$$

e é claro que $[X^1, \dots, X^n, 1]$ são coordenadas homogéneas para $\iota_O(P) \cong P$, relativamente à base $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n, 1\}$ de $\mathbf{V} \oplus \mathbb{k}$.

Se $\mathcal{L} \subseteq \mathcal{A}$ é uma variedade afim em \mathcal{A} , definida pelo sistema:

$$\sum_{i=1}^n a_i^j X^i = b^j, \quad j = 1, \dots, d \quad (2.5.1)$$

então o seu fecho projectivo $\mathcal{L}^{\mathbb{P}}$, é definido pelo sistema:

$$\sum_{i=1}^n a_i^j x^i = b^j x^{n+1}, \quad j = 1, \dots, d \quad (2.5.2)$$

- **Exemplo 2.5.1** ... Seja $\mathcal{A} = \mathbb{R}^2$, com a sua estrutura afim canónica e $O = \mathbf{0} = (0, 0)$. Qual é o fecho projectivo $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{P}}$? Por definição:

$$\begin{aligned} (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{P}} &= \mathbb{P}(\mathbb{R}^2 \oplus \mathbb{R}) \\ &= \mathbb{P}(\mathbb{R}^3) \\ &= \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

que é exactamente o plano projectivo real. Se (X, Y) são as coordenadas usuais em \mathbb{R}^2 , relativamente à base canónica, a injeção canónica (2.4.3) é dada por:

$$\iota_0 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \xrightarrow{j_0} & \mathbb{R}^2 \times \{1\} \subset \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\pi} & (\mathbb{R}^2)^{\mathbb{P}} = \mathbb{R}\mathbb{P}^2 \\ (X, Y) & \longmapsto & (X, Y, 1) & \longmapsto & [(X, Y, 1)] \end{array} \quad (2.5.4)$$

O hiperplano no infinito é $\mathbb{R}_{\infty}^2 = \pi(\mathbb{R}^2 \times \{\mathbf{0}\}) = \mathbb{P}(\mathbb{R}^2) = \mathbb{P}_{\mathbb{R}}^1 \cong S^1$. Como conjuntos, existe portanto uma bijecção entre $\mathbb{R}\mathbb{P}^2$ e $\mathbb{R}^2 \cup S^1$.

Seja ℓ uma recta afim em \mathbb{R}^2 de equação.

$$aX + bY = c, \quad \text{com } (a, b) \neq \mathbf{0}$$

A direcção desta recta é a do vector $(-b, a) \in \mathbb{R}^2$. Qual é o fecho projectivo $\ell^{\mathbb{P}}$ desta recta, em $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{P}} = \mathbb{R}\mathbb{P}^2$?

Através da identificação $j_0 : \mathbb{R}^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^2 \times \{1\}$, dada por $j_0(X, Y) = (X, Y, 1)$, a recta ℓ será identificada com o conjunto dos pontos $(X, Y, 1) \in \mathbb{R}^2 \times \{1\}$ tais que $aX + bY = c$, que constituem um recta afim $j_0(\ell)$ no hiperplano afim $\mathbb{R}^2 \times \{1\}$ de \mathbb{R}^3 . Um ponto de $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{P}} = \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ é uma recta vectorial de \mathbb{R}^3 . Esse ponto estará em $\ell^{\mathbb{P}}$ se e só se a recta vectorial correspondente intersecta $j_0(\ell)$, digamos num ponto $(X, Y, 1)$. Designemos por (x, y, z) as coordenadas usuais de \mathbb{R}^3 . A equação da recta vectorial de \mathbb{R}^3 , que passa em $(X, Y, 1)$ é:

$$(x, y, z) = \lambda(X, Y, 1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Como $(X, Y, 1) \in j_0(\ell)$, então $aX + bY = c$, o que implica que $a\lambda X + b\lambda Y = c\lambda$, donde se deduz que:

$$ax + by = cz$$

que é exactamente a equação do plano vectorial em \mathbb{R}^3 , que contem $j_0(\ell)$, e é também a equação da recta projectiva $\ell^{\mathbb{P}}$, em coordenadas homogéneas, relativas à base canónica de \mathbb{R}^3 .

O que é ℓ_∞ ? Por definição $\ell_\infty = \ell^{\mathbb{P}} - \iota_0(\ell)$, é exactamente o ponto de $\mathbb{R}_\infty^2 \cong S^1$, que corresponde à recta de $\mathbb{R}^2 \times \{0\}$, paralela a $j_0(\ell)$ (ver a figura 2.2), isto é, a recta gerada por $(-b, a, 0)$, que é a intersecção do plano $ax + by = cz$ com o plano $z = 0$. Portanto ℓ_∞ é o ponto de \mathbb{R}_∞^2 , que, em coordenadas homogéneas, é dado pelo sistema:

$$\begin{cases} ax + by = cz \\ z = 0 \end{cases}$$

isto é, o ponto $[-b, a, 0] \in \mathbb{R}_\infty^2$ (ver a figura 2.2).

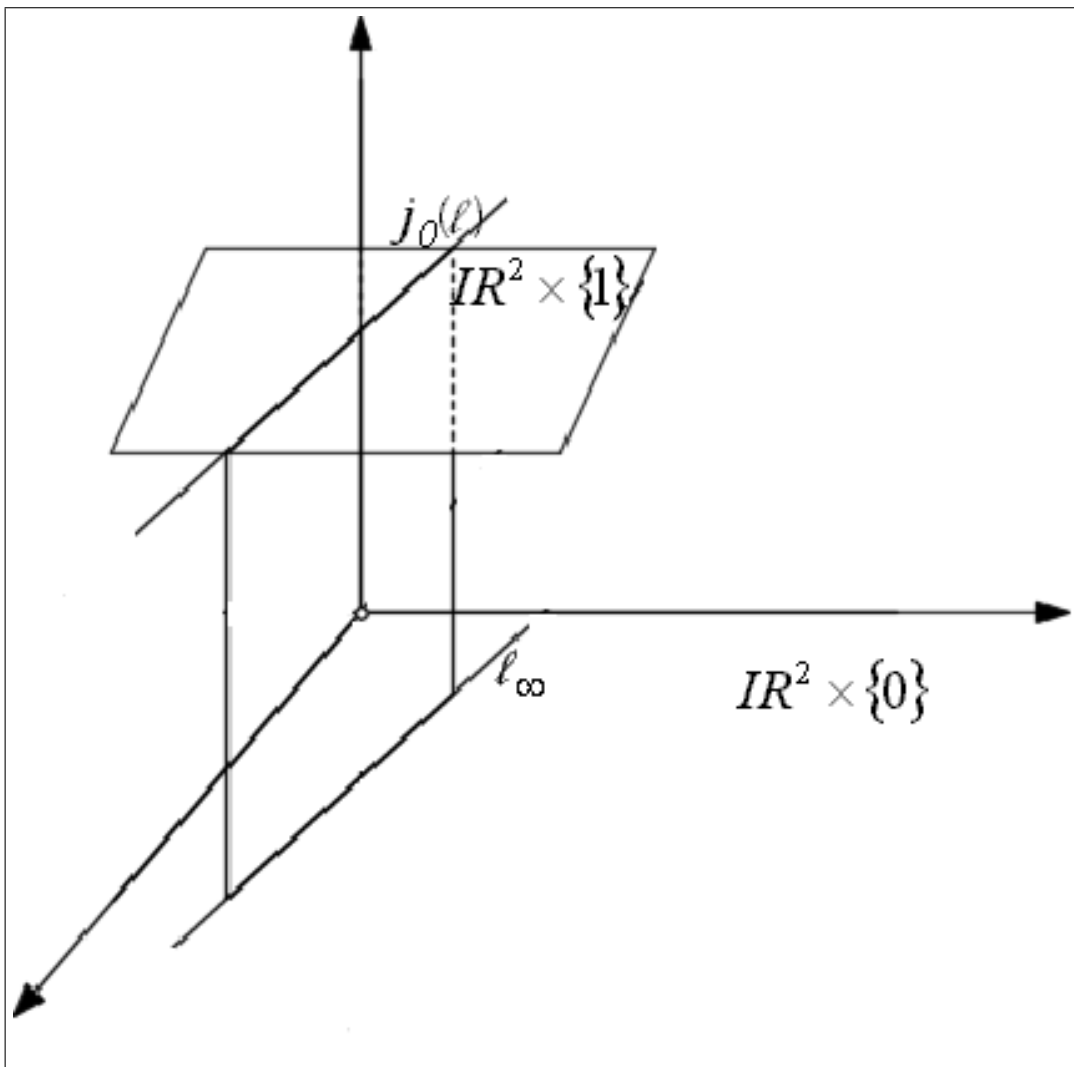


Figure 2.2: Fecho projectivo $\mathbb{R}^{2\mathbb{P}} = \mathbb{R}\mathbb{P}^2$.

- **Exemplo 2.5.2 Pontos cíclicos. Rectas isotrópicas. Umbilical ...** Se C é a circunferência de equação $X^2 + Y^2 = 1$, em \mathbb{R}^2 , a sua imagem em $(\mathbb{R}^2)^{\mathbb{P}} = \mathbb{R}\mathbb{P}^2$, calcula-se da mesma forma: um ponto $[x, y, z] \in \mathbb{R}\mathbb{P}^2$ estará em $C^{\mathbb{P}}$ se e só se $(x, y, z) = \lambda(X, Y, 1)$, onde $(X, Y, 1) \in j_0(C)$, isto é, $X^2 + Y^2 = 1$.

Daqui se deduz que $(\lambda X)^2 + (\lambda Y)^2 = \lambda^2$ e portanto:

$$x^2 + y^2 = z^2$$

que é a equação do fecho projectivo $C^{\mathbb{P}}$ de C , em coordenadas homogéneas.

Se $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, a circunferência $C^{\mathbb{P}}$ não tem pontos no infinito. Mas considerando-a como uma curva em $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, ela tem dois pontos no infinito dados pelo sistema:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = z^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

que são os chamados **pontos cíclicos** $I = [1, i, 0]$ e $J = [1, -i, 0]$ em \mathbb{C}^2_{∞} . Note que dada uma “circunferência” do tipo:

$$(X - a)^2 + (Y - b)^2 = r^2 \tag{2.5.5}$$

em \mathbb{C}^2 , o seu fecho projectivo $C^{\mathbb{P}}$, em $(\mathbb{C}^2)^{\mathbb{P}} = \mathbb{C}\mathbb{P}^2$, tem sempre os mesmos dois pontos cíclicos $I = [1, i, 0]$ e $J = [1, -i, 0]$ em \mathbb{C}^2_{∞} ! Com efeito esses pontos são dados pelo sistema:

$$\begin{cases} x^2 - 2axz - a^2z^2 + y^2 - 2byz + b^2z^2 = r^2z^2 \\ z = 0 \end{cases}$$

Toda a recta que passa em I ou em J tem por equação cartesiana:

$$Y = \pm iX + c \tag{2.5.6}$$

onde $c \in \mathbb{C}$. Estas rectas dizem-se **isotrópicas** ou **minimais**. Em particular as rectas isotrópicas, que passam no centro (a, b) do círculo (2.5.5), tem por equação, em coordenadas homogéneas:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ a & b & 1 \\ 1 & \pm i & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad \text{isto é} \quad -ix + y + (a(\pm i) - b)z = 0 \tag{2.5.7}$$

e em coordenadas afins (X, Y) (fazendo $X = x, Y = y$ e $z = 1$, na equação homogénea):

$$Y - b = \pm i(X - a) \tag{2.5.8}$$

Estas rectas são as chamadas assíptotas desse círculo. Em particular, se $r = 0$ (círculo de raio nulo), a equação (2.5.5) reduz-se a (2.5.8), o que significa que um círculo de raio nulo degenera em duas rectas isotrópicas.

Analogamente, o fecho projectivo de toda a esfera $(X-a)^2 + (Y-b)^2 + (Z-c)^2 = r^2$, em $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$, intersecta o plano do infinito $\mathbb{C}\mathbb{P}^3_\infty \cong \mathbb{C}\mathbb{P}^3$, numa cónica de equação:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = 0 \\ t = 0 \end{cases} \quad (2.5.9)$$

a que chamamos **umbilical** ou **círculo do infinito**.

Uma **hipersuperfície algébrica** em \mathbb{k}^n é um conjunto do tipo:

$$S = \{(X^1, \dots, X^n) \in \mathbb{k}^n : F(X^1, \dots, X^n) = 0\}$$

onde F é um polinómio de grau $d \geq 1$. Com a identificação $\mathbb{k}^n \cong \mathbb{k}^n \times \{1\} \subset \mathbb{k}^{n+1}$, S terá como imagem o subconjunto de \mathbb{k}^{n+1} , que continuamos a notar por S :

$$S = \{(X^1, \dots, X^n, 1) \in \mathbb{k}^{n+1} : F(X^1, \dots, X^n) = 0\}$$

e este conjunto define um cone com vértice na origem $\mathbf{0} \in \mathbb{k}^{n+1}$, é gerado por S , isto é, o cone cujas geratrizes são as rectas vectoriais de \mathbb{k}^{n+1} que passam pelos pontos de S . A equação de uma dessas geratrizes obtem-se da seguinte forma: designando por $(x^1, \dots, x^n, x^{n+1})$ as coordenadas usuais de \mathbb{k}^{n+1} , um ponto $(x^1, \dots, x^n, x^{n+1})$ estará na recta vectorial que passa em $(X^1, \dots, X^n, 1) \in S$, se e só se:

$$\begin{aligned} & (x^1, \dots, x^n, x^{n+1}) = \lambda(X^1, \dots, X^n, 1) \quad \text{e} \quad F(X^1, \dots, X^n) = 0 \\ \Leftrightarrow & x^1 = \lambda X^1, \dots, x^n = \lambda X^n, x^{n+1} = \lambda \quad \text{e} \quad F(X^1, \dots, X^n) = 0 \\ \Leftrightarrow & F\left(\frac{x^1}{x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{x^{n+1}}\right) = 0 \\ \Leftrightarrow & F_h(x^1, \dots, x^{n+1}) = (x^{n+1})^d F\left(\frac{x^1}{x^{n+1}}, \dots, \frac{x^n}{x^{n+1}}\right) = 0 \end{aligned} \quad (2.5.10)$$

onde F_h se diz o **polinómio homogéneo de grau $d \geq 1$** associado a F .

O subconjunto algébrico de $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n$, constituído pelos pontos de coordenadas homogéneas $[x^1, \dots, x^{n+1}]$ satisfazem pois a equação homogénea:

$$F_h(x^1, \dots, x^{n+1}) = 0$$

e diz-se o fecho projectivo da variedade afim S , e nota-se por $S^{\mathbb{P}}$. Como:

$$F_h(x^1, \dots, x^n, 1) = F(x^1, \dots, x^n) = F(X^1, \dots, X^n)$$

já que $x^{n+1} = \lambda = 1$, vemos que S é a intersecção de $S^{\mathbb{P}}$ com $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^n - \mathcal{H}_\infty$ onde $\mathcal{H}_\infty = \mathbb{P}(\mathbb{k}^n \times \{\mathbf{0}\}) \cong \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^{n-1}$ é o hiperplano no infinito. Os pontos de $S^{\mathbb{P}} - S$ dizem-se os pontos no infinito de S - eles constituem um subconjunto algébrico de $\mathcal{H}_\infty \cong \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^{n-1}$.

- **Exemplo 2.5.3** ... Seja $S \subset \mathbb{k}^2$ dada por $F(X, Y) = X^4 - Y^4 - XY$, onde $(X, Y) \in \mathbb{k}^2$. Então $d = 4$ e:

$$\begin{aligned} F_h(x, y, z) &= z^4 F\left(\frac{x}{z}, \frac{y}{z}\right) \\ &= z^4 \left[\left(\frac{x}{z}\right)^4 - \left(\frac{y}{z}\right)^4 - \left(\frac{x}{z}\right) \left(\frac{y}{z}\right) \right] \\ &= x^4 - y^4 - xyz^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{k}^3 \end{aligned}$$

$S^{\mathbb{P}}$ é constituída pelos pontos de $\mathbb{P}_{\mathbb{k}}^2$ de coordenadas homogéneas $[x, y, z]$ que satisfazem a equação $x^4 - y^4 - xyz^2 = 0$. Os pontos de S_{∞} verificam:

$$\begin{cases} x^4 - y^4 - xyz^2 = 0 \\ z = 0 \end{cases}$$

isto é $x^4 = y^4$ e $z = 0$. Se $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ os pontos de S_{∞} são $[1, 1, 0]$ e $[1, -1, 0]$.

2.6 Complementar de um Hiperplano num espaço projectivo

Seja \mathbf{V} um espaço vectorial de dimensão finita sobre \mathbb{k} ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), e \mathbf{H} um hiperplano em \mathbf{V} . Consideremos o conjunto $\mathbf{V}_{\mathbf{H}}$, constituído por todas as rectas vectoriais de \mathbf{V} , suplementares a \mathbf{H} :

$$\mathbf{V}_{\mathbf{H}} = \{ \mathbf{L} \subset \mathbf{V} : \dim \mathbf{L} = 1 \text{ e } \mathbf{L} \oplus \mathbf{H} = \mathbf{V} \}$$

- **Teorema 2.6.1** ... Existe sobre $\mathbf{V}_{\mathbf{H}}$ uma estrutura natural de espaço afim modulado no espaço vectorial $\text{Hom}(\mathbf{V}/\mathbf{H}; \mathbf{H})$.

- Demonstração... Note que $\dim \mathbf{V}/\mathbf{H} = 1$ e portanto que $\dim \text{Hom}(\mathbf{V}/\mathbf{H}; \mathbf{H}) = \dim \mathbf{H} = \dim \mathbf{V} - 1$. Vamos utilizar o teorema 2.3.1 para provar que $\mathbf{V}_{\mathbf{H}}$ tem estrutura afim, construindo uma aplicação Θ :

$$\Theta : \mathbf{V}_{\mathbf{H}} \times \mathbf{V}_{\mathbf{H}} \longrightarrow \text{Hom}(\mathbf{V}/\mathbf{H}; \mathbf{H})$$

que verifica as duas condições enunciadas nesse teorema. A ideia está expressa na figura seguinte:

Consideremos então duas rectas $\mathbf{L}, \mathbf{L}' \in \mathbf{V}_{\mathbf{H}}$ e um ponto $\mathbf{v} + \mathbf{H} \in \mathbf{V}/\mathbf{H}$. Se $\pi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{V}/\mathbf{H}$ é a projecção canónica, então $\pi^{-1}(\mathbf{v} + \mathbf{H})$ é um hiperplano afim de \mathbf{V} . Por outro lado, sabemos que $\pi|_{\mathbf{L}}$ é um isomorfismo sobre \mathbf{V}/\mathbf{H} . Podemos pois pôr:

$$\Theta(\mathbf{L}, \mathbf{L}')(\mathbf{v} + \mathbf{H}) \stackrel{\text{def}}{=} (\pi|_{\mathbf{L}'})^{-1}(\mathbf{v} + \mathbf{H}) - (\pi|_{\mathbf{L}})^{-1}(\mathbf{v} + \mathbf{H}) \in \mathbf{H} \quad (2.6.1)$$

É fácil verificar as duas condições do teorema 2.3.1.



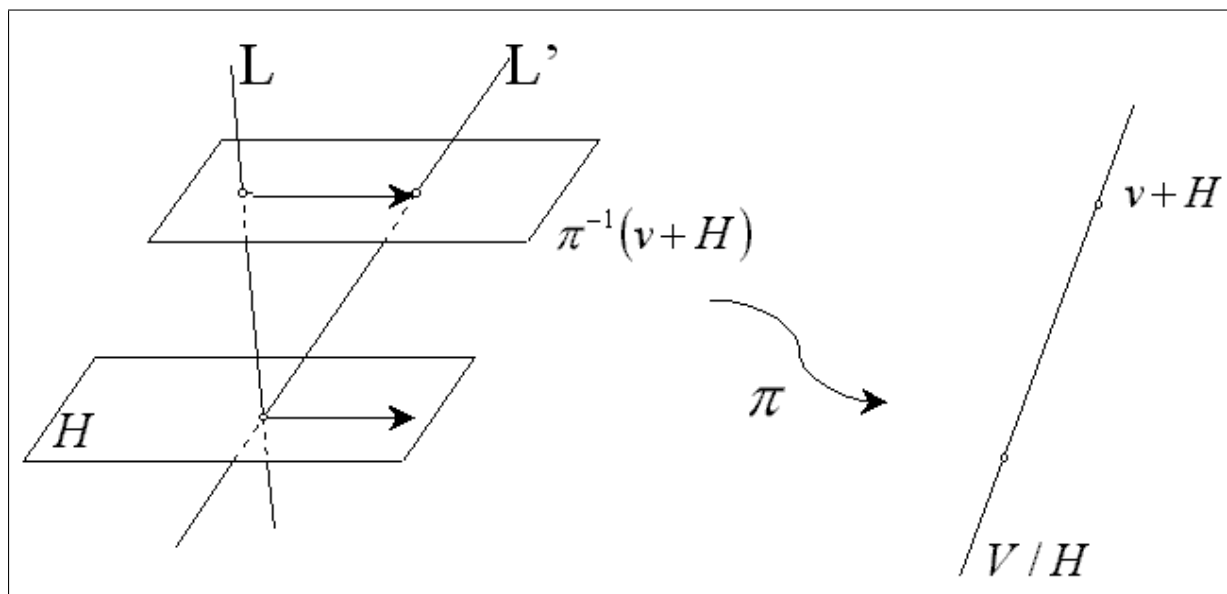


Figure 2.3: Dualidade projectiva no plano.

Passando a espaços projectivos podemos agora enunciar o seguinte:

- **Teorema 2.6.2** ... *Seja $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ um espaço projectivo e $\mathcal{H} = \pi(\mathbf{H})$ um dos seus hiperplanos. Então o complementar $\mathbb{P}(\mathbf{V}) - \mathcal{H} = \mathbf{V}_{\mathbf{H}}$ tem estrutura natural de espaço afim modelado no espaço vectorial $\text{Hom}(\mathbf{V}/\mathbf{H}; \mathbf{H})$.*

2.7 Homografias. O grupo projectivo

Sejam \mathbf{V} e \mathbf{W} dois espaços vectoriais de dimensão finita sobre \mathbb{k} e $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ uma aplicação linear injectiva ($\ker A = \{0\}$). Como A envia rectas vectoriais de \mathbf{V} em rectas vectoriais de \mathbf{W} , e transforma vectores não nulos em vectores não nulos (por ser injectiva), A induz uma transformação $\mathbb{P}(A) : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{W})$ definida por

$$\mathbb{P}(A)[\mathbf{v}] = [A(\mathbf{v})]$$

isto é:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V} & \xrightarrow{A} & \mathbf{W} \\ \pi \downarrow & & \downarrow \pi \\ \mathbb{P}(\mathbf{V}) & \xrightarrow{\mathbb{P}(A)} & \mathbb{P}(\mathbf{W}) \end{array}$$

A aplicação $\mathbb{P}(A)$ diz-se uma **transformação projectiva** ou uma **homografia** quando $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = \dim \mathbb{P}(\mathbf{W})$ e portanto $\mathbb{P}(A)$ é bijectiva.

- **Proposição 2.7.1** ... *Duas aplicações lineares $A, B : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ induzem a mesma aplicação projectiva, i.e., $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$ se e só se $A = \lambda B$ para algum escalar $\lambda \in \mathbb{k} - \{0\}$.*

– Demonstração... Se $A = \lambda B$, com $\lambda \neq 0$, então $\mathbb{P}(A)([\mathbf{v}]) = [A(\mathbf{v})] = [\lambda B(\mathbf{v})] = [B(\mathbf{v})] = \mathbb{P}(B)([\mathbf{v}])$.

Suponhamos agora que $\mathbb{P}(A) = \mathbb{P}(B)$. Então $[A(\mathbf{v})] = [B(\mathbf{v})]$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} - \{\mathbf{0}\}$ o que implica que $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} - \{\mathbf{0}\}$ existe $\lambda(\mathbf{v}) \neq 0$ tal que $B(\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{v})A(\mathbf{v})$. Vamos ver que λ de facto não depende de \mathbf{v} .

Para isso suponhamos que $\dim \mathbf{V} \geq 2$ (quando essa dimensão é 0 ou 1, a conclusão é imediata), e que $\mathbf{v}, \mathbf{w} \in \mathbf{V}$ são linearmente independentes. Então $A(\mathbf{v})$ e $A(\mathbf{w})$ são também linearmente independentes porque A é injectiva. portanto:

$$\begin{aligned} B(\mathbf{v} + \mathbf{w}) &= \lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w})A(\mathbf{v} + \mathbf{w}) \\ &\Rightarrow [\lambda(\mathbf{v}) - \lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w})]A(\mathbf{v}) + [\lambda(\mathbf{w}) - \lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w})]A(\mathbf{w}) = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow \lambda(\mathbf{v}) = \lambda(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = \lambda(\mathbf{w}), \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \text{ linearmente independentes} \\ &\Rightarrow \lambda(\mathbf{v}) \equiv \lambda \in \mathbb{k} - \{0\}, \quad \forall \mathbf{v} \in \mathbf{V} - \{\mathbf{0}\} \end{aligned}$$

■

É fácil ver que o conjunto das homografias de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ em si próprio constituem um grupo:

$$\mathbb{P}(A) \circ \mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(A \circ B), \quad (\mathbb{P}(A))^{-1} = \mathbb{P}(A^{-1})$$

que se nota por $PGL(\mathbf{V})$ e se diz o **grupo projectivo** de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Este grupo pode ser identificado com o quociente do grupo $GL(\mathbf{V})$ (o grupo linear geral de \mathbf{V}), pelo subgrupo normal das homotetias de \mathbf{V} (aplicações do tipo $\mathbf{v} \mapsto \lambda \mathbf{v}$, com $\lambda \neq 0$ fixo), subgrupo este que é isomorfo a $\mathbb{k} - \{0\}$. Portanto:

$$PGL(\mathbf{V}) \cong GL(\mathbf{V}) / \mathbb{k} - \{0\}$$

- **Exemplo 2.7.1 Homografias em \mathbb{P}^1** ... Como já vimos, existe uma bijecção entre $\mathbb{P}^1 = \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1$ e $\mathbb{k} \cup \{\infty\}$:

$$\begin{aligned} \Psi : \quad \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{k} \cup \{\infty\} \\ [x, y] &\longmapsto \frac{x}{y}, \quad \text{se } y \neq 0 \\ [1, 0] &\longmapsto \infty \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

A bijecção recíproca é dada por:

$$\begin{aligned} \Psi^{-1} : \quad \mathbb{k} \cup \{\infty\} &\longrightarrow \mathbb{P}^1 \\ X \neq \infty &\longmapsto [(X, 1)] = [x, y], \quad \text{pondo } X = x/y \text{ com } y \neq 0 \\ \infty &\longmapsto [1, 0] \end{aligned} \quad (2.7.2)$$

Um referencial projectivo para \mathbb{P}^1 é constituído, por exemplo, pelo triângulo de vértices $\{\infty, 0, 1\}$. Usaremos de seguida sempre este referencial standard.

Suponhamos que $\mathbb{P}(A) : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ é uma homografia, onde $A \in GL(2)$ é uma transformação linear inversível em \mathbb{k}^2 , determinada por $\mathbb{P}(A)$ a menos da multiplicação por um escalar não nulo. Suponhamos que a matriz de A , relativamente à base canónica de \mathbb{k}^2 , é:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad a, b, c, d \in \mathbb{k}, \quad ad - bc \neq 0$$

Note que podemos sempre supôr que $\det A = ad - bc = 1$. Portanto:

$$A(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

e, em coordenadas homogéneas, $\mathbb{P}(A)$ escreve-se na forma:

$$\mathbb{P}(A)[x, y] = [ax + by, cx + dy]$$

Finalmente, utilizando as bijecções Ψ e Ψ^{-1} atrás referidas, podemos escrever:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^1 & \xrightarrow{\mathbb{P}(A)} & \mathbb{P}^1 \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ \mathbb{k} \cup \infty & \xrightarrow{\Psi \circ \mathbb{P}(A) \circ \Psi^{-1}} & \mathbb{k} \cup \infty \end{array}$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} X \neq \infty & \xrightarrow{\Psi^{-1}} [X, 1] \xrightarrow{\mathbb{P}(A)} [aX + b, cX + d] \xrightarrow{\Psi} \frac{aX+b}{cX+d} \\ X = -\frac{d}{c}, c \neq 0 & \xrightarrow{\Psi^{-1}} \left[-\frac{d}{c}, 1\right] \xrightarrow{\mathbb{P}(A)} \left[-\frac{ad-cb}{c}, 0\right] = [1, 0] \xrightarrow{\Psi} \infty \\ X = \infty & \xrightarrow{\Psi^{-1}} [1, 0] \xrightarrow{\mathbb{P}(A)} [a, c] \xrightarrow{\Psi} \begin{cases} \frac{a}{c} & \text{se } c \neq 0 \\ \infty & \text{se } c = 0 \end{cases} \end{array} \right. \quad \text{se } X \neq -\frac{d}{c}$$

Estas expressões reúnem-se na expressão única seguinte:

$$\boxed{X \xrightarrow{\mathbb{P}(A)} \frac{aX+b}{cX+d}, \quad X \in \mathbb{k} \cup \{\infty\}, \quad ad - bc = 1} \quad (2.7.3)$$

onde identificamos (como conjuntos) $\mathbb{P}^1 = \mathbb{k} \cup \{\infty\}$ e $\mathbb{P}(A)$ com $\Psi \circ \mathbb{P}(A) \circ \Psi^{-1}$, e lembrando que $\mathbb{P}(A)\left(\frac{d}{c}\right) = \infty$, se $c \neq 0$, e $\mathbb{P}(A)(\infty) = \frac{a}{c}$, se $c \neq 0$, ou ∞ , se $c = 0$.

A expressão (2.7.3) é a expressão usual das homografias em \mathbb{P}^1 .

- **Teorema 2.7.1** ... Sejam $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\mathbb{P}(\mathbf{W})$ dois espaços projectivos com a mesma dimensão n , e sobre o mesmo corpo \mathbb{k} . Sejam V_1, V_2, \dots, V_{n+2} e W_1, W_2, \dots, W_{n+2} referenciais projectivos, respectivamente para $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\mathbb{P}(\mathbf{W})$.

Então existe uma e uma só transformação projectiva $H : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{W})$ tal que $H(V_i) = W_i$, $i = 1, 2, \dots, n + 2$.

– Demonstração... Levantemos V_1, V_2, \dots, V_{n+2} a uma base $\{\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{n+1}\}$ de \mathbf{V} , tal que $\pi(\mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_{n+1}) = V_{n+2}$ e, análogamente levantemos W_1, W_2, \dots, W_{n+2} a uma base $\{\mathbf{w}_1, \dots, \mathbf{w}_{n+1}\}$ de \mathbf{W} , tal que $\pi(\mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_{n+1}) = W_{n+2}$.

Se H existe e é da forma $H = \mathbb{P}(A)$, então cada $A(\mathbf{v}_i) \in \mathbf{W}$ deverá ser da forma $A(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{w}_i$, com $\lambda_i \neq 0$, para $i = 1, \dots, n + 1$. Como $H(V_{n+2}) = W_{n+2}$, o vector $A(\mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_{n+1})$ pode ser escrito na forma $\lambda(\mathbf{w}_1 + \dots + \mathbf{w}_{n+1})$. Mas isto implica que $\lambda_i \equiv \lambda, \forall i = 1, \dots, n + 1$, isto é, A fica determinada a menos da multiplicação por $\lambda \in \mathbb{k} - \{0\}$, isto é, $H = \mathbb{P}(A)$ fica univocamente determinada.

Por outro lado, a existência de H é clara - basta definir $H = \mathbb{P}(A)$ com $A : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ definida através de $A(\mathbf{v}_i) = \mathbf{w}_i$.

■

Suponhamos agora que \mathcal{A} e \mathcal{B} são dois espaços afins, modelados respectivamente nos espaços vectoriais \mathbf{V} e \mathbf{W} , e que $f : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é uma aplicação afim injectiva. Seja $\mathbf{L} : \mathbf{V} \rightarrow \mathbf{W}$ a respectiva parte linear. Então f induz uma transformação projectiva entre os fechos projectivos de \mathcal{A} e \mathcal{B} :

$$f^{\mathbb{P}} : \mathcal{A}^{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(\mathbf{V} \times \mathbb{k}) \longrightarrow \mathcal{B}^{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(\mathbf{W} \times \mathbb{k}) \tag{2.7.4}$$

definida através de:

$$f^{\mathbb{P}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}(\mathbf{L} \times \text{Id}_{\mathbb{k}}) \tag{2.7.5}$$

$f^{\mathbb{P}}$ prolonga f no sentido em que:

$$f^{\mathbb{P}}(j_{\mathcal{O}}(P)) = j_{f(\mathcal{O})}(f(P)), \quad \forall P \in \mathcal{A}$$

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{A} & \xrightarrow{j_{\mathcal{O}}} & \mathcal{A}^{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(\mathbf{V} \times \mathbb{k}) & & P & \longrightarrow & [(\overrightarrow{OP}, 1)] \\ f \downarrow & & \downarrow f^{\mathbb{P}} & & f \downarrow & & \downarrow f^{\mathbb{P}} \\ \mathcal{B} & \xrightarrow{j_{f(\mathcal{O})}} & \mathcal{B}^{\mathbb{P}} = \mathbb{P}(\mathbf{W} \times \mathbb{k}) & & f(P) & \longrightarrow & [(\overrightarrow{f(\mathcal{O})f(P)}, 1)] \end{array}$$

Sejam $GA(\mathcal{A})$ o grupo afim de \mathcal{A} e $PGL(\mathcal{A}^{\mathbb{P}})$ o grupo projectivo do fecho projectivo de \mathcal{A} . Então $GA(\mathcal{A})$ é isomorfo ao subgrupo de $PGL(\mathcal{A}^{\mathbb{P}})$, constituído pelas homografias que deixam globalmente invariante o hiperplano do infinito $\mathcal{H}_{\infty} = \mathbb{P}(\mathbf{V} \times \{0\}) \subset \mathcal{A}^{\mathbb{P}}$.

2.8 Dualidade Projectiva

Seja \mathbf{V} um espaço vectorial de dimensão $n + 1$, sobre um corpo \mathbb{k} , e \mathbf{V}^* o respectivo dual:

$$\mathbf{V}^* = \{\varphi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{k} : \varphi \text{ é } \mathbb{k}\text{-linear}\}$$

Representaremos por \langle , \rangle a dualidade natural:

$$\begin{aligned} \langle , \rangle : \mathbf{V} \times \mathbf{V}^* &\longrightarrow \mathbb{k} \\ (\mathbf{v}, \varphi) &\longmapsto \langle \mathbf{v}, \varphi \rangle = \varphi(\mathbf{v}) \end{aligned} \tag{2.8.1}$$

Se $S \subseteq \mathbf{V}$, $\mathcal{L}(S)$ representa o subespaço de \mathbf{V} , gerado por S , e S^\perp representa o subespaço de \mathbf{V}^* , chamado o **ortogonal (ou o anulador) de S em \mathbf{V}^*** , constituído pelas formas lineares que se anulam em S :

$$S^\perp = \{\varphi \in \mathbf{V}^* : \langle S, \varphi \rangle = 0\} \quad (2.8.2)$$

Analogamente, se $\Lambda \subseteq \mathbf{V}^*$, $\mathcal{L}(\Lambda)$ representa o subespaço de \mathbf{V}^* , gerado por Λ , e Λ^\perp , chamado o **ortogonal (ou o anulador) de Λ em \mathbf{V}** , representa o subespaço de \mathbf{V} , constituído por todos os vectores que são anulados pelas formas em Λ :

$$\Lambda^\perp \stackrel{\text{def}}{=} \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \langle \mathbf{v}, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \Lambda\} = \bigcap_{\varphi \in \Lambda} \ker \varphi \quad (2.8.3)$$

Eis algumas propriedades do operador $^\perp$:

•

<p>A. $S^\perp = \mathcal{L}(S)^\perp, \forall S \subseteq \mathbf{V}$</p> <p>B. $\dim \mathcal{L}(S) + \dim S^\perp = \dim \mathbf{V}, \forall S \subseteq \mathbf{V}$</p> <p>C. $S_1 \subseteq S_2 \Rightarrow S_1^\perp \supseteq S_2^\perp, \forall S_1, S_2 \subseteq \mathbf{V}$</p> <p>D. $(S^\perp)^\perp = S, \forall S \subseteq \mathbf{V}$</p> <p>E. $(S_1 \cap S_2)^\perp = S_1^\perp + S_2^\perp, \forall S_1, S_2 \subseteq \mathbf{V}$</p>	<p>$\Lambda^\perp = \mathcal{L}(\Lambda)^\perp, \forall \Lambda \subseteq \mathbf{V}^*$</p> <p>$\dim \mathcal{L}(\Lambda) + \dim \Lambda^\perp = \dim \mathbf{V}, \forall \Lambda \subseteq \mathbf{V}^*$</p> <p>$\Lambda_1 \subseteq \Lambda_2 \Rightarrow \Lambda_1^\perp \supseteq \Lambda_2^\perp, \forall \Lambda_1, \Lambda_2 \subseteq \mathbf{V}^*$</p> <p>$(\Lambda^\perp)^\perp = \Lambda, \forall \Lambda \subseteq \mathbf{V}^*$</p> <p>$(S_1 + S_2)^\perp = S_1^\perp \cap S_2^\perp, \forall S_1, S_2 \subseteq \mathbf{V}$</p>
---	--

(2.8.4)

- Se $\mathbf{H} \subset \mathbf{V}$ é um hiperplano vectorial, então existe uma forma linear $\varphi \in \mathbf{V}^*$, não nula, tal que $\mathbf{H} = \ker \varphi$. Além disso, se $\mathbf{H} = \ker \varphi = \ker \phi$ então $\phi = \lambda \varphi$ para algum escalar $\lambda \in \mathbb{k} - \{0\}$.
- Para que $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ seja um subespaço vectorial de codimensão p em \mathbf{V} é necessário e suficiente que existam p formas lineares $\varphi_1, \dots, \varphi_p \in \mathbf{V}^*$, linearmente independentes, tais que $\mathbf{S} = \bigcap_{i=1}^p \ker \varphi_i$.

Consideremos agora os espaços projectivos $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\mathbb{P}(\mathbf{V}^*)$, ambos de dimensão n , e representemos pela mesma letra π as projecções canónicas $\pi : \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V})$ e $\pi : \mathbf{V}^* \rightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}^*)$. Para cada subespaço $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ representamos a variedade linear correspondente em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ por $\pi(\mathbf{S})$ ou por $[\mathbf{S}]$ (e análogamente para um subespaço de \mathbf{V}^*).

Consideremos agora a aplicação \mathcal{D} definida da seguinte forma: a cada subespaço $\mathbf{S} \subset \mathbf{V}$ associamos $\mathcal{D}(\mathbf{S}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{S}^\perp \subset \mathbf{V}^*$. Esta aplicação induz então uma aplicação (que notamos ainda por \mathcal{D}):

$$\mathcal{D} : \begin{array}{ccc} \mathbf{Gr}(\mathbb{P}(\mathbf{V})) & \longrightarrow & \mathbf{Gr}(\mathbb{P}(\mathbf{V}^*)) \\ [\mathbf{S}] & \longmapsto & [\mathbf{S}^\perp] \end{array} \quad (2.8.5)$$

onde $\mathbf{Gr}(\mathbb{P}(\mathbf{V})) = \bigcup_{k=-1}^n \mathbf{Gr}_k(\mathbb{P}(\mathbf{V}))$ representa a Grassmanniana de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, constituída por todas as variedades lineares de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ (e análogamente para $\mathbf{Gr}(\mathbb{P}(\mathbf{V}^*))$). A aplicação inversa é claramente:

$$\mathcal{E} : \begin{array}{ccc} \mathbf{Gr}(\mathbb{P}(\mathbf{V}^*)) & \longrightarrow & \mathbf{Gr}(\mathbb{P}(\mathbf{V})) \\ [\Lambda] & \longmapsto & [\Lambda^\perp] \end{array} \quad (2.8.6)$$

A aplicação \mathcal{D} (e análogamente a aplicação \mathcal{E}) transforma uma variedade linear de dimensão k , em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, numa variedade linear de dimensão $n - k - 1$ em $\mathbb{P}(\mathbf{V}^*)$. De facto por (2.8.4 B.) temos que $\dim[\mathbf{S}] + \dim[\mathbf{S}^\perp] = (\dim \mathbf{S} - 1) + (\dim \mathbf{S}^\perp - 1) = \dim \mathbf{S} + \dim \mathbf{S}^\perp - 2 = \dim \mathbf{V} - 2 = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) - 1 = n - 1$. Em particular \mathcal{D} transforma cada ponto $P \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ (variedade linear de dimensão $k = 0$) num hiperplano $\mathcal{D}(P) = P^\perp \in \mathbb{P}(\mathbf{V}^*)$.

Por outro lado, atendendo a (2.8.4 C.), a aplicação \mathcal{D} (e análogamente a aplicação \mathcal{E}), inverte as inclusões. Podemos pois enunciar o seguinte:

- **Princípio de dualidade projectiva** ... “Se num enunciado relativo a relações de inclusão de variedades lineares num espaço projectivo de dimensão n , todas as variedades de dimensão k forem substituídas por variedades de dimensão $n - k - 1$, e todas as inclusões forem invertidas, obtemos um enunciado válido em $\mathbb{P}(\mathbf{V}^*)$ sse o primeiro o fôr em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ ”.

Note que os “enunciados relativos a relações de inclusão” acima referidos, também incluem os que se referem à intersecção de variedades (a maior variedade contida em todas elas) e à variedade gerada por variedades (a menor variedade que as contém todas) (ver também (2.8.4 E.)). Eis alguns exemplos:

Dualidade Projectiva no plano

Ponto	Recta
Intersecção de duas rectas	Recta que une dois pontos

Dualidade Projectiva no espaço

Ponto	Plano
Recta	Recta
Recta de intersecção de dois planos	Recta que une dois pontos
Ponto de intersecção de recta e plano	Plano gerado por ponto e recta

Associemos agora, a cada forma linear não nula $\varphi \in \mathbf{V}^* - \{0\}$, o respectivo núcleo $\ker \varphi \subset \mathbf{V}$, que é um hiperplano vectorial em \mathbf{V} . Como duas formas lineares não nulas têm o mesmo núcleo, se e só se são proporcionais, obtemos uma correspondência bijectiva entre o espaço projectivo $\mathbb{P}(\mathbf{V}^*)$ e o conjunto $\mathbf{Gr}_{n-1}(\mathbf{V})$, de todos os hiperplanos (vectoriais) em \mathbf{V} , (ou o conjunto $\mathbf{Gr}_{n-1}(\mathbb{P}(\mathbf{V}))$, de todos os hiperplanos em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$). Podemos pois identificar esses três conjuntos:

$$\mathbb{P}(\mathbf{V}^*) \cong \mathbf{Gr}_{n-1}(\mathbf{V}) \cong \mathbf{Gr}_{n-1}(\mathbb{P}(\mathbf{V})) \quad (2.8.7)$$

$$[\varphi] \longleftrightarrow \ker \varphi \longleftrightarrow [\ker \varphi]$$

Uma variedade linear projectiva \mathcal{S} em $\mathbb{P}(\mathbf{V}^*) \cong \mathbf{Gr}_{n-1}(\mathbb{P}(\mathbf{V}))$ diz-se um **sistema linear de hiperplanos** em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Quando $\dim \mathcal{S} = 1$ (resp., $\dim \mathcal{S} = 2$), \mathcal{S} diz-se um **feixe** (resp., uma **rede** (linear) de hiperplanos) em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$.

- **Proposição 2.8.1** ... Seja $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}(\mathbf{V}^*) \cong \mathbf{Gr}_{n-1}(\mathbb{P}(\mathbf{V}))$ um sistema linear de hiperplanos em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Então existe uma variedade linear projectiva $\mathcal{B}(\mathcal{S})$, em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, que se diz a **base de \mathcal{S}** , tal que \mathcal{S} é o conjunto dos hiperplanos de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ que contêm $\mathcal{B}(\mathcal{S})$. Além disso:

$$\dim \mathcal{B}(\mathcal{S}) = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) - \dim \mathcal{S} - 1 \quad (2.8.8)$$

- **Demonstração...** ... Suponhamos que $\mathcal{S} = \pi(\Lambda) = [\Lambda]$, onde $\Lambda \subset \mathbf{V}^*$. Λ é um subespaço de \mathbf{V}^* com $\dim \Lambda = \dim \mathcal{S} + 1$. Consideremos agora o anulador de Λ em \mathbf{V} :

$$\Lambda^\perp = \{\mathbf{v} \in \mathbf{V} : \langle \mathbf{v}, \varphi \rangle = 0, \forall \varphi \in \Lambda\} = \bigcap_{\varphi \in \Lambda} \ker \varphi$$

e tomemos:

$$\mathcal{B}(\mathcal{S}) = \pi(\Lambda^\perp) = [\Lambda^\perp]$$

É fácil ver que $\mathcal{B}(\mathcal{S})$ satisfaz a propriedade referida. Como $\dim \Lambda + \dim \Lambda^\perp = \dim \mathbf{V}$, por (2.8.4 B.), vem que $\dim \mathcal{B}(\mathcal{S}) + \dim \mathcal{S} = (\dim \Lambda^\perp - 1) + (\dim \Lambda - 1) = \dim \mathbf{V} - 2 = \dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) - 1$, o que prova (2.8.8). ■

Vejamos alguns exemplos.

- **Exemplo 2.8.1** ... Suponhamos que $\mathbf{V} = \mathbb{k}^3$, de tal forma que $\mathbb{P}(\mathbf{V}) = \mathbb{P}^2$ é o plano projectivo (real ou complexo). Sejam $[x, y, z]$ coordenadas homogêneas, para \mathbb{P}^2 , relativas a uma base de \mathbf{V} , e $[u, v, w]$ coordenadas homogêneas, para $(\mathbb{P}^2)^*$, relativas à base dual de \mathbf{V}^* . Os planos \mathbb{P}^2 e $(\mathbb{P}^2)^*$ dizem-se duais um do outro.

A cada ponto $P = [\mathbf{v}] \in \mathbb{P}^2$ podemos associar uma recta projectiva $\mathcal{D}(P)$, no plano dual $(\mathbb{P}^2)^*$, dada por:

$$\mathcal{D}(P) = [\mathbf{v}^\perp]$$

onde $\mathbf{v}^\perp = \{\varphi \in \mathbf{V}^* : \varphi(\mathbf{v}) = 0\}$ é o hiperplano de dimensão 2, em \mathbf{V} , constituído pelas formas lineares que se anulam em \mathbf{v} .

Como em (2.8.7), identifiquemos $(\mathbb{P}^2)^*$ com $\mathbf{Gr}_1(\mathbb{P}^2)$ (o conjunto de todas as rectas projectivas de \mathbb{P}^2), através de $[\varphi] \longleftrightarrow [\ker \varphi]$. Vemos então que $\mathcal{D}(P)$ é uma recta de rectas (hiperplanos) em \mathbb{P}^2 . A cada ponto desta recta $P^* = [\varphi] \in \mathcal{D}(P)$, corresponde uma recta em \mathbb{P}^2 , dada por $[\ker \varphi]$. Temos então o que se chama um **feixe de rectas** em \mathbb{P}^2 , todas passando pelo ponto P .

Assim, por exemplo, ao ponto $P = [1, -3, 2] \in \mathbb{P}^2$, corresponde a recta $\mathcal{D}(P)$ em $(\mathbb{P}^2)^*$, de equação $u - 3v + 2w = 0$. A cada ponto $P^* = [u, v, w]$ desta recta, está associada uma recta em \mathbb{P}^2 , de equação $ux + vy + wz = 0$. A equação:

$$u - 3v + 2w = 0$$

diz que todas estas rectas (obtidas fazendo variar $P^* = [u, v, w]$), passam pelo ponto $P = [1, -3, 2]$ (ver a figura 2.4).

Podemos pois completar os quadros de dualidade usando a identificação (2.8.7). No plano:

Ponto	Recta	Feixe de rectas ou o seu ponto base
-------	-------	-------------------------------------

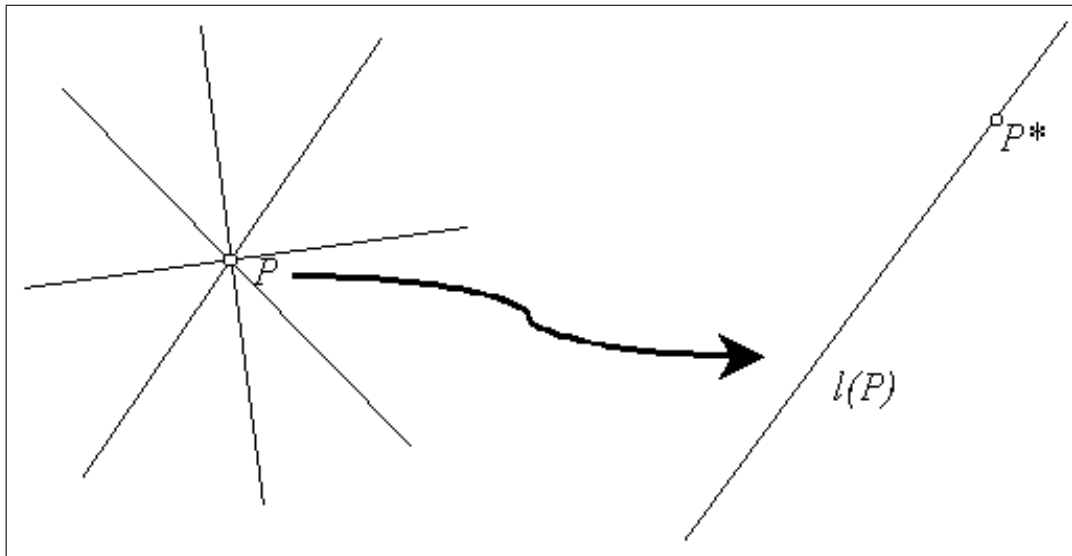


Figure 2.4: Dualidade projectiva no plano.

e no espaço:

Ponto	Plano	Rede de planos ou o seu ponto base
Recta	Recta	Feixe de planos ou a sua recta base

Generalizando o exemplo anterior, chamaremos a uma recta projectiva Δ em $\mathbb{P}(\mathbf{V}^*)$, um **feixe de hiperplanos** em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ (um feixe de rectas quando $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = 2$, um feixe de planos quando $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = 3$, etc....).

Pela proposição anterior, uma recta Δ em $\mathbb{P}(\mathbf{V}^*)$, é um **feixe de hiperplanos** em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, se e só se, existe uma variedade linear projectiva $\mathcal{B}(\Delta)$ de codimensão 2 em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, chamado a **base do feixe**, tal que Δ é exactamente constituído pelos hiperplanos que contêm $\mathcal{B}(\Delta)$:

$$\Delta = \{ \mathcal{H} \in \mathbf{Gr}_{n-1}(\mathbb{P}(\mathbf{V})) : \mathcal{H} \supset \mathcal{B}(\Delta) \}$$

Com efeito, Δ é uma recta em $\mathbb{P}(\mathbf{V}^*)$ se e só se $\tilde{\Delta} = \{ \mathbf{0} \} \cup \pi^{-1}(\Delta)$ é um subespaço de dimensão 2 em \mathbf{V}^* . Pômos então:

$$\mathcal{B}(\Delta) = [\tilde{\Delta}^\perp] = \left[\bigcap_{\varphi \in \tilde{\Delta}} \ker \varphi \right]$$

e é claro que $\mathcal{B}(\Delta)$ tem codimensão 2 em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ e os hiperplanos que correspondem aos elementos de Δ são os que contêm $\mathcal{B}(\Delta)$.

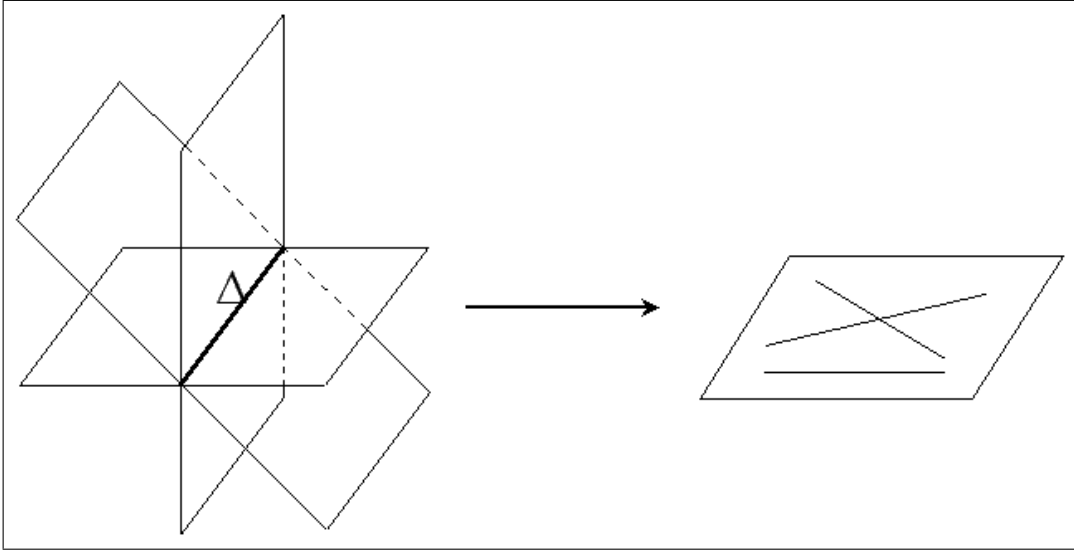


Figure 2.5: Dualidade projectiva no espaço.

Quando $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = 2$, temos um feixe de rectas que se intersectam todas no ponto base do feixe. Quando $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = 3$, temos um feixe de planos que se intersectam todos na recta base do feixe.

Quando $\dim \mathbb{P}(\mathbf{V}) = 3$, uma rede de planos (isto é, um plano em $\mathbb{P}(\mathbf{V}^*)$), consiste de todos os planos que contêm um ponto fixo - a base da rede. Mais concretamente, a um ponto $P = [\mathbf{v}] \in (\mathbb{P}(\mathbf{V}))$ corresponde um plano em $\mathbb{P}(\mathbf{V}^*)$, o plano $\Pi = \pi(\mathbf{v}^\perp)$. O plano Π diz-se uma **rede linear** de planos em \mathbb{P}^3 e consiste de todos os planos $\ker \varphi$, com $[\varphi] \in \Pi$. A base desta rede é $\mathcal{B}(\Pi) = \bigcap_{\varphi \in \Pi} \ker \varphi = \{P\}$. Isto é, Π é constituído por todos os planos que contêm o ponto P .

Assim, se por exemplo, $P = [1, 3, -2, -1] \in \mathbb{P}^3$, então Π é o plano de $(\mathbb{P}^3)^*$, dado pela equação $u + 3v - 2w - r = 0$, em $(\mathbb{P}^3)^*$. Cada solução desta equação, isto é, cada ponto $[u, v, w, r] \in \Pi$ é uma classe de proporcionalidade de formas lineares, e, a cada uma corresponde um plano de \mathbb{P}^3 , dado pelo respectivo núcleo, que é definido pela equação $ux + vy + wz + rt = 0$. A equação $u + 3v - 2w - r = 0$, diz que todos estes planos passam pelo ponto $P = [1, 3, -2, -1] \in \mathbb{P}^3$. Por isso, por vezes, a equação $u + 3v - 2w - r = 0$ diz-se a **equação tangencial** do ponto P .

2.9 Polaridade

Seja \mathbf{V} um espaço vectorial de dimensão n sobre um corpo $\mathbb{k} = \mathbb{R}$ ou \mathbb{C} , e q uma forma quadrática não degenerada com forma polar β , isto é, $q(\mathbf{v}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{v})$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbf{V}$. Como β é uma forma bilinear simétrica não degenerada podemos definir um isomorfismo:

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbf{V} &\longrightarrow \mathbf{V}^* \\ \mathbf{v} &\longmapsto \left(\begin{array}{l} \varphi_{\mathbf{v}} : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbb{k} \\ \mathbf{w} \longmapsto \varphi_{\mathbf{v}}(\mathbf{w}) = \beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \end{array} \right) \end{aligned} \quad (2.9.1)$$

que, por sua vez, induz uma homografia:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varphi) : \mathbb{P}(\mathbf{V}) &\longrightarrow \mathbb{P}(\mathbf{V}^*) \\ [\mathbf{v}] &\longmapsto [\varphi_{\mathbf{v}}] \end{aligned} \quad (2.9.2)$$

Recordemos agora que em (2.8.7), identificamos $\mathbb{P}(\mathbf{V}^*)$ com $\mathbf{Gr}_{n-1}(\mathbb{P}(\mathbf{V}))$, o conjunto de todos os hiperplanos projectivos em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Portanto fica definido um isomorfismo:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\varphi) : \mathbb{P}(\mathbf{V}) &\longrightarrow \mathbf{Gr}_{n-1}(\mathbb{P}(\mathbf{V})) \\ [\mathbf{v}] &\longmapsto [\ker \varphi_{\mathbf{v}}] \end{aligned} \quad (2.9.3)$$

que se diz a **polaridade** relativamente à quádriga (própria) $\mathbf{Q} = [q^{-1}(0)] \subset \mathbb{P}(\mathbf{V})$. Se $P = [\mathbf{v}] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ é um ponto, ao hiperplano $H_P = [\ker \varphi_{\mathbf{v}}]$ chama-se o **hiperplano polar** do ponto P .

Dois pontos $P = [\mathbf{v}], Q = [\mathbf{w}] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$ dizem-se **conjugados** relativamente a \mathbf{Q} , se $\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = 0$. Notamos este facto por $P \perp Q$. Se $S \subset \mathbb{P}(\mathbf{V})$, define-se a **polar** de S , através de:

$$S^\circ = \{P \in \mathbb{P}(\mathbf{V}) : P \perp Q, \forall Q \in S\} \quad (2.9.4)$$

Quando H é um hiperplano, H° diz-se o pólo de H .

- **Exemplo 2.9.1** ... Em \mathbb{P}^2 consideremos a cónica $\mathbf{Q} : x^2 + y^2 + z^2 = 0$, cuja forma polar é:

$$\beta((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + yy' + zz'$$

A polaridade relativamente à cónica \mathbf{Q} é a dualidade tratada na secção 2.8.

- **Exemplo 2.9.2** ... Em \mathbb{P}^2 consideremos a cónica $\mathbf{Q} : x^2 + y^2 - z^2 = 0$ (circunferência de centro 0 e raio 1), cuja forma polar é $\beta((x, y, z), (x', y', z')) = xx' + yy' - zz'$. A recta polar P° , de um ponto $P = [a, b, c] \in \mathbb{P}^2$, é definida por:

$$P^\circ = \{Q = [x, y, z] \in \mathbb{P}^2 : ax + by - cz = 0\}$$

Em coordenadas afins $X = \frac{x}{z}, Y = \frac{y}{z}$, a cónica \mathbf{Q} tem por equação $X^2 + Y^2 = 1$, e, supondo que o ponto P está a “distância finita”, i.e., que $c \neq 0$, então as coordenadas afins de P são $(a' = a/c, b' = b/c)$. A recta polar P° é a recta afim dada por:

$$a'X + b'Y = 1$$

Suponhamos que $\dim \mathbf{V} = n$, fixemos uma base para \mathbf{V} , e sejam $[x^1, \dots, x^n]$ coordenadas homogéneas relativas a essa base. Consideremos agora a cónica $\mathbf{Q} = \{[\mathbf{v}] \in \mathbb{P}(\mathbf{V}) : q(\mathbf{v}) = q(x^1, \dots, x^n) = 0\}$, onde q é homogéneo de segundo grau.

A forma polar β de q é unívocamente determinada pela identidade de polarização seguinte:

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} (q(\mathbf{v} + \mathbf{w}) - q(\mathbf{v}) - q(\mathbf{w})) \quad (2.9.5)$$

É fácil ver que β também pode ser obtida através de:

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \frac{1}{2} \mathbf{w} \cdot \nabla q(\mathbf{v}) = \frac{1}{2} \mathbf{v} \cdot \nabla q(\mathbf{w}) \quad (2.9.6)$$

Se $\mathbf{v} = (v^i)$ e $\mathbf{w} = (w^i)$, então:

$$\beta(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \beta(v^i, w^i) = \frac{1}{2} w^i \frac{\partial q}{\partial v^i} = \frac{1}{2} v^i \frac{\partial q}{\partial w^i}$$

Em particular, dois pontos $P = [\mathbf{v}] = [v^i]$ e $Q = [\mathbf{w}] = [w^i]$ são conjugados relativamente à quádrica \mathbf{Q} quando:

$$w^i \frac{\partial q}{\partial v^i} = v^i \frac{\partial q}{\partial w^i} = 0$$

enquanto que o hiperplano polar de um ponto fixo $P = [\mathbf{v}] = [v^i]$ é definido pela equação:

$$\sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial q}{\partial v^i} = 0$$

Quando o ponto $P = [\mathbf{v}] = [v^i]$ pertence à quádrica \mathbf{Q} , isto é, quando $q(v^i) = 0$, o hiperplano polar de P é definido pela equação $\sum_{i=1}^n x^i \frac{\partial q}{\partial v^i} = \mathbf{x} \cdot \nabla q(\mathbf{v}) = 0$, que é exactamente a equação do **hiperplano tangente à quádrica \mathbf{Q} em P** .

• Relação vectorial - projectivo (continuação)...

Cone isotrópico, relativo a uma forma bilinear β não degenerada de assinatura diferente de $(n, 0)$ ou $(0, n)$	(Hiper) quádrica projectiva \mathbf{Q} não degenerada de codimensão 1
Rectas β -ortogonais	Pontos conjugados relativamente a \mathbf{Q}
Hiperplano β -ortogonal a uma recta	Hiperplano polar de um ponto relativamente à quádrica \mathbf{Q}
Recta β -ortogonal a um hiperplano	Pólo de um hiperplano (relativamente a \mathbf{Q})
Subespaço β -isotrópico	Variedade linear projectiva tangente a \mathbf{Q}
Subespaço β -totalmente isotrópico	Variedade linear projectiva contida em \mathbf{Q}

2.10 Geração das quádricas em \mathbb{P}^3 . O Regulus

Suponhamos agora que $\dim \mathbf{V} = 4$ e que q é uma forma quadrática neutra, isto é, q é não degenerada e em algum sistema de coordenadas x, y, z, t , para \mathbf{V} , q tem a forma:

$$xy = zt \quad (2.10.1)$$

Por exemplo, se $\mathbf{k} = \mathbb{C}$, então toda a forma quadrática não degenerada pode ser posta na forma:

$$X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 0$$

Esta equação pode escrever-se ainda na forma:

$$(X - iY)(X + iY) = (Z + iT)(-Z + iT)$$

e, pondo $x = X - iY, y = X + iY, z = Z + iT$ e $t = -Z + iT$, obtemos a representação (2.10.1). Quando $\mathbb{k} = \mathbb{R}$, toda a forma quadrática não degenerada pode ser posta numa das seguintes três formas:

$$\begin{aligned} (I)... & \quad X^2 + Y^2 + Z^2 + T^2 = 0 \\ (II)... & \quad X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2 = 0 \\ (III)... & \quad X^2 + Y^2 - Z^2 - T^2 = 0 \end{aligned} \tag{2.10.2}$$

Apenas a forma (III) é neutra. Pode ser escrita na forma:

$$(X - Z)(X + Z) = (-Y + T)(Y + T)$$

e, pondo $x = X - Z, y = X + Z, z = -Y - T$ e $t = Y + T$, obtemos a representação (2.10.1).

Observemos agora que (x, y, z, t) verificam a equação $xy = zt$ se e só se existe um escalar $\lambda \in \mathbb{k}$ tal que:

$$\begin{cases} x = \lambda z \\ t = \lambda y \end{cases} \tag{2.10.3}$$

ou um escalar $\mu \in \mathbb{k}$ tal que:

$$\begin{cases} x = \mu t \\ z = \mu y \end{cases} \tag{2.10.4}$$

Os planos em \mathbf{V} , definidos por (2.10.3) ou (2.10.4), são totalmente isotrópicos relativamente a q , e projectam-se pois em rectas totalmente contidas na quádrica \mathbf{Q} . Como λ e μ são arbitrários, obtemos duas famílias a um parâmetro de rectas contidas em \mathbf{Q} , chamadas os **sistemas de geratrizes rectilíneas de \mathbf{Q}** . Designaremos esses sistemas por (λ) -sistema e (μ) -sistema, dados respectivamente por (2.10.3) e (2.10.4) (ver a figura 2.6).

Eis algumas propriedades:

- *Qualquer recta contida em \mathbf{Q} pertence a um e um só dos dois sistemas de geratrizes rectilíneas.*

Consideremos uma recta ℓ de representação paramétrica:

$$x = au + a', \quad y = bu + b', \quad z = cu + c', \quad t = du + d'$$

e suponhamos que ela está contida na quádrica \mathbf{Q} , isto é, que $xy = zt$:

$$(au + a')(bu + b') = (cu + c')(du + d')$$

Podemos supôr que $y \neq 0$. De facto, se ℓ pertence ao plano $y = 0$ (e a \mathbf{Q}), então ℓ pertence a $z = 0$ ou a $t = 0$, e portanto será dada por (2.10.3) ou por (2.10.4). Portanto devemos ter $\forall u$:

$$\frac{au + a'}{cu + c'} = \frac{du + d'}{bu + b'} \equiv \lambda$$

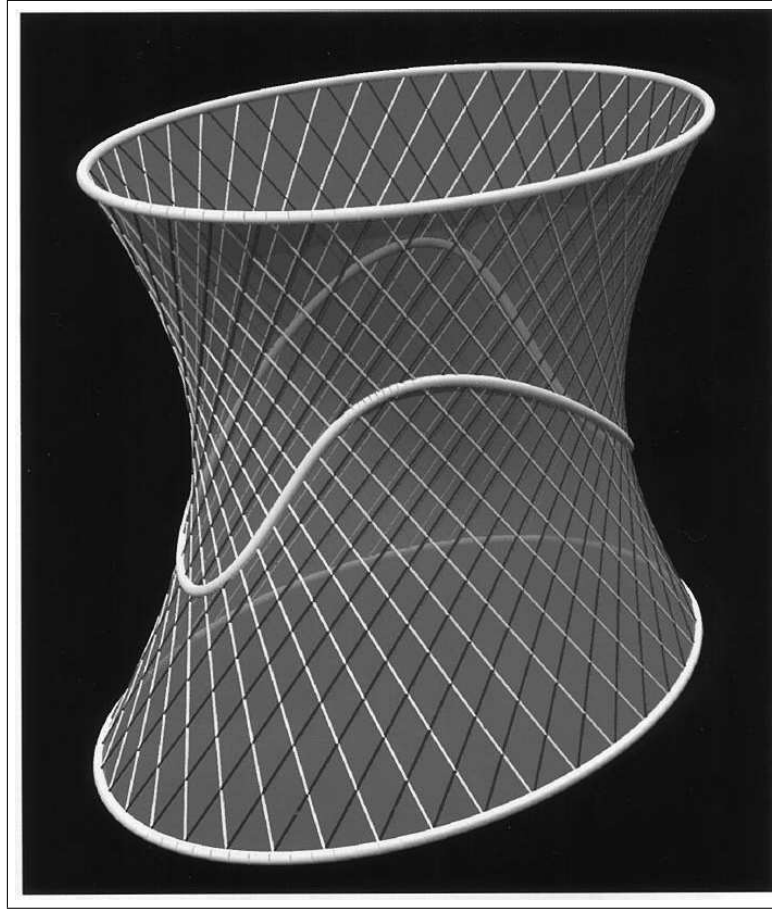


Figure 2.6: .

ou:

$$\frac{a u + a'}{d u + d'} = \frac{c u + c'}{b u + b'} \equiv \mu$$

onde λ e μ são constantes. Daqui se deduz que:

$$\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'} = \frac{d}{b} = \frac{d'}{b'} \equiv \lambda$$

ou:

$$\frac{a}{d} = \frac{a'}{d'} = \frac{c}{b} = \frac{c'}{b'} \equiv \mu$$

o que define apenas dois sistemas de geratrizes rectilíneas, que são os que já foram referidos.

- *Duas geratrizes de um mesmo sistema não podem intersectar-se.*

Suponhamos, por exemplo, que $\ell(\lambda)$ e $\ell(\lambda')$ são duas geratrizes do (λ) -sistema, de tal forma que $\ell(\lambda) : \begin{cases} x = \lambda z \\ t = \lambda y \end{cases}$ e $\ell(\lambda') : \begin{cases} x = \lambda' z \\ t = \lambda' y \end{cases}$. Então, se $\lambda \neq \lambda'$, a única solução deste sistema é $x = y = z = t = 0$ e portanto $\ell(\lambda) \cap \ell(\lambda') = \emptyset$.

- Duas geratrizes quaisquer de dois sistemas distintos intersectam-se num único ponto de \mathbf{Q} .

Suponhamos, por exemplo, que ℓ e m são duas geratrizes, respectivamente do (λ) -sistema e do (μ) -sistema, de tal forma que $\ell(\lambda) : \begin{cases} x = \lambda z \\ t = \lambda y \end{cases}$ e $m(\mu) : \begin{cases} x = \mu t \\ z = \mu y \end{cases}$. Então a intersecção $\ell \cap m$ é dada pelos pontos que satisfazem as 4 equações anteriores, ou de forma equivalente, que satisfazem:

$$\begin{cases} x = \lambda\mu y \\ t = \lambda y \\ z = \mu y \end{cases}$$

Como as coordenadas são homogéneas, podemos tomar $y = 1$, e portanto o ponto de intersecção é único, e é dado por:

$$P(\lambda, \mu) = \ell(\lambda) \cap m(\mu) = [\lambda\mu, 1, \mu, \lambda] \quad (2.10.5)$$

que evidentemente pertence a \mathbf{Q} .

A representação (2.10.5) é uma representação paramétrica bijectiva de \mathbf{Q} :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1 \times \mathbb{P}_{\mathbb{k}}^1 &\longrightarrow \mathbf{Q} \\ (\lambda, \mu) &\longmapsto P(\lambda, \mu) = \ell(\lambda) \cap m(\mu) = [\lambda\mu, 1, \mu, \lambda] \end{aligned} \quad (2.10.6)$$

A todo o ponto (λ, μ) corresponde um único ponto de \mathbf{Q} e, recíprocamente, a todo o ponto $[x, y, z, t]$ de \mathbf{Q} corresponde um único par de valores (λ, μ) dados por (2.10.3) e (2.10.4). Portanto *por um ponto qualquer de \mathbf{Q} passa uma única geratriz de cada sistema*.

- O plano gerado pela λ -geratriz $\ell(\lambda)$ e a μ -geratriz $m(\mu)$, que se intersectam no ponto $P(\lambda, \mu) \in \mathbf{Q}$, dado por (2.10.5), tem por equação:

$$x + \lambda\mu y - \lambda z - \mu t = 0$$

e coincide com o plano tangente a \mathbf{Q} , nesse ponto P .

De facto, um plano qualquer do feixe de planos que contem a geratriz $\ell(\lambda)$, dada por (2.10.3), tem por equação:

$$(x - \lambda z) + \rho(t - \lambda y) = 0$$

Determinemos ρ , forçando a que este plano contenha a geratriz $m(\mu)$, dada por (2.10.4). Mas $(x - \lambda z) + \rho(t - \lambda y) = (x + \rho t) - \lambda(z + \rho y)$, e, por outro lado, como o feixe de planos que contém a geratriz $m(\mu)$, dada por (2.10.4), tem por equação $(x - \mu t) - \lambda(z - \mu y)$, comparando, vemos que $\rho = -\mu$. Portanto o plano que contém as duas geratrizes referidas, tem por equação: $(x - \lambda z) - \mu(t - \lambda y) = 0$, ou:

$$x + \lambda\mu y - \lambda z - \mu t = 0$$

e é claro que ele coincide com o plano tangente a \mathbf{Q} , nesse ponto P , por ser gerado pelas tangentes a duas curvas em \mathbf{Q} (as duas geratrizes que passam em P).

- Sejam $\{\ell_i\}_{i=1,2,3,4}$ quatro geratrizes do (λ) -sistema. Então a razão anarmónica dos quatro pontos de intersecção $\{\ell_i \cap m\}$ não depende da geratriz m do (μ) -sistema. Essa razão chama-se a **razão anarmónica das quatro geratrizes** $\{\ell_i(\lambda)\}_{i=1,2,3,4}$ e nota-se por $[\ell_i]$.

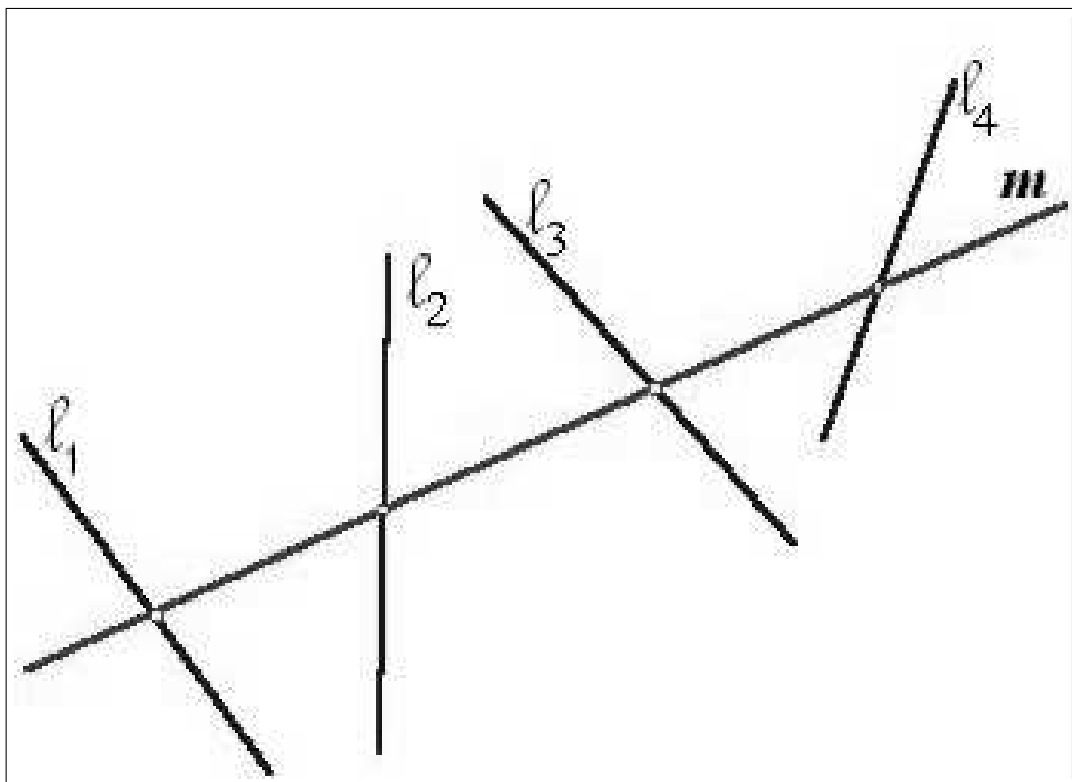


Figure 2.7:

Com efeito, fixemos uma μ -geratriz m_o e designemos por $\pi_i = \pi(m_o, \ell_i)$ os quatro planos do feixe de suporte m_o , gerados respectivamente por m_o e cada uma das geratrizes ℓ_i . A razão anarmónica dos quatro planos π é, como se sabe, igual à razão anarmónica dos quatro pontos de intersecção com uma transversal qualquer a esses quatro planos. Assim, como $\pi_i \cap m = \ell_i \cap m$, para toda a μ -geratriz m , vem que $[\ell_i \cap m] = [\pi_i]$, razão que é portanto independente de m .

É claro que na proposição anterior podemos permutar os papéis de λ e μ .

- Se no enunciado anterior, fazemos tender a geratriz variável m , para a geratriz fixa m_o , obtemos o seguinte: “A razão anarmónica de quatro planos tangentes à quádrica \mathbf{Q} em quatro pontos de uma geratriz, é igual à razão anarmónica dos quatro pontos de contacto”. Portanto, ao longo de uma geratriz, a distribuição dos planos tangentes está ligada à dos seus pontos de contacto, através da lei de Chasles.

Sejam ℓ e m duas rectas em \mathbb{P}^3 , que não se intersectam, e suponhamos que são dados dois feixes de planos, de eixos respectivamente ℓ e m , que estão homográficamente

relacionados entre si. Neste caso, os planos correspondentes de cada um dos feixes, intersectam-se segundo uma recta, e o conjunto das rectas assim obtidas diz-se um **regulus**, e nota-se por \mathfrak{R} .

Notas:

- Como $\ell \cap m = \emptyset$, os planos correspondentes de cada um dos feixes nunca coincidem e portanto as linhas do regulus estão bem determinadas.
- O regulus \mathfrak{R} pode também ser descrito como o conjunto das rectas que unem os pontos homográficamente relacionados, respectivamente de ℓ e m . De facto, os planos do feixe de eixo m intersectam a recta ℓ , e os planos do feixe de eixo ℓ intersectam a recta m , e os pontos de intersecção assim obtidos, respectivamente em ℓ e em m , estão homográficamente relacionados.

Isto mostra que o regulus \mathfrak{R} é uma figura auto-dual em \mathbb{P}^3 , uma vez que, em \mathbb{P}^3 , o dual das linhas de intersecção dos planos correspondentes de dois feixes homográficamente relacionados, é o conjunto das linhas que unem pontos correspondentes de duas rectas homográficamente relacionadas.

Suponhamos agora que a linha ℓ é dada pela intersecção dos dois planos $\ell = [\ker \alpha_1] \cap [\ker \alpha_2]$, e que a linha m é dada pela intersecção dos dois planos $m = [\ker \beta_1] \cap [\ker \beta_2]$, onde os α 's e β 's são formas lineares em \mathbf{V} :

$$\ell : \begin{cases} \alpha_1 = 0 \\ \alpha_2 = 0 \end{cases} \quad m : \begin{cases} \beta_1 = 0 \\ \beta_2 = 0 \end{cases} \quad (2.10.7)$$

Podemos sempre supôr que os planos correspondentes dos dois feixes homográficamente relacionados, de eixos respectivamente ℓ e m , são dados pelas equações:

$$\begin{cases} \alpha_\lambda & \stackrel{\text{def}}{=} & \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 = 0 \\ \beta_\lambda & \stackrel{\text{def}}{=} & \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2 = 0 \end{cases} \quad (2.10.8)$$

Como as rectas ℓ e m não se intersectam, os quatro planos $\alpha_1 = 0, \alpha_2 = 0, \beta_1 = 0$ e $\beta_2 = 0$, não têm ponto comum e são, por isso, linearmente independentes. Os planos $\alpha_\lambda = 0$ e $\beta_\lambda = 0$ intersectam-se numa recta \mathfrak{r}_λ que descreve o regulus \mathfrak{R} , quando $\lambda_1 : \lambda_2$ varia. Cada linha do regulus corresponde de facto a um único valor de $\lambda_1 : \lambda_2$. Por outro lado, a linha \mathfrak{r}_λ também pertence ao plano:

$$\begin{aligned} \mu_1 \alpha_\lambda + \mu_2 \beta_\lambda &= \mu_1 (\lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2) + \mu_2 (\lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2) \\ &= \lambda_1 (\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \beta_1) + \lambda_2 (\mu_1 \alpha_2 + \mu_2 \beta_2) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.10.9)$$

$\forall (\mu_1, \mu_2) \neq (0, 0)$. Para cada $\mu_1 : \mu_2$ fixo, e quando $\lambda_1 : \lambda_2$ varia, este plano descreve um feixe de eixo \mathfrak{m}_μ , dado pelas equações:

$$\mathfrak{m}_\mu : \begin{cases} \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \beta_1 = 0 \\ \mu_1 \alpha_2 + \mu_2 \beta_2 = 0 \end{cases} \quad (2.10.10)$$

Este feixe de eixo \mathbf{m}_μ , está homograficamente relacionado com os feixes de eixos, respectivamente, ℓ e m , com os quais começamos, e planos correspondentes contêm \mathbf{r}_λ , isto é, eles intersectam-se numa recta do regulus \mathfrak{R} . Note que as linhas ℓ e m inicialmente dadas, são casos particulares das linhas \mathbf{m}_μ , correspondentes a $(\mu_1, \mu_2) = (1, 0)$ e $(\mu_1, \mu_2) = (0, 1)$, respectivamente.

Agora, quando $\mu_1 : \mu_2$ varia, os dois planos $\mu_1\alpha_1 + \mu_2\beta_1 = 0$ e $\mu_1\alpha_2 + \mu_2\beta_2 = 0$ descrevem feixes homograficamente relacionados, e planos correspondentes intersectam-se nas linhas \mathbf{m}_μ . Os eixos destes feixes são dados por $\alpha_1 = 0 = \beta_1$ e $\alpha_2 = 0 = \beta_2$, e não se intersectam já que, como já vimos, os 4 planos envolvidos são linearmente independentes. Além disso, a linha \mathbf{m}_μ está no plano $\mu_1\alpha_\lambda + \mu_2\beta_\lambda = 0$, que, quando $\mu_1 : \mu_2$ varia, descreve o feixe de eixo \mathbf{r}_λ , e todos os feixes assim obtidos, correspondentes aos diversos valores de $\lambda_1 : \lambda_2$, estão homograficamente relacionados. Portanto as linhas \mathbf{m}_μ descrevem um segundo regulus \mathfrak{M} , e a relação entre os dois regulus \mathfrak{R} e \mathfrak{M} é simétrica. As linhas de cada um dos regulus são os eixos de feixes de planos homograficamente relacionados, cujos planos correspondentes se intersectam segundo as linhas do outro regulus. Dois tais regulus dizem-se **regulus complementares**.

Note que ambos os conjuntos de linhas pertencem à superfície:

$$\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1 = 0 \tag{2.10.11}$$

como se vê imediatamente, eliminando $\lambda_1 : \lambda_2$ em $\alpha_\lambda = 0 = \beta_\lambda$, ou $\mu_1 : \mu_2$ em $\mu_1\alpha_1 + \mu_2\beta_1 = 0 = \mu_1\alpha_2 + \mu_2\beta_2$. É claro que esta superfície é uma quádrlica neutra, que se diz o **suporte** dos regulus complementares \mathfrak{R} e \mathfrak{M} .

Suponhamos agora que ℓ, m e n são três rectas em \mathbb{P}^3 que não se intersectam duas a duas. Vamos mostrar que elas determinam um único regulus.

Por cada ponto $N \in n$ passa uma única transversal \overline{NML} às linhas m e ℓ , que intersecta m em M e ℓ em L . Esta transversal é a intersecção dos planos $N \vee m$ e $N \vee \ell$. Quando N varia em n , os feixes de planos $\{N \vee m\}$ e $\{N \vee \ell\}$ estão homograficamente relacionados e, portanto, o conjunto das transversais $\{\overline{NML}\}$ forma um regulus. O regulus complementar contém as rectas ℓ, m e n . Como o conjunto das transversais a ℓ, m e n está unívocamente definido, e formam um regulus, o regulus complementar também está unívocamente definido e contém as rectas ℓ, m e n . Portanto *um regulus fica unívocamente definido por três rectas em \mathbb{P}^3 que não se intersectam duas a duas*.

2.11 Correlações Involutivas

Seja \mathbf{V} um espaço vectorial de dimensão $n = 4$ sobre um corpo $\mathbb{k}(= \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C})$, e:

$$\varphi : \mathbf{V} \longrightarrow \mathbf{V}^*$$

um isomorfismo linear. φ induz uma homografia:

$$\mathbb{P}(\varphi) : \begin{array}{ccc} \mathbb{P}(\mathbf{V}) & \longrightarrow & \mathbb{P}(\mathbf{V}^*) \\ [\mathbf{x}] & \longmapsto & [\varphi_{\mathbf{x}}] \end{array} \tag{2.11.1}$$

Recordemos agora que em (2.8.7), identificamos $\mathbb{P}(\mathbf{V}^*)$ com $\mathbf{Gr}_2(\mathbb{P}(\mathbf{V}))$, o conjunto de todos os (hiper)planos em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Portanto fica definida uma bijecção:

$$C(\varphi) : \mathbb{P}(\mathbf{V}) \longrightarrow \mathbf{Gr}_2(\mathbb{P}(\mathbf{V}))$$

$$[\mathbf{x}] \longmapsto [\ker \varphi_{\mathbf{x}}] \quad (2.11.2)$$

que se diz a **correlação** associada ao isomorfismo φ . Assim, a correlação $C(\varphi)$ associa o plano $\pi_P = [\ker \varphi_{\mathbf{x}}]$, em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, a cada ponto $P = [\mathbf{x}] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$. O ponto P e o plano π_P dizem-se **correlativos** (relativamente a $C(\varphi)$).

Fixemos uma base $\{\mathbf{e}_i\}$ em \mathbf{V} , seja $\{\mathbf{e}^i\}$ a respectiva base dual para \mathbf{V}^* , e sejam $[x^i]$ as correspondentes coordenadas homogéneas em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Relativamente a essas bases, as componentes de φ serão $\varphi_{ij} = \varphi_{\mathbf{e}_i}(\mathbf{e}_j)$, onde $\det \varphi_{ij} \neq 0$. Se $P = [\mathbf{x}] = [x^i] \in \mathbb{P}(\mathbf{V})$, então a forma linear $\varphi_{\mathbf{x}} \in \mathbf{V}^*$ é dada por $\varphi_{\mathbf{x}} = u_j \mathbf{e}^j$, onde $u_j = \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{e}_j) = \varphi_{x^i \mathbf{e}_i}(\mathbf{e}_j) = x^i \varphi_{ij}$. Portanto o plano π_P é dado pela equação $x^i \varphi_{ij} y^j = 0$, onde y^j são as coordenadas correntes de um ponto desse plano. Em coordenadas homogéneas a correlação $C(\varphi)$ escreve-se pois na forma:

$$P = [x^i] \in \mathbb{P}(\mathbf{V}) \xrightarrow{C(\varphi)} \pi_P = \{(x^i \varphi_{ij}) y^j = 0\} \in \mathbf{Gr}_2(\mathbb{P}(\mathbf{V})) \quad (2.11.3)$$

Quando o ponto P percorre uma recta ℓ , em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, os planos correlativos correspondentes $\{\pi_P\}_{P \in \ell}$, formam um feixe de planos, em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, de eixo ℓ' - a **recta correlativa à recta ℓ** , em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$. Quando P percorre um plano ϖ , em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, os planos correlativos correspondentes $\{\pi_P\}_{P \in \varpi}$, formam uma rede de planos, em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, de vértice P_{ϖ} - o ponto de $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ correlativo ao plano ϖ . Quando P percorre uma curva α , situada num plano ϖ , em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, os planos correlativos correspondentes $\{\pi_P\}_{P \in \alpha}$, envolvem um cone \mathcal{C}_{α} , em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, de vértice P_{ϖ} . Quando P descreve uma curva Γ , não plana, em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$, os planos correlativos correspondentes $\{\pi_P\}_{P \in \Gamma}$, envolvem uma superfície desenvolvível \mathcal{D}_{Γ} , em $\mathbb{P}(\mathbf{V})$ - a cada tangente a Γ corresponde uma geratriz de \mathcal{D}_{Γ} . Enfim, se P descreve uma superfície algébrica de ordem n , os planos π_P , envolvem uma superfície algébrica de classe n .

Quais são as **correlações recíprocas ou involutivas**, isto é, quais as que satisfazem a condição seguinte:

$$\boxed{Q \in \pi_P \quad \longleftrightarrow \quad \pi_Q \ni P?} \quad (2.11.4)$$

Pondo $P = [x^i]$, $Q = [y^i]$, $\pi_P = [u_j = x^i \varphi_{ij}]$ e $\pi_Q = [v_j = y^i \varphi_{ij}]$, as relações de incidência anteriores exprimem-se na forma:

$$0 = u_j y^j = x^i \varphi_{ij} y^j \quad \longleftrightarrow \quad 0 = v_j x^j = y^i \varphi_{ij} x^j \quad (2.11.5)$$

o que traduz o facto de que a forma bilinear β , definida por:

$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \stackrel{\text{def}}{=} \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V} \quad (2.11.6)$$

deverá ser **reflexiva**. Para cada $\mathbf{x} \in \mathbf{V} - \{\mathbf{0}\}$, as formas lineares $\mathbf{y} \mapsto \beta(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ e $\mathbf{y} \mapsto \beta(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ têm pois o mesmo núcleo, e portanto elas são proporcionais, isto é, existe um escalar

$k(\mathbf{x}) \in \mathbb{k}$, tal que $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \varphi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = k(\mathbf{x})\psi_{\mathbf{x}}(\mathbf{y}) = k(\mathbf{x})\beta(\mathbf{y}, \mathbf{x})$, $\forall \mathbf{y} \in \mathbf{V}$. Mostremos que $k(\mathbf{x})$ não depende de \mathbf{x} - de facto, se \mathbf{x} e \mathbf{x}' são dois vectores linearmente independentes em \mathbf{V} , temos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{k}(\mathbf{x} + \mathbf{x}')\beta(\mathbf{y}, \mathbf{x} + \mathbf{x}') &= \beta(\mathbf{x} + \mathbf{x}', \mathbf{y}) \\ &= \beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + \beta(\mathbf{x}', \mathbf{y}) \\ &= k(\mathbf{x})\beta(\mathbf{y}, \mathbf{x}) + k(\mathbf{x}')\beta(\mathbf{y}, \mathbf{x}') \\ &\Rightarrow [\mathbf{k}(\mathbf{x} + \mathbf{x}') - k(\mathbf{x})]\mathbf{x} + [\mathbf{k}(\mathbf{x} + \mathbf{x}') - k(\mathbf{x}')]\mathbf{x}' = \mathbf{0} \\ &\Rightarrow k(\mathbf{x} + \mathbf{x}') = k(\mathbf{x}) = k(\mathbf{x}') \\ &\Rightarrow k(\mathbf{x}) \equiv k \text{ constante não nula em } \mathbb{k} \end{aligned}$$

Concluimos pois que:

$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k \beta(\mathbf{y}, \mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$$

e portanto:

$$\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = k^2 \beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \quad \Rightarrow \quad k^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad k = \pm 1 \quad (2.11.7)$$

uma vez que β é não degenerada e existem pois $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbf{V}$ tais que $\beta(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 0$.

Existem pois duas correlações involutivas, conforme $k = \pm 1$:

- Se $k = 1$, β é uma forma simétrica não degenerada. Neste caso $\varphi_{ij} = \varphi_{ji}$. O lugar dos pontos $P = [x^i]$ que pertencem ao seu próprio plano correlativo $\pi_P = [u_j = x^i \varphi_{ij}]$, é dado por:

$$x^i \varphi_{ij} x^j = 0 \quad (2.11.8)$$

e é portanto uma quádrlica não degenerada. A correlação é então a **polaridade** (ou **transformação por polares recíprocas**) relativamente a essa quádrlica fundamental.

- Se $k = -1$, β é uma forma simplética (ou alternada, não degenerada). Neste caso $\varphi_{ij} = -\varphi_{ji}$ e $\varphi_{ii} = 0$. A correlação associa, a cada ponto $P = [x^i]$, o plano correlativo $\pi_P = [u^j = x^i \varphi_{ij}]$. Se $[y^j]$ são as coordenadas correntes de um ponto desse plano, a sua equação é $x^i \varphi_{ij} y^j = 0$. Mais concretamente, a equação de π_P é:

$$\sum_{i < j} \varphi_{ij} (x^i y^j - y^i x^j) = 0 \quad (2.11.9)$$

Neste caso todo o ponto P pertence ao seu plano correlativo π_P . De facto, a relação anterior (2.11.9), é trivialmente satisfeita quando $y^j = x^j$.

A correlação diz-se então uma **correlação nula** ou uma **polaridade nula**.

O facto de que todo o ponto P pertence ao seu plano correlativo π_P , pode ser usado para construir os chamados **tetraedros de Moebius**, isto é, tetraedros que são simultâneamente inscritos e circunscritos um ao outro. Com efeito, sejam $A, B, C, D \in \mathbb{P}^3$ pontos independentes, que formam os vértices de um tetraedro em \mathbb{P}^3 , e sejam π_A, π_B, π_C e π_D os respectivos planos correlativos. Estes quatro planos passam respectivamente por

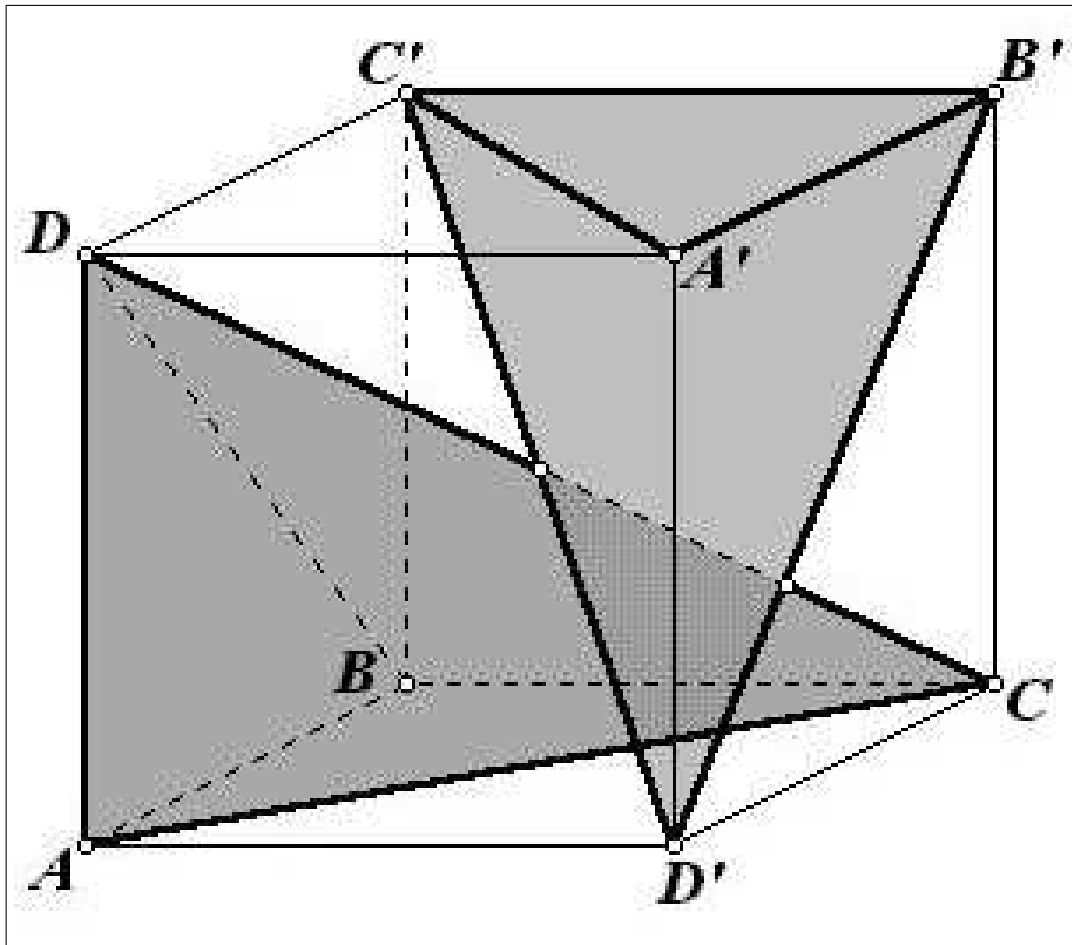


Figure 2.8: Tetraedros de Moebius.

A, B, C e D . Por outro lado, a intersecção D' dos três planos π_A, π_B e π_C , é o pólo do plano (ABC) , e portanto pertence a este plano, e análogamente para os outros vértices A', B' e C' do tetraedro recíproco (ver a figura 2.8).

2.12 Correlação nula relativamente a uma cúbica não plana

Uma **cúbica não plana** em \mathbb{P}^3 ⁽¹⁾, é uma curva racional que, relativamente a algum sistema de coordenadas homogêneas $[y^i]$ em \mathbb{P}^3 , admite uma representação paramétrica

¹“twisted cubic” ou “cubique gauche”...

da forma:

$$y^i = \sum_{j=1}^4 a_j^i(\theta)^{4-j} = a_1^i(\theta)^3 + a_2^i(\theta)^2 + a_3^i\theta + a_4^i, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (2.12.1)$$

onde o determinante:

$$D \stackrel{\text{def}}{=} |a_j^i| \neq 0$$

Como este determinante é não nulo, podemos adoptar como novas coordenadas homogéneas, as coordenadas $[x^i]$, definidas através de:

$$y^i = \sum_{j=1}^4 a_j^i x^j \quad (2.12.2)$$

e, relativamente a estas novas coordenadas, a cúbica (2.12.1) admite a **representação (paramétrica) canónica** seguinte:

$$\boxed{[x^1, x^2, x^3, x^4] = [(\theta)^3, (\theta)^2, \theta, 1]} \quad (2.12.3)$$

Se interpretarmos as equações (2.12.2) do ponto de vista activo, isto é, como as fórmulas de uma projectividade em \mathbb{P}^3 , concluímos que, em \mathbb{P}^3 , todas as cúbicas espaciais são projectivamente equivalentes entre si, e em particular, equivalentes à cúbica (2.12.3).

Vejamos algumas propriedades geométricas da cúbica \mathcal{C} , dada por (2.12.3). Representemos por $P(\theta)$, ou, se o contexto for claro, simplesmente por θ o ponto de \mathcal{C} , correspondente ao valor θ do parâmetro.

- *Por cada cúbica não plana \mathcal{C} passa uma família a dois parâmetros de quádricas, que formam uma rede linear, e \mathcal{C} é a intersecção comum de todas as quádricas dessa rede.* (Ver a figura 2.9).

Com efeito, como $[x^1, x^2, x^3, x^4] = [\theta^3, \theta^2, \theta, 1]$, as coordenadas de um qualquer ponto de \mathcal{C} satisfazem as equações:

$$\frac{x^1}{x^2} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{x^3}{x^4}$$

Portanto \mathcal{C} pertence a cada uma das quádricas:

$$\begin{cases} Q_1 \equiv (x^2)^2 - x^1 x^3 = 0 \\ Q_2 \equiv x^2 x^3 - x^1 x^4 = 0 \\ Q_3 \equiv (x^3)^2 - x^2 x^4 = 0 \end{cases} \quad (2.12.4)$$

e pertence também a cada uma das quádricas da rede linear:

$$Q \equiv \lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 = 0 \quad (2.12.5)$$

Reciprocamente, suponhamos que:

$$S \equiv \sum_{ij} a_{ij} x^i x^j = 0$$

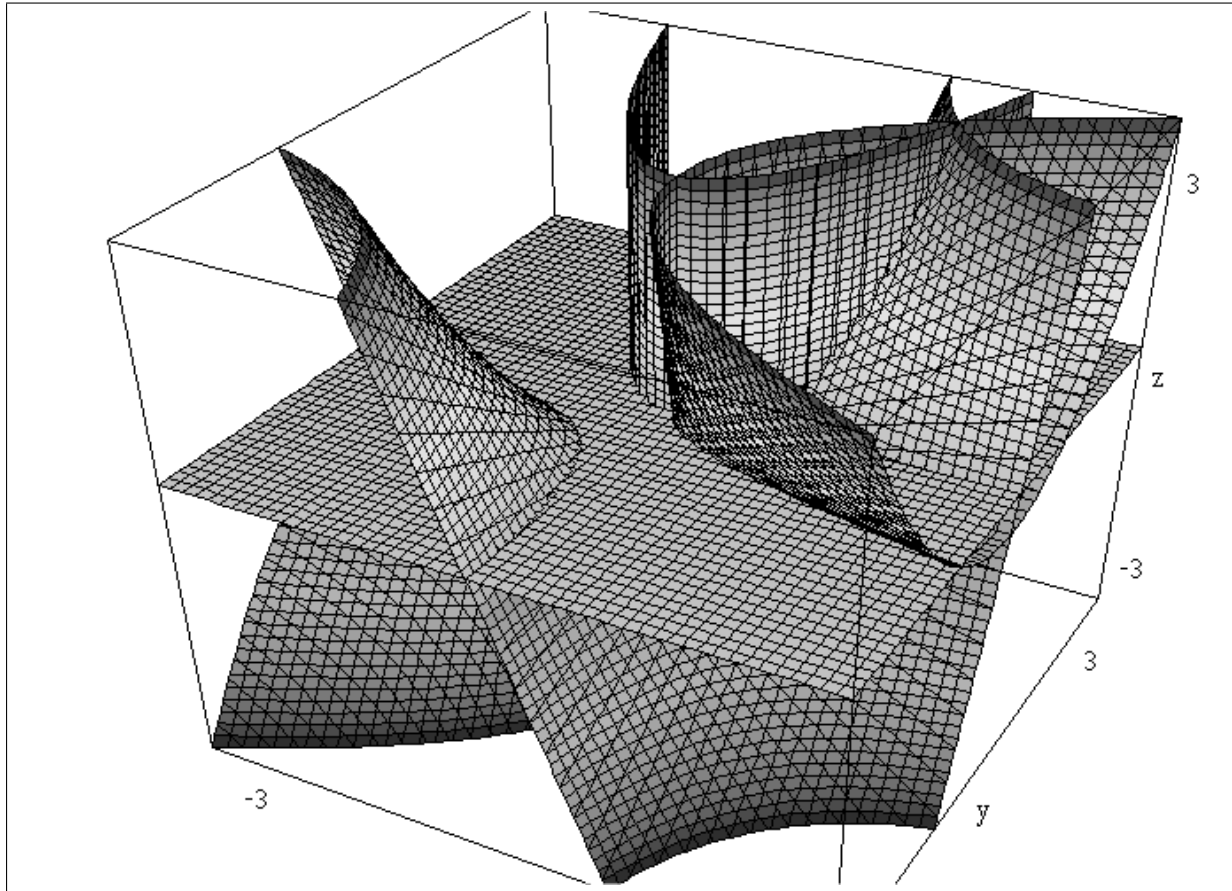


Figure 2.9: .

representa uma quádrlica qualquer que contem \mathcal{C} . Então:

$$\sum_{ij} a_{ij} x^i x^j = \sum_{ij} a_{ij} \theta^{4-i} \theta^{4-j} \equiv 0, \quad \forall \theta$$

e como $a_{ij} = a_{ji}$, podemos substituir esta identidade pelas equações seguintes:

$$\begin{aligned} a_{11} &= 0 & 2a_{23} + a_{33} &= 0 \\ 2a_{12} &= 0 & 2a_{34} &= 0 \\ 2a_{13} + a_{22} &= 0 & a_{44} &= 0 \\ 2a_{14} + 2a_{23} &= 0 & & \end{aligned}$$

A equação $S = 0$ reduz-se então à forma:

$$a_{22}Q_1 + 2a_{23}Q_2 + a_{33}Q_3 = 0$$

o que significa que a quádrlica $S = 0$, que contém \mathcal{C} , pertence à rede linear (2.12.5). ■

Note que localmente apenas duas das três equações (2.12.4) são necessárias para definir \mathcal{C} . Assim por exemplo, perto de $P(0) = [0, 0, 0, 1]$, onde $x^4 \neq 0$, a cúbica é

dada por $Q_2 = 0 = Q_1$. A terceira equação $Q_3 = 0$ é consequência destas duas. Por outras palavras, \mathcal{C} não é uma **intersecção completa**, mas apenas uma **intersecção completa local**. O problema é que um mesmo par das equações (2.12.4) não define \mathcal{C} em todos os seus pontos.

- Consideremos o plano que contem os três pontos θ_k , $k = 1, 2, 3$, de \mathcal{C} . Se $[u_i]$ são as coordenadas desse plano, então $\sum_i u_i x^i = 0$, para $x^i = \theta_k^{4-i}$, $i = 1, 2, 3, 4$; $k = 1, 2, 3$, isto é, $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ são as raízes da equação do terceiro grau:

$$\sum_i u_i(\theta)^{4-i} = u_1(\theta)^3 + u_2(\theta)^2 + u_3\theta + u_4 = 0$$

Álgebra elementar mostra então que:

$$\frac{u_1}{1} = \frac{-u_2}{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3} = \frac{u_3}{\theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_3} = \frac{-u_4}{\theta_1\theta_2\theta_3}$$

donde se deduz que a equação do plano que contem os três pontos θ_k , $k = 1, 2, 3$, de \mathcal{C} , é:

$$x^1 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)x^2 + (\theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_3)x^3 - \theta_1\theta_2\theta_3x^4 = 0 \quad (2.12.6)$$

- O plano que intersecta a cúbica \mathcal{C} , num ponto de multiplicidade três $\theta = \theta_1 = \theta_2 = \theta_3$, diz-se o **plano osculador** a \mathcal{C} , no ponto θ , e nota-se por $\mathcal{O}(\theta)$. A sua equação é portanto:

Plano osculador $\mathcal{O}(\theta)$, a \mathcal{C} no ponto θ :	$x^1 - 3\theta x^2 + 3(\theta)^2 x^3 - (\theta)^3 x^4 = 0$
---	--

(2.12.7)

É claro que o plano osculador $\mathcal{O}(\theta)$, intersecta \mathcal{C} apenas no ponto θ .

Por outro lado, dado um ponto qualquer $P = [x^i]$ em \mathbb{P}^3 , a equação (2.12.7) sendo do terceiro grau em θ (com os x^i 's fixos), admite três raízes, que correspondem aos três planos osculadores à cúbica \mathcal{C} , que passam em P . Portanto \mathcal{C} é uma curva racional de classe 3, e *por cada* $P \in \mathbb{P}^3$ *passam três planos osculadores à cúbica* \mathcal{C} .

- Consideremos agora uma corda $\overline{\theta_1\theta_2}$, que une os pontos distintos θ_1 e θ_2 de \mathcal{C} . Se θ representa um ponto variável em \mathcal{C} , o plano (variável) que contem os três pontos θ_1, θ_2 e θ , tem por equação:

$$\begin{aligned} 0 &= x^1 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta)x^2 + (\theta_1\theta_2 + \theta_1\theta + \theta_2\theta)x^3 - \theta_1\theta_2\theta x^4 \\ &= \underbrace{(x^1 - (\theta_1 + \theta_2)x^2 + \theta_1\theta_2x^3)}_{\pi_1} + \theta \underbrace{(-x^2 + (\theta_1 + \theta_2)x^3 - \theta_1\theta_2x^4)}_{\pi_2} \end{aligned} \quad (2.12.8)$$

donde se conclui que a corda referida pertence a um feixe linear de planos, gerado pelos planos $\pi_1 : x^1 - (\theta_1 + \theta_2)x^2 + \theta_1\theta_2x^3 = 0$ e $\pi_2 : x^2 - (\theta_1 + \theta_2)x^3 + \theta_1\theta_2x^4 = 0$. Portanto as equações dessa corda (que é o eixo do feixe de planos), são:

Corda $\overline{\theta_1\theta_2}$:	$\begin{cases} x^1 - (\theta_1 + \theta_2)x^2 + \theta_1\theta_2x^3 = 0 \\ x^2 - (\theta_1 + \theta_2)x^3 + \theta_1\theta_2x^4 = 0 \end{cases}$	(2.12.9)
---------------------------------------	--	----------

- Por um ponto qualquer $P = [x^i] \notin \mathcal{C}$, passa uma e uma só corda de \mathcal{C} . De facto, com os os x^i 's fixos, o sistema:

$$\begin{cases} x^1 - \alpha x^2 + \beta x^3 = 0 \\ x^2 - \alpha x^3 + \beta x^4 = 0 \end{cases}$$

determina α e β unívocamente. Comparando então com o sistema (2.12.9), determinamos as extremidades θ_1 e θ_2 , da única corda que passa em P , resolvendo as equações $\theta_1 + \theta_2 = \alpha$ e $\theta_1\theta_2 = \beta$, ou, de forma equivalente, determinando as raízes da equação quadrática $\theta^2 - \alpha\theta + \beta = 0$.

- A linha tangente a \mathcal{C} , num ponto θ , é a corda que intersecta \mathcal{C} num ponto duplo $\theta = \theta_1 = \theta_2$, e que portanto, atendendo a (2.12.9), tem por equações:

Linha tangente a \mathcal{C} , em θ :	$\begin{cases} x^1 - 2\theta x^2 + (\theta)^2 x^3 = 0 \\ x^2 - 2\theta x^3 + (\theta)^2 x^4 = 0 \end{cases}$	(2.12.10)
--	--	-----------

Eliminando θ nestas duas equações, obtemos a equação da **superfície regrada** gerada pelas tangente a \mathcal{C} :

$$(x^1x^4 - x^2x^3)^2 - 4((x^2)^2 - x^1x^3)((x^3)^2 - x^2x^4) = 0 \quad (2.12.11)$$

isto é:

$$Q_2^2 - 4Q_1Q_3 = 0 \quad (2.12.12)$$

onde os Q 's são dados por (2.12.4) (ver a figura 2.10).

- Consideremos um ponto variável $P(\theta) = [\theta^3, \theta^2, \theta, 1] \in \mathcal{C}$. Quando θ toma sucessivamente os valores $\infty, 0$ e 1 , temos que $P(\infty) = P_1 = [1, 0, 0, 0]$, $P(0) = P_4 = [0, 0, 0, 1]$ e $P(1) = E = [1, 1, 1, 1]$, respectivamente.

Portanto \mathcal{C} passa pelos vértices P_1 e P_4 do tetraedro de referência, e também pelo ponto unidade E do referencial projectivo. O plano osculador a \mathcal{C} , em $P_1 = P(\infty)$ é o plano $x^4 = 0$ (substitui-se $\theta = 1/t$ em (2.12.7), multiplica-se por t^3 , e faz-se $t = 0$), e a tangente a \mathcal{C} nesse ponto é $x^3 = 0 = x^4$. Portanto $P_2 = [0, 1, 0, 0]$ pertence à tangente a \mathcal{C} em P_1 , e o plano osculador a \mathcal{C} em P_1 , é o plano $(P_1P_2P_3)$. Análogamente, $P_3 = [0, 0, 1, 0]$ pertence à tangente a \mathcal{C} em P_4 , e o plano osculador a \mathcal{C} em P_4 é o plano $(P_2P_3P_4)$.

Concluimos pois que o referencial projectivo, relativamente ao qual a cúbica tem a representação canónica, pode ser escolhido da seguinte forma - escolhemos dois pontos distintos arbitrários P_1 e P_4 em \mathcal{C} . Os pontos P_1 e P_2 são então os pontos onde as tangentes a \mathcal{C} , em P_1 e P_4 , intersectam respectivamente os planos osculadores a \mathcal{C} , em P_4 e P_1 . O ponto unidade E pode ser um ponto qualquer de \mathcal{C} distinto de P_1 e P_4 (ver a figura 2.11).

- Consideremos agora duas cordas fixas $\ell = \overline{\theta_1\theta_2}$ e $m = \overline{\phi_1\phi_2}$, e ainda um ponto variável $P = P(\theta)$, em \mathcal{C} . Os planos que unem P a ℓ e a m , respectivamente, formam dois feixes que estão homográficamente relacionados entre si. De facto,

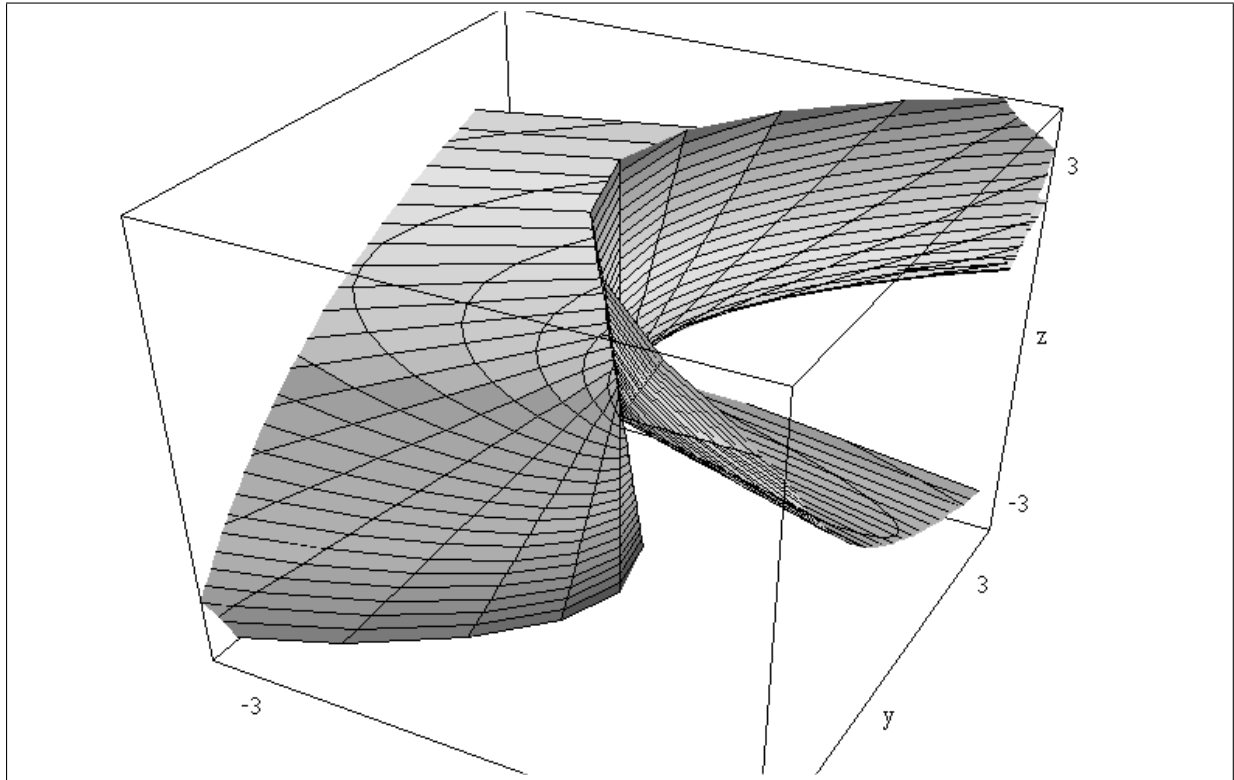


Figure 2.10: .

as equações dos planos (variáveis) (ℓP) e (mP) são respectivamente iguais a (ver (2.12.8)):

$$\pi_1 + \theta \pi_2 = 0 : \quad (x^1 - (\theta_1 + \theta_2)x^2 + \theta_1\theta_2 x^3) + \theta (-x^2 + (\theta_1 + \theta_2)x^3 - \theta_1\theta_2 x^4) = 0$$

e:

$$\varpi_1 + \theta \varpi_2 = 0 : \quad (x^1 - (\phi_1 + \phi_2)x^2 + \phi_1\phi_2 x^3) + \theta (-x^2 + (\phi_1 + \phi_2)x^3 - \phi_1\phi_2 x^4) = 0$$

Em particular, se fixarmos uma corda ℓ e tomarmos quatro pontos P_i , $i = 1, 2, 3, 4$, em \mathcal{C} , então a razão anarmónica $\ell\{P_1, P_2; P_3, P_4\} \stackrel{\text{def}}{=} \{(\ell, P_1), (\ell, P_2); (\ell, P_3), (\ell, P_4)\}$, não depende da escolha da corda ℓ , uma vez que essa razão é um invariante por homografias. Essa razão pode por isso ser tomada como a razão anarmónica $\{P_1, P_2; P_3, P_4\}$, dos quatro pontos P_i , $i = 1, 2, 3, 4$, sobre a cúbica \mathcal{C} .

Vejamos agora um outro processo de gerar uma cúbica não plana.

- **Proposição 2.12.1** ... *Toda a cúbica não plana pode ser gerada como o lugar dos pontos de intersecção dos planos correspondentes de três feixes, homograficamente relacionados entre si. Reciprocamente, o lugar dos pontos de intersecção dos planos correspondentes de três feixes, homograficamente relacionados é, em geral, uma cúbica não plana.*



Figure 2.11: .

- **Dem** ... Fixando três cordas arbitrárias l_1, l_2, l_3 , em \mathcal{C} , e designando por P um ponto variável em \mathcal{C} , então, como já vimos, os feixes de planos gerados respectivamente pelos planos (l_1P) , (l_2P) e (l_3P) , estão homograficamente relacionados entre si. Notamos este facto por:

$$l_1(P) \bar{\wedge} l_2(P) \bar{\wedge} l_3(P)$$

Reciprocamente, suponhamos dados três feixes de planos, homograficamente relacionados:

$$\pi_1 + \lambda \pi_2 = 0, \quad \varphi_1 + \mu \varphi_2 = 0 \quad \chi_1 + \nu \chi_2 = 0$$

onde os π 's, φ 's e χ 's são formas lineares nas variáveis x^i , $i = 1, 2, 3, 4$, e ν e μ estão homograficamente relacionados com λ . As equações anteriores podem ser escritas na forma:

$$\pi_1 + \lambda \pi_2 = 0, \quad \varpi_1 + \lambda \varpi_2 = 0 \quad \zeta_1 + \lambda \zeta_2 = 0$$

com novas formas lineares $\varpi's$ e $\zeta's$. Mas a solução deste sistema linear nas incógnitas x^1, x^2, x^3, x^4 , é da forma $x^i = \sum_{j=1}^4 a_j^i \theta^{4-j}$, desde que a característica deste sistema seja 3. Portanto os $x^i's$ são polinômios de terceiro grau em λ , linearmente independentes ($\det a_j^i \neq 0$), e a curva obtida é uma cúbica não plana.

■

Finalmente, para terminar esta secção, vamos demonstrar um teorema que relaciona cúbicas não planas com correlações nulas.

- **Proposição 2.12.2** ... *Seja \mathcal{C} uma cúbica não plana. Então a correspondência que a cada ponto $P \in \mathbb{P}^3$, associa o plano π_P que une os pontos de contacto dos três planos osculadores a \mathcal{C} , que passam em P , é uma correlação nula em \mathbb{P}^3 . O plano polar de um ponto $P \in \mathcal{C}$ é o plano osculador a \mathcal{C} , nesse ponto P . Todas as linhas tangentes a \mathcal{C} são auto-conjugadas relativamente à correlação nula referida.*

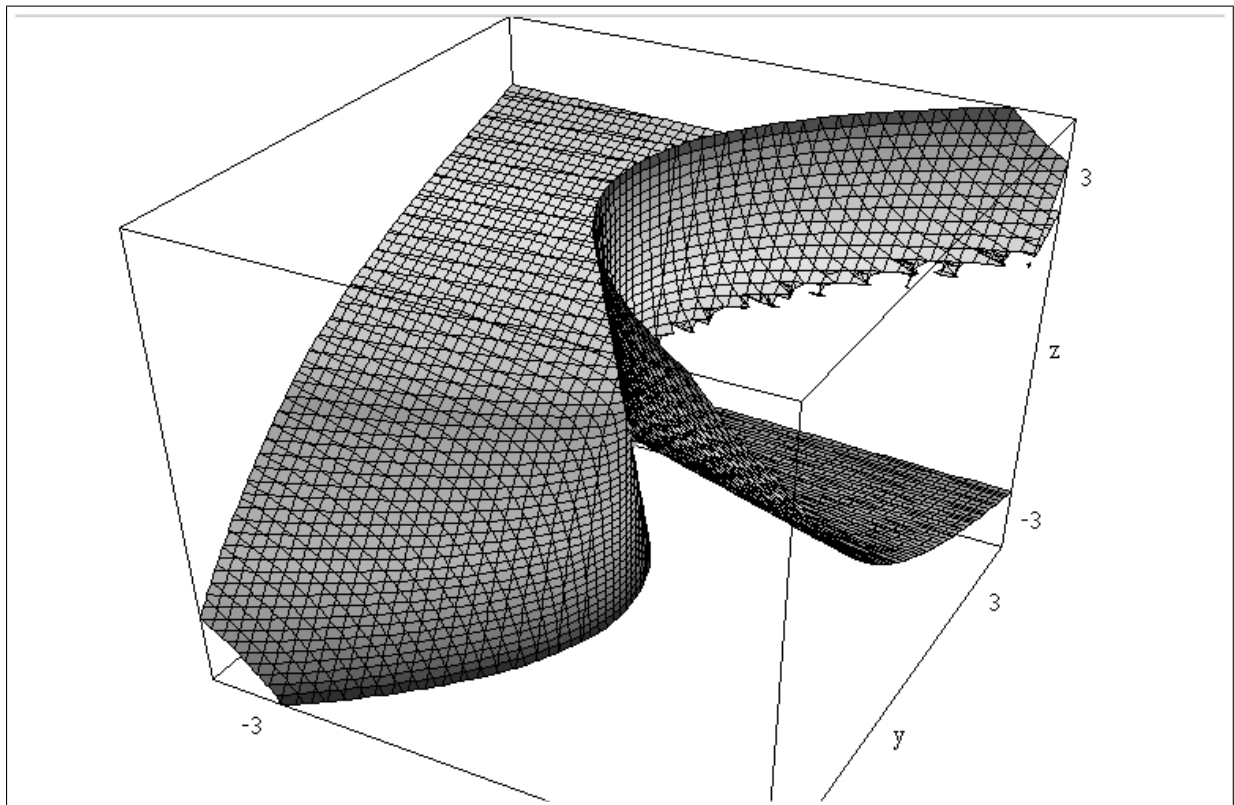


Figure 2.12: .

- **Dem** ... Suponhamos que $P = [y^i] \in \mathbb{P}^3$. A equação do plano osculador a \mathcal{C} , em θ , é dada por (2.12.7) e, se supômos que P pertence a esse plano, devemos ter:

$$y^1 - 3\theta y^2 + 3(\theta)^2 y^3 - (\theta)^3 y^4 = 0$$

Portanto os parâmetros θ_1, θ_2 e θ_3 dos pontos de contacto dos três planos osculadores que passam em P , são as raízes desta equação de terceiro grau em θ , e daí que:

$$\begin{cases} \theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \frac{3y^3}{y^4} \\ \theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_3 = \frac{3y^2}{y^4} \\ \theta_1\theta_2\theta_3 = \frac{y^1}{y^4} \end{cases} \quad (2.12.13)$$

Mas a equação do plano que passa nos três pontos é (2.12.6), como já vimos, isto é:

$$x^1 - (\theta_1 + \theta_2 + \theta_3)x^2 + (\theta_1\theta_2 + \theta_1\theta_3 + \theta_2\theta_3)x^3 - \theta_1\theta_2\theta_3x^4 = 0$$

e substituindo os valores de (2.12.13), obtemos finalmente a seguinte equação do plano π_P :

$$y^4x^1 - 3y^3x^2 + 3y^2x^3 - y^1x^4 = 0 \quad (2.12.14)$$

Portanto a correlação descrita no enunciado, relativamente à cúbica \mathcal{C} , é a seguinte:

$$P = [y^1, y^2, y^3, y^4] \longrightarrow \pi_P = [y^4, -3y^3, 3y^2, -y^1] \quad (2.12.15)$$

cuja matriz é a matriz anti-simétrica:

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.12.16)$$

o que mostra que a correlação é simplética ou nula. Em particular, se $P = [\theta^3, \theta^2, \theta, 1] \in \mathcal{C}$, então o respectivo plano polar é $\pi_P = [1, -3\theta, 3\theta^2, -\theta^3]$, que é exactamente o plano osculador a \mathcal{C} em P (ver (2.12.7)).

As rectas em \mathbb{P}^3 que são auto-conjugadas relativamente à correlação nula, formam um complexo linear \mathfrak{L} . Em particular, cada tangente a \mathcal{C} , como pertence ao plano osculador no seu ponto de contacto, pertence a esse complexo e é portanto auto-conjugada relativamente a \mathfrak{L} (ver a secção 2.11).

■.

Capítulo 3

Geometria regradada (ou de linhas) no espaço

3.1 Coordenadas de Pluecker axiais e radiais

Vamos agora considerar a **geometria regradada** no espaço \mathbb{P}^3 , isto é, a **geometria das linhas** em \mathbb{P}^3 .

Suponhamos que \mathbf{V} é um espaço vectorial com $\dim_{\mathbb{k}} \mathbf{V} = 4$, sobre \mathbb{k} ($= \mathbb{R}$ ou \mathbb{C}), e fixemos uma base $\{\mathbf{e}_i\}_{i=1, \dots, 4}$, para \mathbf{V} . Dois pontos distintos $P = [\mathbf{x}] = [x^i]$ e $Q = [\mathbf{y}] = [y^i]$, em $\mathbb{P}^3 = \mathbb{P}(\mathbf{V})$, definem uma recta $\ell(P, Q) = P \vee Q$ - a recta que os une - que não é mais do que $[\mathbb{k}\mathbf{x} + \mathbb{k}\mathbf{y}]$ - a projecção em \mathbb{P}^3 do plano vectorial gerado pelos dois vectores \mathbf{x} e \mathbf{y} :

$$\ell(P, Q) = P \vee Q = [\mathbb{k}\mathbf{x} + \mathbb{k}\mathbf{y}], \quad \text{onde } P = [\mathbf{x}], Q = [\mathbf{y}]$$

A essa recta podemos associar o elemento $[\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}] \in \mathbb{P}(\wedge^2 \mathbf{V}) \cong \mathbb{P}^5$. Como $\{\mathbf{e}_i \wedge \mathbf{e}_j\}_{1 \leq i < j \leq 4}$ é uma base para $\wedge^2 \mathbf{V}$, podemos tomar coordenadas homogéneas em $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\wedge^2 \mathbf{V})$, relativamente a essa base. As coordenadas de $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$ serão portanto:

$$p^{ij} = x^i y^j - x^j y^i, \quad 1 \leq i < j \leq 4 \quad (3.1.1)$$

que se dizem as **coordenadas de Plücker** (radiais) da recta $\ell(P, Q)$. Se escolhermos outros pontos em ℓ , digamos $P' = [\mathbf{x}'] = [x'^i]$ e $Q' = [\mathbf{y}'] = [y'^i]$, então $\mathbf{x}' = a\mathbf{x} + b\mathbf{y}$ e $\mathbf{y}' = c\mathbf{x} + d\mathbf{y}$, para certos escalares $a, b, c, d \in \mathbb{k}$ e portanto:

$$\mathbf{x}' \wedge \mathbf{y}' = (a\mathbf{x} + b\mathbf{y}) \wedge (c\mathbf{x} + d\mathbf{y}) = (ad - bc) \mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$$

o que significa que as coordenadas p^{ij} estão definidas a menos da multiplicação por um escalar não nulo, e portanto podem ser tomadas como coordenadas homogéneas da recta ℓ .

Suponhamos agora que a recta $\ell = \ell(P, Q)$, em \mathbb{P}^3 , é também definida como sendo a intersecção de dois planos $\pi = [\mathbf{u}] = [u_i]$ e $\varpi = [\mathbf{v}] = [v_i]$. Definamos as **coordenadas de Plücker** (axiais) da recta $\ell = \ell(\pi \cap \varpi)$ através de:

$$\pi_{ij} = u_i v_j - v_i u_j, \quad 1 \leq i < j \leq 4 \quad (3.1.2)$$

Como $P, Q \in \pi \cap \varpi$, os pontos $P = [x^i]$ e $Q = [y^i]$ verificam o sistema:

$$\begin{cases} u_i x^i = u_1 x^1 + u_2 x^2 + u_3 x^3 + u_4 x^4 = 0 \\ v_i x^i = v_1 x^1 + v_2 x^2 + v_3 x^3 + v_4 x^4 = 0 \\ u_i y^i = u_1 y^1 + u_2 y^2 + u_3 y^3 + u_4 y^4 = 0 \\ v_i y^i = v_1 y^1 + v_2 y^2 + v_3 y^3 + v_4 y^4 = 0 \end{cases} \quad (3.1.3)$$

(as duas primeiras equações exprimem que $P \in \pi \cap \varpi$ e as duas últimas que $Q \in \pi \cap \varpi$). Eliminando x^1 entre as duas primeiras equações, obtemos:

$$\pi_{12}x^2 + \pi_{13}x^3 + \pi_{14}x^4 = 0$$

Análogamente, eliminando y^1 entre as duas últimas:

$$\pi_{12}y^2 + \pi_{13}y^3 + \pi_{14}y^4 = 0$$

e destas duas equações obtemos:

$$\frac{\pi_{12}}{p^{34}} = \frac{\pi_{13}}{p^{42}} = \frac{\pi_{14}}{p^{23}}$$

Procedendo de forma análoga, obtemos finalmente as relações seguintes:

$$\frac{\pi_{12}}{p^{34}} = \frac{\pi_{13}}{p^{42}} = \frac{\pi_{14}}{p^{23}} = \frac{\pi_{34}}{p^{12}} = \frac{\pi_{42}}{p^{13}} = \frac{\pi_{23}}{p^{14}} \quad (3.1.4)$$

ou com uma notação muito habitual:

$$\pi_{12} : \pi_{13} : \pi_{14} : \pi_{23} : \pi_{42} : \pi_{34} = p^{34} : p^{42} : p^{23} : p^{14} : p^{13} : p^{12} \quad (3.1.5)$$

É claro que podemos sempre tomar $\pi_{12} = p^{34}, \pi_{13} = p^{42}, \pi_{14} = p^{23}, \pi_{34} = p^{12}, \pi_{42} = p^{13}$ e $\pi_{23} = p^{14}$.

3.2 Quádrica de Klein. Mergulho de Pluecker-Klein

Como:

$$\mathbf{p} \wedge \mathbf{p} = (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) \wedge (\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) = 0$$

as coordenadas de Pluecker $[p^{ij}]$ da recta $\ell(P, Q)$, satisfazem a condição seguinte:

$$\Omega(\mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{p} \wedge \mathbf{p} = p^{12}p^{34} + p^{13}p^{42} + p^{14}p^{23} = 0 \quad (3.2.1)$$

que é a equação de uma (hiper)quádrica em $\mathbb{P}^5 = \mathbb{P}(\wedge^2 \mathbf{V})$, chamada a **quádrica de Klein**, que notamos por Ω . Desta forma definimos um mergulho:

$$\begin{array}{ccc} pl : & \mathbf{Gr}_1(\mathbb{P}^3) & \longrightarrow \mathbb{P}(\wedge^2 \mathbf{V}) = \mathbb{P}^5 \\ & \ell(P, Q) = [\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle] & \longmapsto [\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}] \end{array} \quad (3.2.2)$$

a que chamamos o **mergulho de Pluecker-Klein** em \mathbb{P}^5 , do conjunto das rectas em \mathbb{P}^3 .

Reciprocamente qualquer ponto $\mathbf{p} = [p^{ij}] \in \mathbb{P}^5$ que pertença à quádrica de Klein, i.e., que satisfaça a equação (3.2.1), é imagem de uma recta em \mathbb{P}^3 . Por outras palavras, \mathbf{p} é **decomponível** - da forma $\mathbf{p} = [\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}]$ - e portanto o mergulho de Klein $pl : \mathbf{Gr}_1(\mathbb{P}^3) \rightarrow \Omega \subset \mathbb{P}^5$ é sobrejectivo (em breve daremos uma prova directa deste facto).

Suponhamos agora que $\ell = P \vee Q$, e $\ell' = P' \vee Q'$ são duas rectas em \mathbb{P}^3 . Pondo $P = [x^i], Q = [y^i], P' = [x'^i], Q' = [y'^i]$ e ainda $\ell = [\mathbf{p}] = [p^{ij} = x^i y^j - x^j y^i]$ e $m = [\mathbf{q}] = [q^{ij} = x'^i y'^j - x'^j y'^i]$, vejamos quais as condições que traduzem o facto de que as duas linhas se intersectam.

É claro que isto acontece se e só se os quatro pontos P, Q, P' e Q' são coplanares, isto é, se e só se o seguinte determinante se anula:

$$\begin{vmatrix} x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^4 \\ x'^1 & x'^2 & x'^3 & x'^4 \\ y'^1 & y'^2 & y'^3 & y'^4 \end{vmatrix} = 0$$

Desenvolvendo este determinante pela regra de Laplace obtemos:

$$2 \Omega(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 2 \mathbf{p} \wedge \mathbf{q} = p^{12} q^{34} + p^{34} q^{12} + p^{13} q^{42} + p^{42} q^{13} + p^{14} q^{23} + p^{23} q^{14} = 0 \quad (3.2.3)$$

onde $\Omega(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ representa a polar da forma quadrática Ω , definida em (3.2.1). Por outras palavras, as linhas $\ell = [\mathbf{p}]$ e $m = [\mathbf{q}]$ intersectam-se se e só se os pontos que as representam em $\Omega \subset \mathbb{P}^5$, são conjugados relativamente à quádrica de Klein $\Omega = \{\Omega = 0\}$. Neste caso todos os pontos da recta L que une $[\mathbf{p}]$ a $[\mathbf{q}]$, em \mathbb{P}^5 , pertencem também a Ω , e portanto as linhas $\ell = [\mathbf{p}]$ e $m = [\mathbf{q}]$ intersectam-se se e só a recta L está contida em Ω .

Como se calculam os pontos que pertencem a uma linha ℓ que é dada pelas suas coordenadas de Pluecker radiais $\ell = [\mathbf{p}] = [p^{ij}]$? E como se calculam os planos que a contêm?

Para responder a estas questões, basta conhecer os 4 pontos A_1, A_2, A_3 e A_4 nos quais ℓ intersecta os 4 planos de referência (faces do tetraedro de referência), e os planos π_1, π_2, π_3 e π_4 gerados pela linha ℓ e cada um dos 4 vértices V_1, V_2, V_3 e V_4 do tetraedro de referência:

Sejam $P = [x^i]$ e $Q = [y^i]$ dois pontos da recta ℓ . Então, por exemplo, o plano $\pi_1 = \pi(PQV_1)$, tem por equação (designando por $[X^i]$ as coordenadas de um ponto corrente de π_1):

$$\pi_1 : \begin{vmatrix} X^1 & X^2 & X^3 & X^4 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ x^1 & x^2 & x^3 & x^4 \\ y^1 & y^2 & y^3 & y^4 \end{vmatrix} = p^{34} X^2 + p^{42} X^3 + p^{23} X^4 = 0$$

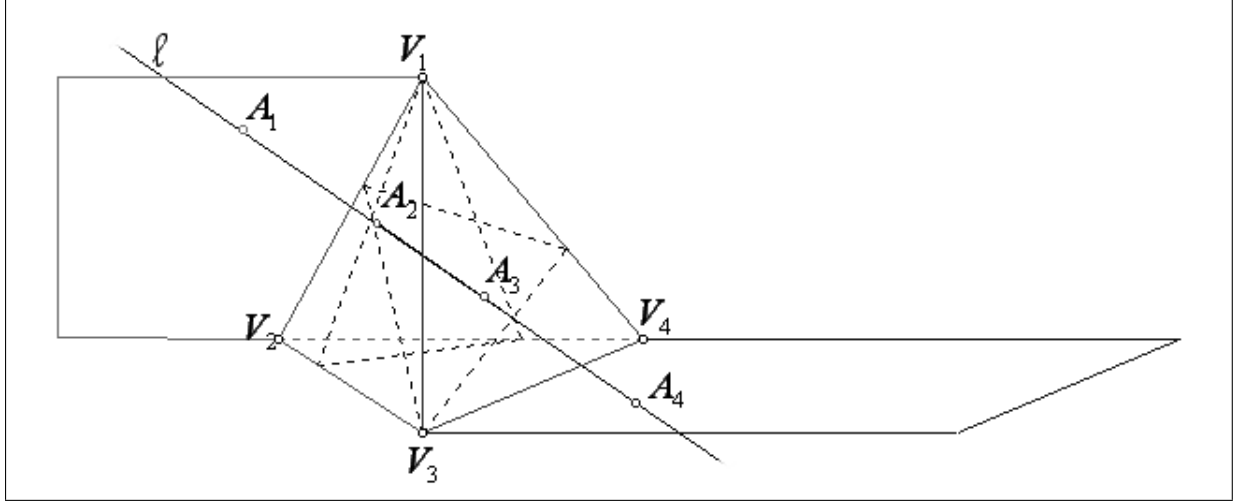


Figure 3.1: Tetraedro de Referência

De forma análoga se obtêm os outros planos π_i . Assim a recta ℓ pertence aos 4 planos:

$$\begin{cases} \pi_1 : & + p^{34} X^2 + p^{42} X^3 + p^{23} X^4 = 0 \\ \pi_2 : & p^{43} X^1 + & + p^{14} X^3 + p^{31} X^4 = 0 \\ \pi_3 : & p^{24} X^1 + p^{41} X^2 + & + p^{12} X^4 = 0 \\ \pi_4 : & p^{32} X^1 + p^{13} X^2 + p^{21} X^3 + & = 0 \end{cases} \quad (3.2.4)$$

Por outras palavras, as coordenadas dos planos π_i são as linhas da matriz anti-simétrica:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} 0 & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ -\pi_{12} & 0 & \pi_{23} & \pi_{24} \\ -\pi_{13} & -\pi_{23} & 0 & \pi_{34} \\ -\pi_{14} & -\pi_{24} & -\pi_{34} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & p^{34} & p^{42} & p^{23} \\ -p^{34} & 0 & p^{14} & p^{31} \\ -p^{42} & -p^{14} & 0 & p^{12} \\ -p^{23} & -p^{31} & -p^{12} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.5)$$

Transformemos por dualidade estes resultados - da mesma forma que $[0, p^{34}, p^{42}, p^{23}]$ são as coordenadas do plano π_1 , que une a recta $\ell = [p^{ij}]$ ao vértice V_1 , também $[0, \pi_{34}, \pi_{42}, \pi_{23}] = [0, p^{12}, p^{13}, p^{14}]$ são as coordenadas do ponto A_1 de intersecção da recta $\ell = [p^{ij}]$ com o plano coordenado $x^1 = 0$. Portanto as coordenadas dos pontos A_i , nos quais ℓ intersecta as 4 faces do tetraedro de referência, são as linhas da matriz anti-simétrica:

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} 0 & p^{12} & p^{13} & p^{14} \\ -p^{12} & 0 & p^{23} & p^{24} \\ -p^{13} & -p^{23} & 0 & p^{34} \\ -p^{14} & -p^{24} & -p^{34} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.2.6)$$

Aliás, se $\ell = P \vee Q$, com $P = [\mathbf{x}]$, $Q = [\mathbf{y}]$, então um ponto genérico desta linha será da forma $\lambda \mathbf{x} + \mu \mathbf{y}$, e os valores $\lambda = -y^1$ e $\mu = x^1$ correspondem ao ponto de intersecção A_1 da recta ℓ com o plano coordenado $x^1 = 0$, que tem por isso coordenadas $A_1 = [0, p^{12}, p^{13}, p^{14}]$. De forma análoga se calculam os outros pontos A_i .

Notas:

- Quais as coordenadas radiais da aresta $\overline{V_1V_2}$ do tetraedro de referência? Como essa aresta é a recta que une os pontos $V_1 = [1, 0, 0, 0]$ e $V_2 = [0, 1, 0, 0]$ as suas coordenadas de Pluecker radiais são $p^{12} = 1$ e as restantes são nulas.
- Suponhamos que a recta $\ell = [p^{ij}]$ pertence ao plano $x^1 = 0$. Então ela é determinada por dois pontos desse plano, digamos $P = [0, x^2, x^3, x^4]$ e $Q = [0, y^2, y^3, y^4]$. Temos então que (uma vez que $x^1 = 0 = y^1$), $p^{12} = p^{13} = p^{14} = 0$ e as restantes são arbitrárias.
- Vejamos qual a condição que traduz que a linha $\ell = \ell(P, Q) = [p^{ij}]$, com $P = [\mathbf{x}] = [x^i]$, $Q = [\mathbf{y}] = [y^i]$, pertence a um plano $\pi = [\mathbf{u}] = [u_i]$. Consideremos:

$$p^{ij}u_j = (x^iy^j - x^jy^i)u_j = x^i(y^ju_j) - (x^ju_j)y^i$$

Se $\ell \subset \pi$, então $P, Q \in \pi$, isto é, $y^ju_j = 0 = x^ju_j$, e portanto $p^{ij}u_j = 0, \forall i = 1, 2, 3, 4$. Recíprocamente, as equações $p^{ij}u_j = 0, \forall i = 1, 2, 3, 4$ exprimem o facto de que os 4 pontos $P_i = [p^{i1}, p^{i2}, p^{i3}, p^{i4}]$, $i = 1, 2, 3, 4$ pertencem ao plano π . Como $p^{ii} = 0$ e $p^{ij} = -p^{ji}$, a matriz cujas linhas são P_i , é anti-simétrica, e os p_i estão numa mesma linha que está em π .

Concluindo $\ell \subset \pi$ se e só se:

$$\sum_j p^{ij}u_j = 0, \forall i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.2.7)$$

- Dualizando os argumentos da nota anterior, podemos concluir que a linha ℓ passa por um ponto $A = [a^i]$ se e só se:

$$\sum_j \pi_{ij}a^j = 0, \forall i = 1, 2, 3, 4 \quad (3.2.8)$$

onde π_{ij} são as coordenadas axiais de ℓ .

Mostremos agora que o mergulho de Plucker (3.2.2) é sobrejectivo. Suponhamos então que são dados escalares p^{ij} tais que $p^{ij} = -p^{ji}$, $p^{ii} = 0$, que verificam a relação (3.2.1): $\Omega(\mathbf{p}) = p^{12}p^{34} + p^{13}p^{42} + p^{14}p^{23} = 0$, e mostremos que as equações (3.2.4) definem uma recta dada pela intersecção dos 4 planos π_i , dados por (3.2.4).

Em primeiro lugar, um cálculo simples mostra que:

$$\det \Pi = \det \begin{bmatrix} 0 & \pi_{12} & \pi_{13} & \pi_{14} \\ \pi_{21} & 0 & \pi_{23} & \pi_{24} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & 0 & \pi_{34} \\ \pi_{41} & \pi_{42} & \pi_{43} & 0 \end{bmatrix} = (p^{12}p^{34} + p^{13}p^{42} + p^{14}p^{23})^2 \quad (3.2.9)$$

isto é, $\Omega(\mathbf{p})$ é o chamado Pffafiano da matriz Π dada por (3.2.5). Portanto o determinante do sistema de equações (3.2.4) é nulo.

Como os coeficientes p^{ij} não são todos nulos, suponhamos por exemplo que $p^{34} \neq 0$. Então de (3.2.4) tiramos que (uma vez que $\Omega(\mathbf{p}) = 0$):

$$\begin{cases} p^{14}\pi_1 + p^{24}\pi_2 + p^{34}\pi_3 = 0 \\ p^{13}\pi_1 + p^{23}\pi_2 + \pi_{43}\pi_3 = 0 \end{cases}$$

o que implica que as equações $\pi_3 = 0$ e $\pi_4 = 0$ são consequência das equações $\pi_1 = 0$ e $\pi_2 = 0$ (sendo estas linearmente independentes uma vez que $p^{34} \neq 0$). Mas isto significa que o sistema (3.2.4) tem característica 2.

3.3 Complexos lineares de linhas em \mathbb{P}^3

Um **complexo de linhas** \mathfrak{L} em \mathbb{P}^3 , de grau n , é o conjunto das linhas $\ell = [\mathbf{p}] \in \Omega \subset \mathbb{P}^5$ que satisfazem uma equação da forma:

$$F(\mathbf{p}) = F(p^{12}, p^{13}, p^{14}, p^{23}, p^{24}, p^{34}) = 0 \quad (3.3.1)$$

(e $\Omega(\mathbf{p}) = 0$) onde F é um polinómio homogéneo de grau n . Portanto \mathfrak{L} é o conjunto das linhas que corresponde à intersecção da hipersuperfície algébrica $\{F = 0\}$, em \mathbb{P}^5 , com a quádrlica de Klein Ω .

Consideremos agora um ponto qualquer $P = [\mathbf{x}] = [x^i] \in \mathbb{P}^3$ e a recta $P \vee Q$, onde $Q = [\mathbf{y}] = [y^i]$. As coordenadas de Plucker radiais desta recta são:

$$p^{ij} = x^i y^j - x^j y^i, \quad 1 \leq i < j \leq 4$$

Esta recta pertencerá ao complexo \mathfrak{L} , dado por (3.3.1), sse:

$$F(x^1 y^2 - x^2 y^1, x^1 y^3 - x^3 y^1, x^1 y^4 - x^4 y^1, x^2 y^3 - x^3 y^2, x^2 y^4 - x^4 y^2, x^3 y^4 - x^4 y^3) = 0 \quad (3.3.2)$$

Considerando nesta equação os x^i fixos, ela representa a equação de um cone de grau n , de vértice $P = [\mathbf{x}]$, que se diz o **cone do complexo** \mathfrak{L} .

Suponhamos agora que π é um plano fixo em \mathbb{P}^3 e procuremos a envolvente da família de rectas do complexo, situadas em π .

De uma maneira geral, a uma curva em \mathbb{P}^3 cuja tangente, em cada um dos seus pontos, é uma recta do complexo \mathfrak{L} , chamamos uma **curva do complexo**. Pretende-se portanto calcular a curva do complexo situada no plano π .

Como podemos sempre tomar $\pi_{12} = p^{34}, \pi_{13} = p^{42}, \pi_{14} = p^{23}, \pi_{34} = p^{12}, \pi_{42} = p^{13}$ e $\pi_{23} = p^{14}$, a equação (3.3.1) pode ser escrita em coordenadas de Pluecker axiais, na forma:

$$F(\pi) = F(\pi_{34}, \pi_{42}, \pi_{23}, \pi_{14}, \pi_{31}, \pi_{12}) = 0 \quad (3.3.3)$$

Portanto, uma recta ℓ do complexo, situada no plano $\pi = [\mathbf{u}] = [u_i]$, pode ser determinada como sendo a intersecção do plano π com um plano $\varpi = [\mathbf{v}] = [v_i]$ que satisfaz a relação (3.3.3), com $\pi_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$. Mas esta equação, com os u_i fixos, representa a condição para que o plano $\varpi = [v_i]$ seja tangente à curva C - é pois a equação tangencial de C . Como F tem grau n , C é de classe n , e portanto o grau do complexo é igual à classe da curva do complexo.

Os complexos mais simples são evidentemente os de grau 1, ou **complexos lineares**. Neste caso F tem grau 1, e, por um ponto qualquer P , o cone do complexo de vértice

P , reduz-se a um plano, chamado o **plano focal** ou **plano polar** do complexo. A curva do complexo sendo de classe 1, reduz-se a um ponto, de tal forma que todas as rectas do complexo, situadas num dado plano π , passam por um ponto desse plano, chamado o **pólo** ou **foco** desse plano.

Retomemos a polar $\Omega(\mathbf{p}, \mathbf{q})$ da forma quadrática Ω , definida em (3.2.1):

$$\Omega(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = \mathbf{p} \wedge \mathbf{q} = p^{12}q^{34} + p^{34}q^{12} + p^{13}q^{42} + p^{42}q^{13} + p^{14}q^{23} + p^{23}q^{14} = 0 \quad (3.3.4)$$

que é uma forma bilinear simétrica em $\Lambda^2 \mathbf{V} = \mathbb{k}^6$, **não degenerada e com assinatura (3, 3)**.

Sendo não degenerada, Ω define um isomorfismo, que notamos pelo mesmo símbolo:

$$\begin{aligned} \Omega : \Lambda^2 \mathbf{V} &\longrightarrow (\Lambda^2 \mathbf{V})^* \\ \mathbf{p} &\longmapsto \Omega(\cdot, \mathbf{p}) \end{aligned}$$

que por sua vez define uma polaridade (que notamos ainda pelo mesmo símbolo), relativamente à quádrlica de Klein $\Omega = \{\Omega = 0\}$:

$$\begin{aligned} \Omega : \mathbb{P}^5 &\longrightarrow \mathbf{Gr}_4(\mathbb{P}^5) \\ [\mathbf{p}] &\longmapsto [\ker \Omega(\cdot, \mathbf{p})] \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Qualquer hiperplano em \mathbb{P}^5 será pois da forma:

$$\mathcal{H}_{\mathbf{a}} = \{\ker \Omega(\cdot, \mathbf{a})\} = \{[\mathbf{p}] \in \mathbb{P}^5 : \Omega(\mathbf{p}, \mathbf{a}) = \mathbf{p} \wedge \mathbf{a} = 0\}$$

para algum $[\mathbf{a}] \in \mathbb{P}^5$ único. O hiperplano $\mathcal{H}_{\mathbf{a}}$ diz-se, como já sabemos, o **hiperplano polar** do ponto \mathbf{a} (relativamente à quádrlica de Klein Ω).

Recorde que a condição de que $[\mathbf{p}] \in \mathbb{P}^5$ represente uma linha em \mathbb{P}^3 , é que $\Omega(\mathbf{p}, \mathbf{p}) = 0$ (isto é $[\mathbf{p}] \in \Omega$), enquanto que a condição de que as linhas $\ell = [\mathbf{p}]$ e $m = [\mathbf{q}]$, ambas em Ω , se intersectem é que $\Omega(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$.

Dado um ponto $[\mathbf{a}] \in \mathbb{P}^5$ (não necessariamente em Ω), as linhas $\ell = [\mathbf{p}] \in \Omega$ que satisfazem uma condição do tipo:

$$\Omega(\mathbf{a}, \mathbf{p}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{p} = 0 \quad (3.3.6)$$

constituem um chamado **complexo linear de linhas**. Este complexo $\mathcal{L}_{\mathbf{a}}$, é pois constituído pelas linhas que correspondem aos pontos da intersecção do hiperplano polar do ponto \mathbf{a} , $\mathcal{H}_{\mathbf{a}}$, com a quádrlica de Klein $\Omega = \{\Omega = 0\}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{\mathbf{a}} &= \mathcal{H}_{\mathbf{a}} \cap \Omega \\ &= \{[\mathbf{p}] \in \Omega : \mathbf{p} \wedge \mathbf{a} = 0\} \\ &= \{[\mathbf{p}] \in \mathbb{P}^5 : \mathbf{p} \wedge \mathbf{p} = 0 \text{ e } \mathbf{p} \wedge \mathbf{a} = 0\} \end{aligned} \quad (3.3.7)$$

Podemos distinguir os dois casos seguintes:

- $\Omega(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0$. Neste caso $[\mathbf{a}] \in \Omega$, e o hiperplano polar do ponto \mathbf{a} , $\mathcal{H}_{\mathbf{a}}$, é o hiperplano tangente a Ω em \mathbf{a} , habitualmente notado por $T_{\mathbf{a}}\widetilde{\Omega}$. O complexo $\mathcal{L}_{\mathbf{a}}$ é portanto igual a:

$$\mathcal{L}_{\mathbf{a}} = \Omega \cap T_{\mathbf{a}}\widetilde{\Omega} \quad (3.3.8)$$

Mais concretamente, $[\mathbf{a}]$ define uma linha $m = [\mathbf{a}]$ em \mathbb{P}^3 . A condição $\Omega(\mathbf{a}, \mathbf{p}) = 0$, exprime que as rectas $\ell = [\mathbf{p}]$ e $m = [\mathbf{a}]$ se intersectam, e o complexo \mathcal{L} é portanto constituído pelas rectas ℓ que intersectam a recta fixa $m = [\mathbf{a}]$, a que chamamos o **eixo do complexo $\mathcal{L}_{\mathbf{a}}$** .

Neste caso, o complexo \mathcal{L} diz-se **singular** ou **especial**.

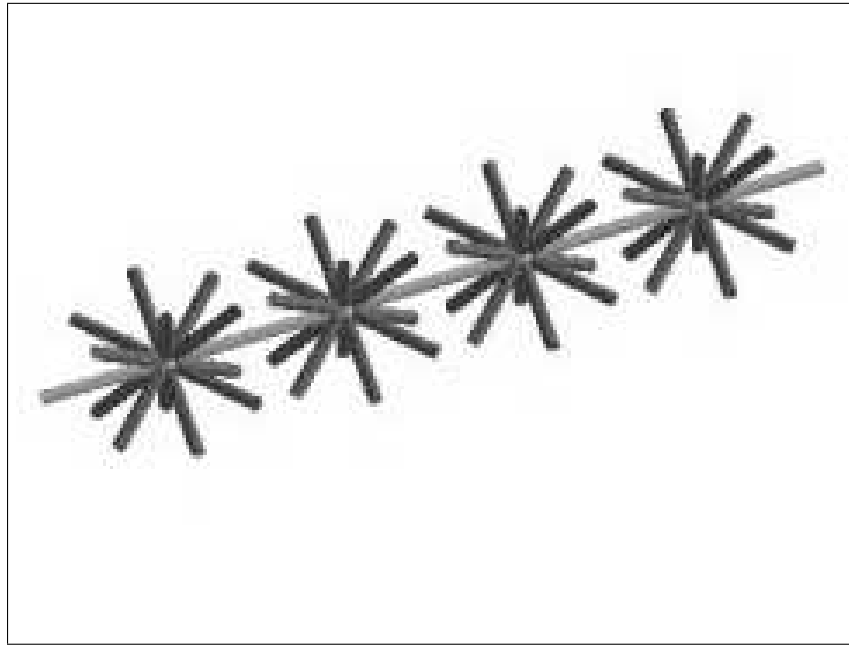


Figure 3.2: Complexo Linear Especial

- $\Omega(\mathbf{a}, \mathbf{a}) \neq 0$. Para perceber como é neste caso a distribuição de linhas, vejamos quais as linhas do complexo que passam por um mesmo ponto fixo $P = [\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^3$. A condição para que a linha $\ell = P \vee Q$, que passa pelo ponto fixo P e por um outro ponto $Q \neq P$, pertença ao complexo \mathcal{L} , é que as suas coordenadas $[\mathbf{p}] = [p^{ij}] = [x^i y^j - x^j y^i]$, satisfaçam a condição $\Omega(\mathbf{a}, \mathbf{p}) = 0$, isto é:

$$a^{34}(x^1 y^2 - x^2 y^1) + a^{42}(x^1 y^3 - x^3 y^1) + a^{23}(x^1 y^4 - x^4 y^1) + a^{12}(x^3 y^4 - x^4 y^3) + a^{13}(x^4 y^2 - x^2 y^4) + a^{14}(x^2 y^3 - x^3 y^2) = 0$$

Se reescrevemos esta condição na forma $\sum_{ik} C_{ik} y^i x^k = 0$, a matriz C dos coeficientes é:

$$C = (C_{ik}) = \begin{bmatrix} 0 & -a^{34} & -a^{42} & -a^{23} \\ a^{34} & 0 & a^{14} & a^{13} \\ a^{42} & a^{14} & 0 & -a^{12} \\ a^{23} & -a^{13} & a^{12} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.3.9)$$

o que significa que as linhas do complexo, que passam por um mesmo ponto fixo $P = [\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^3$, estão todas num mesmo plano $\pi_P = [u_i]$, onde:

$$u_i = \sum_k C_{ik} x^k$$

Note que o determinante de C é:

$$\det C = \left(a^{12} a^{34} + a^{13} a^{42} + a^{14} a^{23} \right)^2 = \Omega(\mathbf{a}, \mathbf{a})^2 \neq 0$$

e portanto:

$$P = [x^i] \longmapsto \pi_P = [u_i = C_{ik} x^k]$$

é uma **correlação** ou **polaridade nula**, e as linhas do complexo formam um **sistema nulo** ou **sistema focal**.

Temos portanto a seguinte proposição:

- **Proposição 3.3.1** ... *Um complexo linear não singular em \mathbb{P}^3 é constituído pelas linhas que são auto-conjugadas relativamente a uma correlação nula. As linhas do complexo, que passam num dado ponto, formam um feixe no plano polar desse ponto, e as linhas do complexo, situadas num dado plano, formam um feixe cujo suporte é o pólo desse plano.*

Na secção 3.5 estudaremos com mais pormenor a geometria das rectas conjugadas relativamente a um complexo linear.

3.4 Variedades lineares de linhas em \mathbb{P}^3

Consideremos de novo a (hiper)quádrica de Klein $\Omega = \{\Omega(\mathbf{p}) = 0\} \subset \mathbb{P}^5$, definida em (3.2.1):

$$\Omega(\mathbf{p}) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{p} \wedge \mathbf{p} = p^{12} p^{34} + p^{13} p^{42} + p^{14} p^{23} = 0$$

Esta quádrica tem dimensão 4 e é possível provar que ela não pode conter hiperplanos. No entanto Ω pode conter rectas e até 2-planos. Vejamos isto com mais detalhe.

Consideremos então dois pontos distintos $[\mathbf{p}]$ e $[\mathbf{q}]$ em Ω , e a recta L , em \mathbb{P}^5 , que os une. Um ponto genérico $[\mathbf{c}]$ nessa recta será da forma:

$$\mathbf{c} = \lambda \mathbf{p} + \mu \mathbf{q}, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{k}, \quad (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$$

e L estará contida em Ω se e só se $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{k}, (\lambda, \mu) \neq (0, 0)$:

$$\begin{aligned} 0 &= \Omega(\mathbf{c}) \\ &= \Omega(\lambda \mathbf{p} + \mu \mathbf{q}) \\ &= \lambda^2 \Omega(\mathbf{p}) + 2\lambda\mu \Omega(\mathbf{p}, \mathbf{q}) + \mu^2 \Omega(\mathbf{q}) \\ &= 2\lambda\mu \Omega(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \quad \text{uma vez que } \Omega(\mathbf{p}) = 0 = \Omega(\mathbf{q}) \\ &\Leftrightarrow \Omega(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0 \end{aligned}$$

Como $\Omega(\mathbf{p}) = 0 = \Omega(\mathbf{q})$, $[\mathbf{p}]$ e $[\mathbf{q}]$ estão em Ω e representam portanto linhas $\ell = pl^{-1}([\mathbf{p}])$ e $m = pl^{-1}([\mathbf{q}])$, em \mathbb{P}^3 . Como além disso, ainda se tem $\Omega(\mathbf{p}, \mathbf{q}) = 0$, estas linhas intersectam-se num certo ponto $P = [\mathbf{x}] \in \mathbb{P}^3$. À recta $L = [\mathbf{p}] \vee [\mathbf{q}] \subset \mathbb{P}^5$ corresponde então, em \mathbb{P}^3 , o feixe plano de rectas baseado em ℓ e m , e de suporte P . Com efeito, seleccionemos pontos $M = [\mathbf{y}]$ em ℓ e $N = [\mathbf{z}]$ em m , distintos de $P = [\mathbf{x}]$. Podemos então supôr que $[\mathbf{p}] = [\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}]$ e $[\mathbf{q}] = [\mathbf{x} \wedge \mathbf{z}]$. Como $[\mathbf{c}] = [\lambda\mathbf{p} + \mu\mathbf{q}] = [\lambda(\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}) + \mu(\mathbf{x} \wedge \mathbf{z})] = [\mathbf{x} \wedge (\lambda\mathbf{y} + \mu\mathbf{z})] \in \Omega$, vemos que, ao ponto \mathbf{c} corresponde a recta em \mathbb{P}^3 que une o ponto $P = [\mathbf{x}]$ ao ponto $[\lambda\mathbf{x} + \mu\mathbf{y}] \in \ell(M, N)$.

Um conjunto de linhas \mathcal{C} , em \mathbb{P}^3 cuja imagem $pl(\mathcal{C}) \subset \Omega \subset \mathbb{P}^5$ é uma variedade linear em \mathbb{P}^5 , diz-se uma **variedade linear de linhas** em \mathbb{P}^3 . De acordo com a discussão anterior, o exemplo não trivial mais simples de uma tal variedade linear de linhas, é o feixe plano de linhas, em \mathbb{P}^3 .

Vamos mostrar que apenas existem mais dois tipos de variedades lineares de linhas.

Suponhamos então que $\ell_a = [\mathbf{p}_a]$, $a = 1, \dots, m$ são m linhas em \mathbb{P}^3 , e que toda a combinação linear $\sum_a \lambda^a \mathbf{p}_a$ também representa uma linha, isto é, $\sum_a \lambda^a \mathbf{p}_a \in \Omega$. Então, em particular, toda a combinação linear de dois desses vectores, digamos \mathbf{p}_a e \mathbf{p}_b , representa uma linha, e, como vimos acima, isto significa que as linhas $\ell_a = [\mathbf{p}_a]$ e $\ell_b = [\mathbf{p}_b]$ se intersectam. Portanto as linhas dadas ℓ_1, \dots, ℓ_m intersectam-se duas a duas.

Portanto ℓ_1 e ℓ_2 intersectam-se num ponto e estão ambas sobre um mesmo plano. Como ℓ_3 intersecta quer ℓ_1 quer ℓ_2 , podemos distinguir dois casos:

- As 3 linhas ℓ_i , $i = 1, 2, 3$ intersectam-se num mesmo ponto $P \in \mathbb{P}^3$, e cada ponto:

$$\mathbf{p} = \lambda^1 \mathbf{p}_1 + \lambda^2 \mathbf{p}_2 + \lambda^3 \mathbf{p}_3 \in \Pi \subset \Omega$$

define uma recta que passa em P .

Neste caso o 2-plano $\Pi \subset \Omega$ diz-se um α -plano de Ω , e $\pi = pl^{-1}(\Pi) \subset \mathbb{P}^3$ a P -estrela correspondente.

- As 3 linhas ℓ_i , $i = 1, 2, 3$ pertencem a um mesmo plano π em \mathbb{P}^3 , e cada ponto:

$$\mathbf{p} = \lambda^1 \mathbf{p}_1 + \lambda^2 \mathbf{p}_2 + \lambda^3 \mathbf{p}_3 \in \Pi \subset \Omega$$

define uma recta nesse plano.

Neste caso o 2-plano $\Pi \subset \Omega$ diz-se um β -plano de Ω , e $\pi = pl^{-1}(\Pi) \subset \mathbb{P}^3$ o plano regrado correspondente.

Note que estas duas hipóteses são exclusivas uma vez que estamos a supôr que os vectores $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ e \mathbf{p}_3 são linearmente independentes. Por outro lado, em qualquer dos casos, não pode existir uma quarta linha $\ell_4 = [\mathbf{p}_4] \in \Omega$, que intersecte as três linhas ℓ_i , $i = 1, 2, 3$, e que não pertença ou à P -estrela ou ao plano regrado, o que significa que, como já tínhamos referido, não existem variedades lineares de linhas de maior dimensão em \mathbb{P}^3 . Podemos pois enunciar a seguinte proposição:

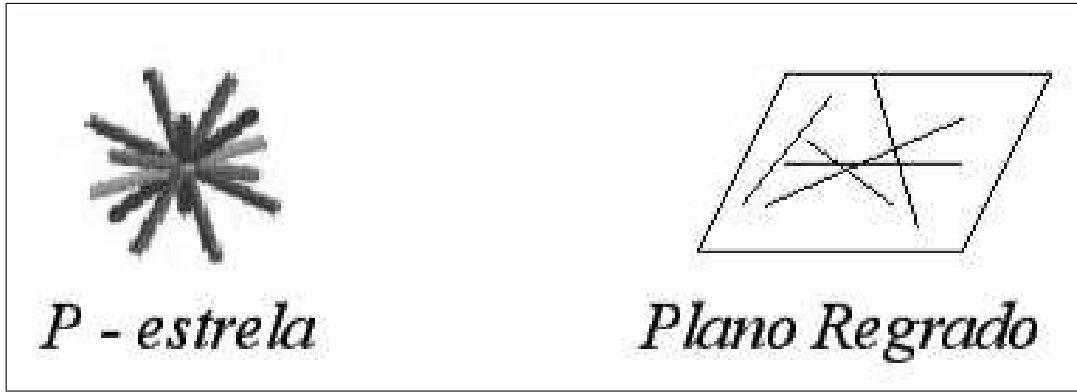


Figure 3.3: Variedades Lineares de Linhas

- **Proposição 3.4.1** ... As únicas variedades lineares de linhas em \mathbb{P}^3 são o feixe plano de linhas, a P -estrela (ou o α -plano correspondente) e o plano regrado (ou o β -plano correspondente).

Quando m linhas em \mathbb{P}^3 , $\ell_a = [\mathbf{p}_a]$, $a = 1, \dots, m$, não se intersectam duas a duas, então elas não determinam uma variedade linear de linhas. No entanto, podemos ainda considerar o sistema de linhas $\ell = [\mathbf{p}]$ que são linearmente dependentes das linhas dadas. Por outras palavras, podemos ainda formar o vector:

$$\mathbf{p} = \sum_a \lambda^a \mathbf{p}_a$$

e considerar o sistema constituído por todas as linhas associadas aos valores dos parâmetros $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ para os quais $\Omega(\mathbf{p}) = \Omega(\sum_a \lambda^a \mathbf{p}_a) = 0$

Assim suponhamos, para começar, que $m = 2$. Neste caso temos duas linhas, $\ell_1 = [\mathbf{p}_1]$ e $\ell_2 = [\mathbf{p}_2]$, e se $\mathbf{p} = \lambda^1 \mathbf{p}_1 + \lambda^2 \mathbf{p}_2$ temos que:

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{p}) &= (\lambda^1)^2 \Omega(\mathbf{p}_1) + 2\lambda^1 \lambda^2 \Omega(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + (\lambda^2)^2 \Omega(\mathbf{p}_2) \\ &= 2\lambda^1 \lambda^2 \Omega(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \end{aligned}$$

Se ℓ_1 e ℓ_2 não se intersectam, $\Omega(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \neq 0$, e portanto $\Omega(\mathbf{p}) = 0$ se e só se $\lambda^1 = 0$ ou $\lambda^2 = 0$, isto é, nenhuma outra linha pode ser linearmente dependente de ℓ_1 e ℓ_2 .

Suponhamos agora que $m = 3$. Neste caso temos três linhas, $\ell_1 = [\mathbf{p}_1]$, $\ell_2 = [\mathbf{p}_2]$ e $\ell_3 = [\mathbf{p}_3]$, e se $\mathbf{p} = \lambda^1 \mathbf{p}_1 + \lambda^2 \mathbf{p}_2 + \lambda^3 \mathbf{p}_3$ temos que:

$$\begin{aligned} \Omega(\mathbf{p}) &= \sum \lambda^a \lambda^b \Omega(\mathbf{p}_a, \mathbf{p}_b) \\ &= 2(\lambda^1 \lambda^2 \Omega(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) + \lambda^1 \lambda^3 \Omega(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3) + \lambda^2 \lambda^3 \Omega(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3)) \end{aligned}$$

Adoptando $\lambda^1, \lambda^2, \lambda^3$ como coordenadas homogêneas de um 2-plano $\Pi \cong \mathbb{P}^2$, as linhas $\ell = [\mathbf{p}] = \lambda^1 \mathbf{p}_1 + \lambda^2 \mathbf{p}_2 + \lambda^3 \mathbf{p}_3$, tais que $\Omega(\mathbf{p}) = 0$ ficam representadas em Π pelos pontos da cónica \mathcal{C} cuja equação é:

$$\Omega(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \lambda^1 \lambda^2 + \Omega(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_3) \lambda^1 \lambda^3 + \Omega(\mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3) \lambda^2 \lambda^3 = 0 \quad (3.4.1)$$

3.5 Rectas conjugadas

Notações:

Espaço afim tridimensional real Euclideano \mathcal{E} .

Pontos em \mathcal{E} : A, B, P, Q, \dots .

Rectas em \mathcal{E} : $\ell, \mathfrak{h}, \mathfrak{k}, \mathfrak{m}, \mathfrak{r}, \dots$. Em particular \mathfrak{e} designa o eixo do complexo.

Planos em \mathcal{E} : π, ϖ, \dots .

Complexo de rectas: $\mathfrak{L}, \mathfrak{C}, \mathfrak{T}, \dots$.

Pólo de uma plano π : P_π . Plano polar de um ponto P : π_P .

Em particular, π_∞ representa o plano do infinito e $P_\infty \in \pi_\infty$ o seu pólo. P_∞ define pois uma direcção de rectas, em \mathcal{E} , a que se chama a **direcção axial do complexo** \mathfrak{L} . Um plano que contenha P_∞ é pois um plano paralelo à direcção axial do complexo.

Vamos de seguida estabelecer algumas propriedades dos complexos lineares. Seja \mathfrak{L} um qualquer complexo linear de rectas, no espaço afim tridimensional \mathcal{E} .

3.5.1 Propriedades lineares

P 1 ... *Seja Q um ponto situado num plano ϖ . Então o plano polar π_Q , de Q , passa pelo pólo P_ϖ do plano ϖ :*

$$\boxed{Q \in \varpi \quad \longrightarrow \quad \pi_Q \ni P_\varpi} \quad (3.5.1)$$

- Dem... O ponto Q pertence simultâneamente aos planos ϖ , por hipótese, e ao seu plano polar π_Q . Logo pertence à recta de intersecção desses dois planos, que é portanto uma recta do complexo (por passar em Q e estar no plano polar π_Q). Mas como esta recta está no plano ϖ , ela passa pelo pólo P_ϖ , desse plano. O plano π_Q , contendo essa recta, passa portanto em P_ϖ (ver a figura 3.4). ■

Ao conjunto formado pelos elementos de contacto (Q, ϖ) e (P_ϖ, π_Q) , que se permutam entre si, pela correlação relativa ao complexo linear, chama-se **bi-elemento**.

Se o plano $\varpi = \pi_\infty$ é o plano do infinito, então π_Q é um plano diametral (o seu pólo Q está no infinito), e deduzimos da proposição anterior que:

$$Q \in \pi_\infty \quad \longrightarrow \quad \pi_Q \ni P_\infty$$

isto é, “*todo o plano diametral é paralelo à direcção axial do complexo*”.

Por outro lado, se $Q = P_\infty$, deduzimos da proposição anterior que:

$$P_\infty \in \varpi \quad \longrightarrow \quad \pi_\infty \ni P_\varpi$$

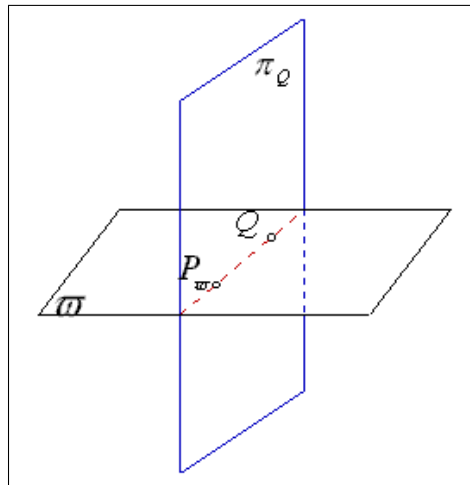


Figure 3.4: $Q \in \varpi \longrightarrow \pi_Q \ni P_\varpi$

Mas $P_\infty \in \varpi$, significa que ϖ é um plano paralelo à direcção axial do complexo \mathfrak{L} . Portanto $\pi_\infty \ni P_\varpi$, isto é, ϖ tem o seu pólo no infinito e é portanto um plano diametral. Concluindo - “*todo o plano paralelo à direcção axial é diametral*”.

P 2 ... Os planos que passam por uma recta ℓ , têm os seus pólos situados sobre uma mesma recta ℓ' :

$$\boxed{\{\pi\} \supset \ell \longrightarrow \{P_\pi\} \in \ell'} \quad (3.5.2)$$

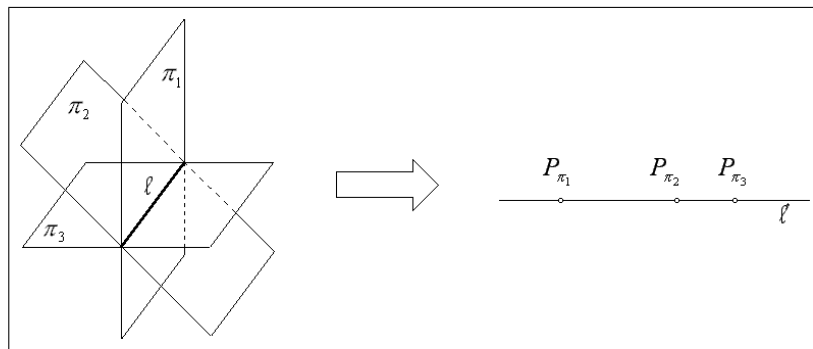


Figure 3.5:

- Dem... Seja ℓ' o lugar geométrico dos pólos dos planos que passam pela recta ℓ . Tomemos um plano arbitrário ϖ , e seja Q o único ponto de intersecção desse plano com a recta ℓ , e Q' um dos pontos de intersecção desse plano com ℓ' . Por construção, Q' é o pólo do plano $\pi(\ell, Q')$, e portanto, a recta $\overline{QQ'}$ pertence ao complexo, uma vez que pertence ao plano $\pi(\ell, Q')$, e passa pelo pólo Q' desse plano. Mas esta recta tem também de passar pelo pólo P_ϖ do plano ϖ . Ela é por isso única e bem determinada.

Portanto um plano arbitrário intersecta ℓ' num único ponto, o que significa que ℓ' é uma recta. ■

Em particular, se a recta ℓ está no infinito, os planos que a contêm são todos paralelos a um mesmo plano π . A recta ℓ' , lugar geométrico dos pólos desses planos paralelos, chama-se o **diâmetro relativo (ou conjugado)** à família de planos paralelos a π .

O plano do infinito π_∞ , pertence a toda a família de planos paralelos, e portanto, *todos os diâmetros relativos* passam pelo pólo P_∞ do plano do infinito, isto é, *são paralelos à direcção axial do complexo*.

Consideremos então uma família de planos, paralelos entre si, e perpendiculares à direcção axial do complexo. O diâmetro relativo a esta família é uma recta ϵ bem definida, paralela à direcção axial do complexo, a que chamamos o **eixo do complexo**, ou do sistema focal correspondente. Os planos perpendiculares ao eixo chamam-se **planos principais**.

O plano do infinito π_∞ , tem por pólo P_∞ , o ponto do infinito do eixo ϵ do complexo, e toda a recta $\ell \subset \pi_\infty$, do plano do infinito, possui uma conjugada ℓ' que passa em P_∞ .

P 3 ... *Os planos polares dos pontos de uma mesma recta ℓ , passam todos por uma mesma recta ℓ' .*

$$\boxed{\{P\} \in \ell \quad \longrightarrow \quad \{\pi_P\} \supset \ell'} \quad (3.5.3)$$

- Dem... Sejam P_1 e P_2 dois pontos quaisquer de ℓ , $\pi_1 = \pi_{P_1}$ e $\pi_2 = \pi_{P_2}$, os respectivos planos polares, e ℓ' a recta de intersecção destes planos. Por **(P2)**, os pólos dos planos que passam em ℓ' , estão todos sobre uma mesma recta. Mas esta recta, tendo de conter os pontos P_1 e P_2 , pólos de π_1 e π_2 , tem necessariamente de coincidir com a recta ℓ . Portanto os planos que passam em ℓ' são exactamente os planos polares dos pontos de ℓ . ■

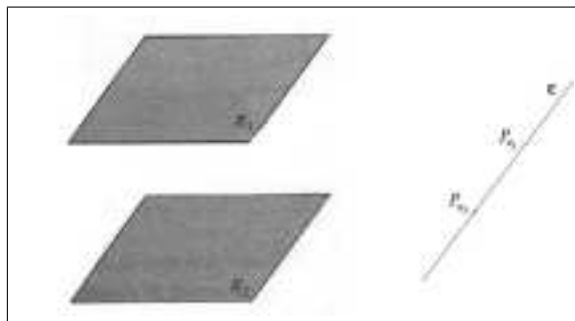


Figure 3.6: Eixo do Complexo

Existe pois reciprocidade entre as rectas ℓ e ℓ' , em virtude das propriedades **(P2)** e **(P3)**. Qualquer delas é o lugar geométrico dos pólos do feixe de planos que contêm a

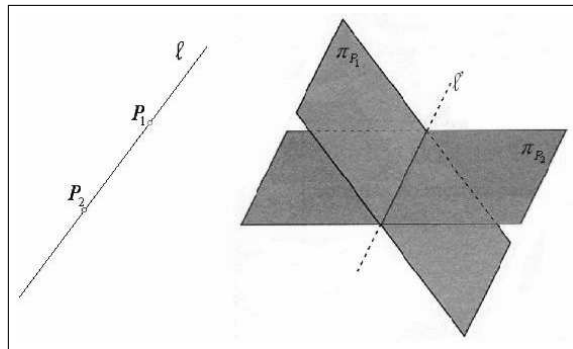


Figure 3.7: Rectas Conjugadas

outra. Há por isso entre elas reciprocidade. Por este motivo as rectas l e l' dizem-se **conjugadas**.

P 4 ... *Uma recta coincide com a sua conjugada se e só se ela pertence ao complexo.*

$$\boxed{l \equiv l' \quad \longleftrightarrow \quad l \in \mathfrak{L}} \quad (3.5.4)$$

- Dem... Se l pertence ao complexo, o pólo de todo o plano que contem l , tem de estar em l , e portanto $l = l'$. Recíprocamente, se $l = l'$ todo o plano ϖ , que contem l , tem o seu pólo P_ϖ em l . Portanto l pertence ao complexo, porque este contem todas as rectas que estão em ϖ e que passam por P_ϖ .

■

P 5 ... *Duas rectas conjugadas, que não pertencem ao complexo, não se intersectam.*

$$\boxed{l, l' \notin \mathfrak{L} \quad \longrightarrow \quad l \cap l' = \emptyset} \quad (3.5.5)$$

- Dem... Suponhamos que l e l' se intersectam num ponto Q . O plano polar π_Q , do ponto Q , contem a recta l' e, por reciprocidade, contém também a recta l . Portanto π_Q coincide com o plano $\pi(l, l')$. As rectas l e l' estão pois num mesmo plano, e passam pelo pólo desse plano. Logo pertencem ao complexo, o que contraria a hipótese.

■

P 6 ... *Toda a recta do complexo que intersecta uma recta l , também intersecta a conjugada l' .*

- Dem... Seja τ uma recta do complexo, que intersecta a recta l . O plano $\pi = \pi(l, \tau)$ tem o seu pólo P_π em l' . Mas τ , sendo uma recta do complexo nesse plano, tem também de passar por $P_\pi \in l'$ (ver Figura 3.8).

■

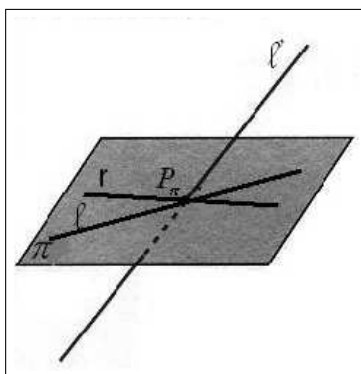


Figure 3.8:

Portanto as rectas do complexo que intersectam uma dada recta ℓ , também intersectam a conjugada ℓ' , e por isso geram uma **congruência linear** para a qual ℓ e ℓ' são as **curvas (rectas) focais**. Se ℓ pertence ao complexo, então $\ell = \ell'$, e as rectas do complexo que passam por um ponto qualquer P de ℓ , cujo plano polar $\pi = \pi_P$ contém portanto $\ell' = \ell$, têm de estar todas nesse plano π . Como veremos adiante, o plano $\pi = \pi_P$ depende homograficamente de P , quando P se desloca em ℓ . Neste caso, temos então uma **congruência linear singular**, na qual toda a recta tem os seus pontos focais confundidos sobre ℓ , e os seus planos focais confundidos passando por ℓ (ver [Ju III], pag. 154).

Suponhamos que, no enunciado anterior, $\ell \equiv \epsilon$ é o eixo do complexo (o lugar dos pólos, dos planos $\{\varpi\}$, perpendiculares à direcção axial do complexo). Como a recta conjugada do eixo ϵ' , é a recta do infinito pela qual passam todos os planos $\{\varpi\}$, deduzimos de (P6) que *toda a recta do complexo que intersecta o eixo do complexo, o intersecta perpendicularmente*.

P 7 ... *Toda a recta que intersecta duas rectas conjugadas ℓ e ℓ' , faz parte do complexo.*

- **Dem...** Seja τ uma recta que intersecta as rectas conjugadas ℓ e ℓ' , respectivamente nos pontos P e P' . O plano polar π_P contém ℓ' , e como contém o seu pólo P , coincide com o plano $\pi(P, \ell')$, e portanto contém a recta τ . Sendo esta recta uma recta do plano $\pi(P, \ell')$, que passa pelo seu pólo, ela pertence ao complexo (ver Figura 3.9). ■

Um recta τ , que intersecte perpendicularmente o eixo ϵ do complexo, também intersecta a recta ϵ' , conjugada desse eixo, que está no infinito, num plano perpendicular à direcção axial do complexo. Portanto τ faz parte do complexo. Concluimos por isso que *toda a recta que intersecte perpendicularmente o eixo do complexo, pertence a esse complexo*.

P 8 ... *Todo o plano ϖ , paralelo a duas rectas conjugadas ℓ e ℓ' , é um plano diametral (isto é, tem o seu pólo no infinito).*

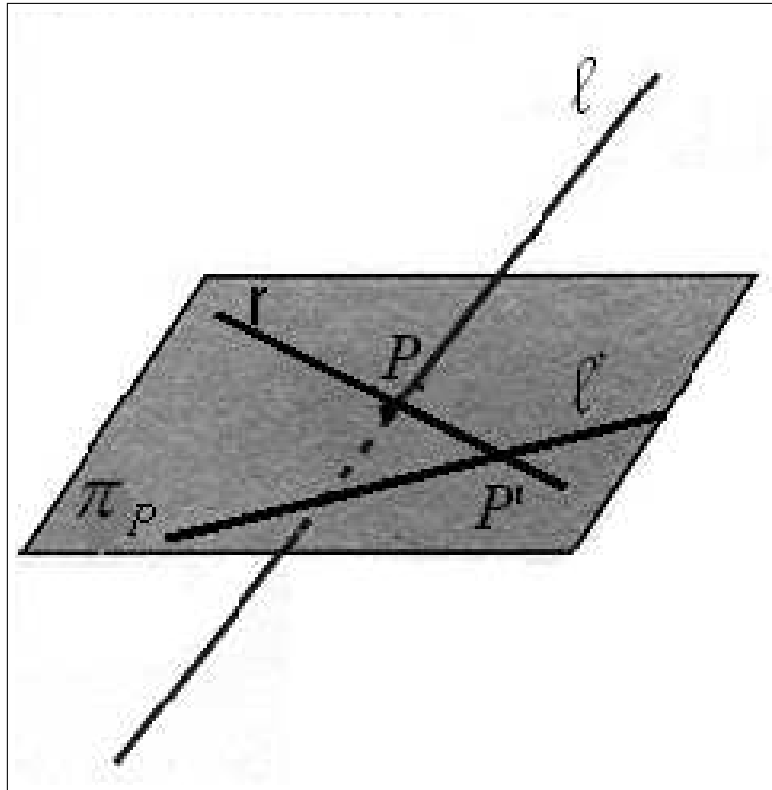


Figure 3.9:

- Dem... A recta τ_∞ , que une os pontos do infinito de cada uma das rectas ℓ e ℓ' , é uma recta no infinito que pertence ao complexo, por (P7), e que está contida no plano ϖ , uma vez que este, sendo paralelo a ℓ e ℓ' , contém os pontos do infinito de cada uma dessas rectas. Portanto a recta $\tau_\infty \subset \varpi$ passa pelo pólo P_ϖ , que é pois um ponto no infinito. ■

P 9 ... *Todo o plano ϖ , perpendicular ao eixo ϵ do complexo, intersecta este eixo e duas rectas conjugadas ℓ e ℓ' quaisquer, em três pontos situados numa mesma recta.*

- Dem... Seja $A = \varpi \cap \epsilon$, $B = \varpi \cap \ell$ e consideremos a recta \overline{AB} . Esta recta pertence ao complexo, por intersectar perpendicularmente o eixo ϵ , e intersectando ℓ também intersecta ℓ' , por (P6). ■

P 10 ... *A perpendicular comum τ , a duas rectas conjugadas ℓ e ℓ' quaisquer, intersecta perpendicularmente o eixo ϵ do complexo.*

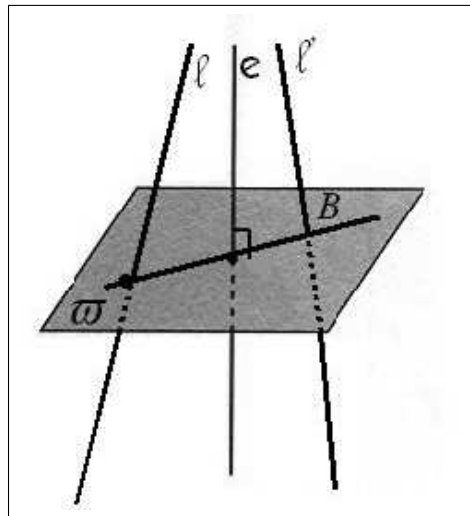


Figure 3.10:

- Dem... τ pertence ao complexo, por (P7). Por outro lado, τ é perpendicular a todos os planos paralelos às duas rectas l e l' , que são planos diametraes, por (P8). Mas, como vimos após (P1), todo o plano diametral é paralelo à direcção axial do complexo. Portanto τ tem uma direcção perpendicular à direcção axial do complexo. τ intersecta pois a recta do infinito pela qual passam todos os planos perpendiculares à direcção axial. Mas esta é a recta e' , conjugada do eixo. Portanto τ intersecta também o eixo.

■.

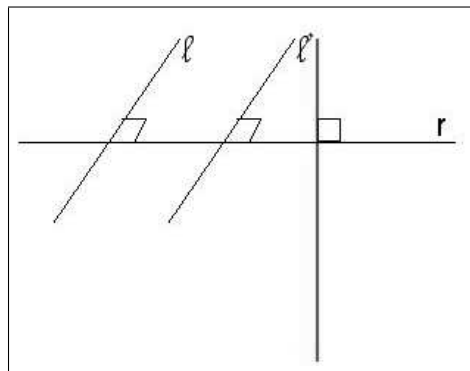


Figure 3.11:

P 11 ... As conjugadas $\{l'\}$ das rectas $\{l\}$, situadas num mesmo plano ϖ , concorrem todas num mesmo ponto, que é o pólo P_ϖ do plano ϖ .

$$\boxed{\{l\} \subset \varpi \quad \longrightarrow \quad \{l'\} \ni P_\varpi} \quad (3.5.6)$$

- Dem... Com efeito, seja $\ell \subset \varpi$, uma recta qualquer em ϖ . Visto que o plano ϖ contém a recta ℓ , o seu pólo P_ϖ , tem de estar em ℓ' , por (P2).

■

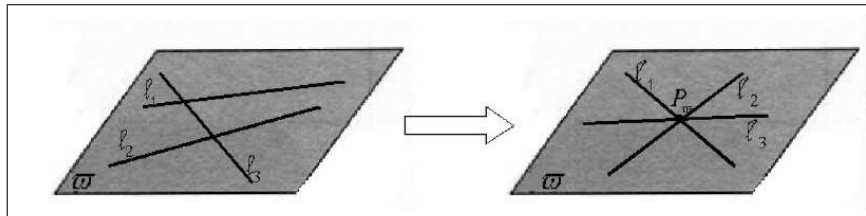


Figure 3.12:

P 12 ... As conjugadas $\{\ell'\}$ das rectas $\{\ell\}$, que passam por um ponto fixo P , pertencem todas a um mesmo plano, que é o plano polar π_P , de P .

$$\boxed{\{\ell\} \ni P \quad \longrightarrow \quad \{\ell'\} \subset \{\pi_P\}} \quad (3.5.7)$$

- Dem... Com efeito, seja ℓ uma recta qualquer que passa em P . Então, por (P3), o plano polar π_P , de P , contém ℓ' .

■

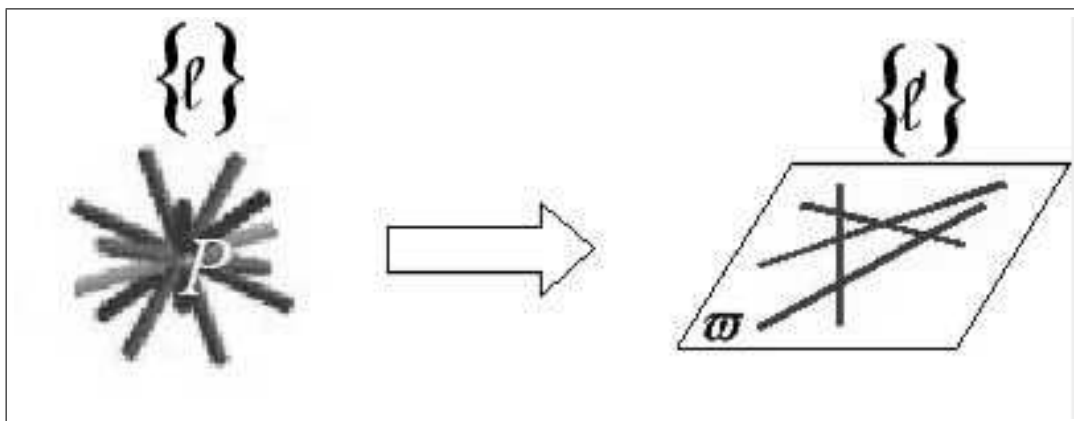


Figure 3.13:

Nas propriedades seguintes utilizar-se-á o teorema seguinte sobre relações homográficas (ver [B], pag. 212): “Se x e y são duas variáveis em $\mathbb{P}^1 = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$, ligadas algèbricamente através de:

$$f(x, y) = 0$$

onde f é um polinómio, e de tal forma que a cada valor de x corresponda um e um só valor da outra, então x e y estão ligadas homograficamente, isto é:

$$y = \frac{ax + b}{cx + d}, \quad \text{ou} \quad cxy - ax + dy - b = 0$$

para certas constante a, b, c, d tais que $ad - bc \neq 0$ ".

P 13 ... As conjugadas $\{\ell'\}$ das rectas $\{\ell\}$, de um mesmo feixe (plano), formam elas próprias um feixe (plano), que é homográfico ao primeiro.

– Dem...

As rectas $\{\ell\}$ estão num mesmo plano ϖ , logo as suas conjugadas $\{\ell'\}$, por (P11), concorrem todas num mesmo ponto, que é o pólo, P_ϖ , do plano ϖ . Por outro lado, as rectas $\{\ell\}$ concorrem todas num mesmo ponto Q de ϖ , logo as suas conjugadas, $\{\ell'\}$, pertencem todas, por (P12), ao plano polar do ponto Q , π_Q , formando um feixe (plano). Além disso, a cada uma das rectas ℓ do primeiro feixe corresponde uma e uma só recta ℓ' do segundo e inversamente, donde concluímos que os dois feixes são homográficos.

■

P 14 ... As rectas $\{\ell\}$, de um complexo linear \mathfrak{L} , que intersectam duas rectas fixas ℓ_1, ℓ_2 , não conjugadas, relativamente a esse complexo, determinam nessas rectas duas séries de pontos em correspondência homográfica.

– Dem...

Suponhamos, em primeiro lugar, que as rectas são coplanares. Para todo o ponto $P_1 \in \ell_1$, passa uma única recta \mathfrak{r} , que intersecta ℓ_2 num ponto P_2 que, por sua vez, pertence à intersecção de ℓ_2 com o plano polar π_{P_1} de ℓ_1 . Com um raciocínio análogo, concluímos que para cada ponto $P_2 \in \ell_2$ existe um ponto $P_1 \in \ell_1$ que pertence à intersecção de ℓ_1 com o plano polar π_{P_2} de ℓ_2 . Posto isto, segue imediatamente, que existe uma correspondência anarmónica entre os pontos das duas rectas ou, de forma equivalente, que estes pontos constituem duas séries homográficas.

■

3.5.2 Propriedades quadráticas

P 15 ... As rectas $\{\ell\}$, de um complexo linear, que intersectam duas rectas fixas ℓ_1, ℓ_2 , não coplanares e não conjugadas relativamente a esse complexo, geram uma superfície de segundo grau.

- Dem... As rectas do complexo que passam por um ponto $P_1 \in \ell_1$, estão todas no mesmo plano $\pi_1 = \pi_{P_1}$ - o plano polar de P_1 - plano esse que contem a recta conjugada ℓ'_1 , e que corresponde homograficamente a P_1 , quando P_1 varia em ℓ_1 . ■

P 16 ... *Dois pares de rectas conjugadas (ℓ, ℓ') e (τ, τ') , relativamente ao complexo linear \mathfrak{L} , pertencem a uma mesma superfície de segundo grau.*

- Dem...

Como toda a transversal, t , comum a ℓ, ℓ' e τ pertence a \mathfrak{L} , também intersecta τ' (P6). Portanto, ℓ, ℓ', τ e τ' possuem uma infinidade de transversais comuns e são geratrizes de um mesmo sistema de uma quádrlica. As geratrizes do outro sistema são as transversais comuns. ■

P 17 ... *Num complexo linear, os planos polares dos pontos de uma cónica \mathcal{C} , envolvem um cone de segundo grau $\hat{\mathcal{C}}$, cujo vértice é o pólo do plano que contem \mathcal{C} .*

Mais geralmente, os planos polares dos pontos de uma curva plana \mathcal{C} , de grau n , envolvem um cone de grau n , cujo vértice é o pólo do plano que contem \mathcal{C} .

Diremos neste caso que a curva \mathcal{C} e o cone $\hat{\mathcal{C}}$ são **correlativos**, relativamente ao complexo dado (ou relativamente ao sistema focal correspondente).

- Dem...

Seja \mathcal{C}_n uma curva de grau n , contida num plano ϖ . O plano polar, π_Q , de um ponto Q pertencente a \mathcal{C}_n passa pelo pólo P_ϖ do plano ϖ (P1). Portanto, os planos polares de todos os pontos pertencentes a \mathcal{C}_n envolvem um cone $\hat{\mathcal{C}}_n$ cujo vértice é o ponto P_ϖ .

Consideremos agora uma recta ℓ , do complexo, que passe por P_ϖ e tomemos os planos tangentes ao cone, que contêm esta recta. O número de planos que satisfazem esta condição é igual ao número de pontos de intersecção de ℓ' com \mathcal{C}_n , ou seja, é igual a n , pelo que podemos concluir que o cone $\hat{\mathcal{C}}_n$ de classe n . ■

P 18 ... *Num complexo linear, os planos polares de dois pontos, conjugados relativamente a uma cónica \mathcal{C} , são conjugados relativamente ao cone correlativo $\hat{\mathcal{C}}$.*

- Dem...

Sejam P e P' dois pontos conjugados relativamente a uma cónica \mathcal{C} e Q e Q' os respectivos pontos de intersecção da recta $\ell = \overline{PP'}$ com a cónica \mathcal{C} . Aos quatro pontos P, P', Q e Q' correspondem, anarmonicamente, os seus planos polares, $\pi_P, \pi_{P'}, \pi_Q$

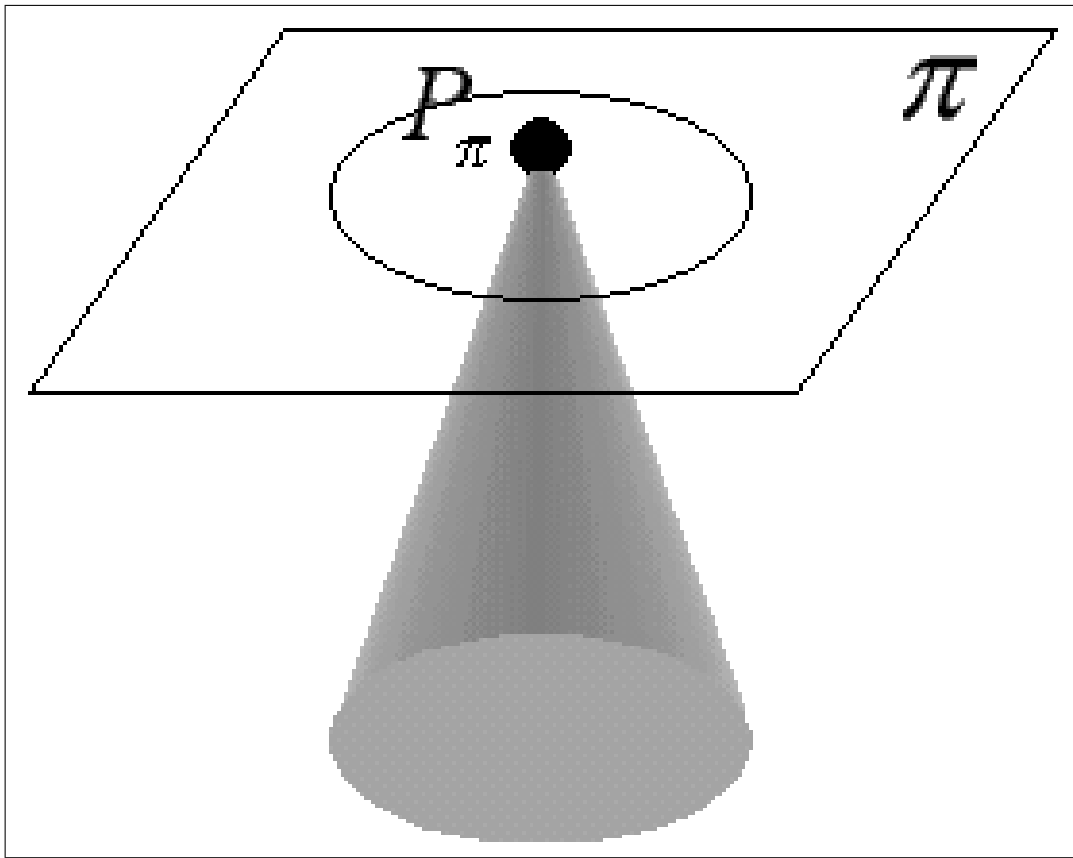


Figure 3.14: Cone Correlativo a uma cónica

e $\pi_{Q'}$ que se intersectam segundo a recta ℓ' , conjugada da recta ℓ relativamente ao complexo linear ($\mathbf{P3}$). Como os pontos P, P', Q e Q' estão em proporção harmónica, os seus planos polares também estão e, visto que os planos π_Q e $\pi_{Q'}$ são tangentes a $\hat{\mathcal{C}}$, podemos concluir que os planos $\pi_P, \pi_{P'}$ são conjugados em relação ao cone correlativo $\hat{\mathcal{C}}$.

■

P 19 ... Sejam ℓ e $\hat{\ell}$, duas rectas, conjugadas relativamente a uma cónica \mathcal{C} , e ℓ' e $\hat{\ell}'$, as respectivas conjugadas relativamente ao complexo linear \mathfrak{L} . Então ℓ' e $\hat{\ell}'$ são diâmetros conjugados do cone correlativo $\hat{\mathcal{C}}$.

– Dem...

Sejam ℓ e $\hat{\ell}$ duas rectas contidas no plano ϖ duma cónica \mathcal{C} e conjugadas relativamente a \mathcal{C} , isto é, conjugadas harmónicas em relação às tangentes \mathfrak{m} e \mathfrak{h} a \mathcal{C} traçadas pelo ponto $I = \ell \cap \hat{\ell}$. As rectas $\ell', \hat{\ell}'$, \mathfrak{m}' e \mathfrak{h}' , conjugadas respectivas relativamente ao complexo linear \mathfrak{L} , das rectas $\ell, \hat{\ell}, \mathfrak{m}$ e \mathfrak{h} constituem, tal como estas últimas, um feixe que está contido no plano polar, π_I , do ponto I e cujo vértice coincide com o do cone correlativo $\hat{\mathcal{C}}$, da cónica \mathcal{C} .

Além disso, $(\ell, \widehat{\ell}; \mathfrak{m}, \mathfrak{h}) = (\ell', \widehat{\ell}'; \mathfrak{m}', \mathfrak{h}')$ (P13) e, como as quatro primeiras rectas estão em proporção harmónica, as quatro últimas também estão. Mas, as rectas \mathfrak{m} e \mathfrak{h} são a intersecção de \mathcal{C} com o plano ϖ e portanto, podemos concluir que as rectas ℓ' e $\widehat{\ell}'$ são diâmetros conjugados do cone $\widehat{\mathcal{C}}$, uma vez que são conjugadas harmónicas em relação a \mathfrak{m} e \mathfrak{h} .

■

P 20 ... Num complexo linear, os planos polares dos pontos de uma circunferência \mathcal{C} , situada num plano perpendicular ao eixo ϵ do complexo, e cujo centro está nesse eixo, envolvem um cone de revolução $\widehat{\mathcal{C}}$, cujo eixo coincide com o eixo ϵ do complexo.

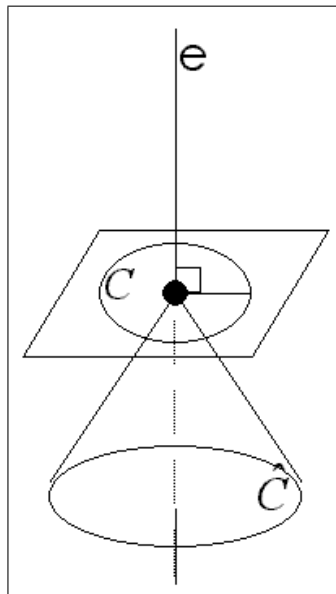


Figure 3.15: Cone Correlativo a uma cónica

– Dem...

Com efeito, os planos polares dos pontos pertencentes à circunferência \mathcal{C} envolvem um cone do segundo grau $\widehat{\mathcal{C}}$ (P15) cujo vértice, O , é o centro da circunferência. A conjugada da recta no infinito ℓ_∞ , do plano ϖ tem por conjugada o eixo ϵ do complexo (P2). Mas, o ponto O é conjugado, em relação à circunferência \mathcal{C} , de todo o ponto no infinito de ϖ que, por sua vez, é conjugado, em relação ao cone $\widehat{\mathcal{C}}$, a todo o plano que passe por ϵ (P18). Portanto, a recta ϵ é o diâmetro conjugado do plano ϖ , em relação ao cone $\widehat{\mathcal{C}}$ e, como é perpendicular a ϖ , é o eixo do cone $\widehat{\mathcal{C}}$. Por outro lado, dois diâmetros rectangulares da circunferência \mathcal{C} , são os seus próprios conjugados no complexo linear (P7), portanto são dois diâmetros conjugados do cone $\widehat{\mathcal{C}}$ (P19). Podemos então concluir que $\widehat{\mathcal{C}}$ é um cone de revolução, pois dois diâmetros conjugados quaisquer deste cone, são conjugados rectangulares no plano ϖ .

■

Resulta da propriedade precedente que, se um ponto, P , do sistema focal rodar em torno do eixo ϵ , mantém-se no seu plano polar, π_P , visto que este plano envolve um cone de revolução cujo eixo é ϵ . Logo, *um sistema focal e o complexo linear correspondente são invariantes sob toda a rotação em torno do seu eixo ϵ .*

Se considerarmos o conjunto de todos os planos diametrais, é claro que sob toda a translação paralela à direcção axial do complexo, os planos diametrais são enviados neles mesmos, assim como os feixes de rectas paralelas, contidas em cada um deles. Portanto, *um sistema focal e o complexo linear correspondente são invariantes sob toda a translação paralela à sua direcção axial.*

Usando as duas últimas afirmações concluímos, facilmente, que *todo o sistema focal e o complexo linear correspondente são invariantes sob toda a rotação em torno do eixo composta com uma translação associada a uma direcção paralela à direcção axial e, consequentemente, sob todo o deslocamento helicoidal em torno desse mesmo eixo.*

■

3.5.3 Propriedades métricas

Consideremos um complexo linear \mathfrak{L} , e seja ϵ o seu eixo. Dado um ponto P qualquer, representemos por:

- $d(P) = d(P; \epsilon)$ a distância de P ao eixo ϵ , e por:
- $\theta(P) = \angle(\pi_P; \epsilon)$, o ângulo entre o plano polar de P e o eixo ϵ .

Então:

P 21 ...

$$\boxed{d(P) \operatorname{tg} \theta(P) \equiv c} \quad (3.5.8)$$

onde c é uma constante, chamada o **parâmetro do complexo \mathfrak{L}** .

– Dem...

Tracemos, por P , uma perpendicular, ℓ , a ϵ e seja O o pé desta perpendicular. A recta ℓ faz parte do complexo (**P7**) e os planos polares dos seus pontos formam, rodando em torno de ℓ , um feixe que é homográfico a esta série de pontos. Então, podemos estabelecer a seguinte relação:

$$d(P) \cdot \tan \theta(P) + a \cdot d(P) + b \cdot \tan \theta(P) = c \quad (3.5.9)$$

Mas, o plano polar, π_{P_∞} , do ponto no infinito, P_∞ , de ℓ , passa por ϵ . Logo, para $d(P) = \infty$, temos $\tan \theta(P) = 0$, pelo que concluímos que $a = 0$.

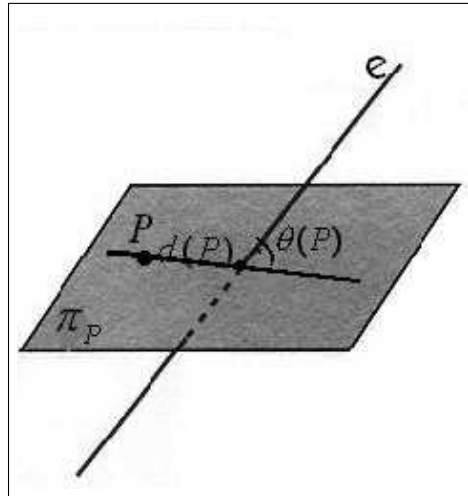


Figure 3.16:

Por outro lado, o plano polar, π_O de O é perpendicular a ϵ o que exige que $\tan \theta(P) = \infty$, para $d(P) = 0$. Portanto, a relação (3.5.9) reduz-se a:

$$d(P) \cdot \tan \theta(P) = c. \quad (3.5.10)$$

■

Dada uma recta ℓ qualquer, representemos por:

- $d(\ell) = d(\ell; \epsilon)$ a distância de ℓ ao eixo ϵ , e por:
- $\theta(\ell) = \angle(\ell; \epsilon)$, o ângulo convexo entre a recta ℓ e o eixo ϵ .

Então:

P 22 ... Se ℓ e ℓ' são duas rectas conjugadas relativamente ao complexo \mathfrak{L} , então:

$$\boxed{\frac{d(\ell)}{d(\ell')} = \frac{\operatorname{tg} \theta(\ell)}{\operatorname{tg} \theta(\ell')}} \quad (3.5.11)$$

– Dem...

Sejam ℓ e ℓ' duas rectas conjugadas relativamente ao complexo \mathcal{L} . A perpendicular comum, τ , a ℓ e ℓ' pertence ao complexo (P10). O plano polar, π_P , do ponto $P = \tau \cap \ell$ passa por τ e por ℓ' , logo $\theta(P) = \theta(\ell')$. Do mesmo modo, o plano $\pi_{P'}$ do ponto $P' = \tau \cap \ell'$ passa por τ e por ℓ , portanto $\theta(P') = \theta(\ell)$. Logo, por (P21),

$$d(\ell) \tan \theta(\ell') = d(\ell') \tan \theta(\ell) \quad (3.5.12)$$

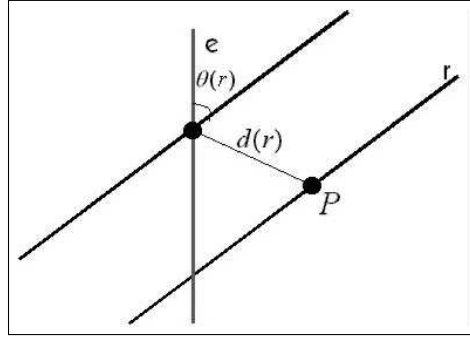


Figure 3.17: Posição relativamente ao eixo ϵ , de rectas conjugadas.

ou

$$\boxed{\frac{d(\ell)}{d(\ell')} = \frac{\text{tg}\theta(\ell)}{\text{tg}\theta(\ell')}} \tag{3.5.13}$$

■

P 23 ... A distância $d(\mathbf{r})$, de uma recta do complexo $\mathbf{r} \in \mathcal{L}$, ao eixo ϵ , é inversamente proporcional à tangente do ângulo convexo $\theta(\mathbf{r})$, entre \mathbf{r} e ϵ :

$$\boxed{d(\mathbf{r})\text{tg}\theta(\mathbf{r}) \equiv c} \tag{3.5.14}$$

onde c é o parâmetro do complexo.

– Dem...

Sejam ℓ a perpendicular comum à recta $\mathbf{r} \in \mathcal{L}$ e ao eixo ϵ do complexo, $P = \ell \cap \mathbf{r}$ e $O = \ell \cap \epsilon$. A recta \mathbf{r} , por hipótese, e a recta ℓ , por construção, pertencem ao complexo e, como ambas passam pelo ponto P , o plano $\pi_P = \pi(\ell, \mathbf{r})$ é o plano polar do ponto P , logo $\theta(\mathbf{r}) = \theta(P)$. Além disso, visto que $d(\mathbf{r}) = d(P)$, por (P20) temos a igualdade pretendida:

$$d(\mathbf{r}) \cdot \tan \theta(\mathbf{r}) = c. \tag{3.5.15}$$

■

3.6 Complexo Tetraédrico

3.6.1 Definição

O **complexo tetraédrico** é um complexo de linhas, do segundo grau, que pode ser definido geomêtricamente do seguinte modo. Seja Δ o tetraedro de referência, com vértices $\{V_i\}_{i=1,\dots,4}$ e faces determinadas pelos planos $\{\pi_i\}_{i=1,\dots,4}$ e seja k uma constante ($\neq 0, 1, \infty$). O conjunto \mathcal{T} de todas as rectas $\ell \subset \mathbb{P}^3$, tais que a razão anarmônica de $P_i = \ell \cap \pi_i$, $i = 1, \dots, 4$ é constante e igual a k , é chamado um complexo tetraédrico.

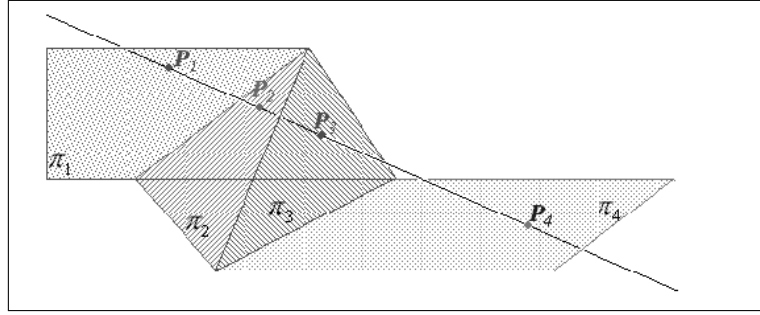


Figure 3.18:

3.6.2 Equação do Complexo Tetraédrico

Seja $\ell = P \vee Q$ uma recta do complexo. Pondo $P = [\mathbf{x}] = [x^i]$ e $Q = [\mathbf{y}] = [y^i]$, vem que $\ell = [\mathbf{p}] = [p^{ij} = x^i y^j - x^j y^i]$. Um ponto genérico desta linha será da forma $\mathbf{x} - \lambda \mathbf{y}$ e o valor $\lambda = \frac{y^i}{x^i}$ corresponde ao ponto de intersecção, P_i , da recta ℓ com o plano coordenado $x^i = 0$. Logo:

$$\begin{aligned} \left(\frac{y^1}{x^1}, \frac{y^2}{x^2}, \frac{y^3}{x^3}, \frac{y^4}{x^4} \right) &= \frac{\frac{y^1}{x^1} - \frac{y^3}{x^3} \frac{y^2}{x^2} - \frac{y^4}{x^4}}{\frac{y^2}{x^2} - \frac{y^3}{x^3} \frac{y^1}{x^1} - \frac{y^4}{x^4}} \\ &= \frac{p^{13} p^{42}}{p^{14} p^{23}} \\ &\equiv k \end{aligned} \quad (3.6.1)$$

Portanto a equação do complexo pode ser escrita como:

$$p^{13} p^{42} + k p^{14} p^{23} = 0 \quad (3.6.2)$$

Por outro lado, atendendo a que devemos ter:

$$\Omega(\mathbf{p}) = p^{12} p^{34} + p^{13} p^{42} + p^{14} p^{23} = 0 \quad (3.6.3)$$

podemos escrever (3.6.2) em forma mais simétrica. De facto, podemos substituir (3.6.2) pela combinação linear de (3.6.2) e (3.6.3):

$$\alpha p^{12} p^{34} + (\alpha - \beta) p^{13} p^{42} + (\alpha - \beta k) p^{14} p^{23} = 0 \quad (3.6.4)$$

ou ainda por:

$$a p^{14} p^{23} + b p^{24} p^{31} + c p^{34} p^{12} = 0 \quad (3.6.5)$$

Inversamente, qualquer equação desta forma, na qual $(c - a)(a - b)(c - b) \neq 0$, representa um complexo tetraédrico. De facto, temos:

$$\begin{cases} 1 - \frac{\beta}{\alpha} = \frac{b}{c} \\ 1 - \frac{\beta}{\alpha} k = \frac{a}{c} \end{cases} \Leftrightarrow k = \frac{c - a}{c - b} = (a, b; c, \infty) \quad (3.6.6)$$

Como $k \neq 0, 1, \infty$, temos de supor $(c - a)(a - b)(c - b) \neq 0$, caso contrário, o complexo degenera em dois complexos lineares singulares.

Note que a equação (3.6.2) pode ser escrita na forma:

$$\pi^{13}\pi^{42} + k\pi^{14}\pi^{23} = 0 \quad (3.6.7)$$

o que significa que a razão anarmónica dos quatro pontos de intersecção de uma recta ℓ do complexo \mathcal{T} , com as faces do tetraedro de referência, é igual à razão anarmónica dos quatro planos que unem ℓ aos quatro vértices do tetraedro de referência.

Portanto o complexo tetraédrico \mathcal{T} admite a definição correlativa seguinte: *\mathcal{T} é constituído pelas rectas tais que os planos passando por uma qualquer delas e pelos quatro vértices do tetraedro de referência, têm uma razão anarmónica constante ($\neq 0, 1, \infty$).*

Por outras palavras:

$$(\ell \cap \pi_1, \ell \cap \pi_2; \ell \cap \pi_3, \ell \cap \pi_4) = (\ell \vee V_1, \ell \vee V_2; \ell \vee V_3, \ell \vee V_4) = k \quad (3.6.8)$$

pelo que podemos concluir que o *dual dum complexo tetraédrico ainda é um complexo tetraédrico*. Por outro lado, atendendo à primeira definição dada para um complexo tetraédrico, podemos ainda afirmar que a *imagem dum complexo tetraédrico, por uma homografia, é ainda um complexo tetraédrico*.

3.6.3 Modos de Geração de um Complexo Tetraédrico

- A definição de complexo tetraédrico conduz-nos imediatamente a um modo de geração muito simples: *o complexo tetraédrico é o lugar geométrico das rectas ℓ que se apoiam sobre as rectas correspondentes de dois feixes planos de rectas que se correspondem homograficamente*¹.

Com efeito, sejam A e B os centros dos feixes planos de rectas. Consideremos a recta \mathfrak{r} de intersecção dos planos dos dois feixes. A correspondência homográfica entre os dois feixes determina uma homografia nessa recta \mathfrak{r} - sejam C e D os pontos fixos (em \mathfrak{r}) dessa homografia (ver a figura ??), de tal forma que $\mathfrak{r} = C \vee D$.

Consideremos agora uma recta qualquer $\ell \in \mathbb{P}^3$, e as rectas correspondentes \mathfrak{r}_1 e \mathfrak{r}_2 , de cada um dos feixes, nas quais se apoia a recta ℓ . Sejam $X_1 = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{r}_1$ e $X_2 = \mathfrak{r} \cap \mathfrak{r}_2$. Então:

$$(\ell \vee A, \ell \vee B; \ell \vee C, \ell \vee D) = (X_1, X_2; C, D) \equiv \text{constante} \quad (3.6.9)$$

Consideremos ainda um segundo método de geração do complexo tetraédrico:

- *O complexo tetraédrico é o lugar geométrico das rectas que unem pontos que se correspondem por uma homografia em \mathbb{P}^3* ².

¹Supômos ainda que os centros dos feixes não pertencem à recta de intersecção dos seus planos.

²Supômos que a homografia tem quatro pontos fixos que formam um tetraedro de referência

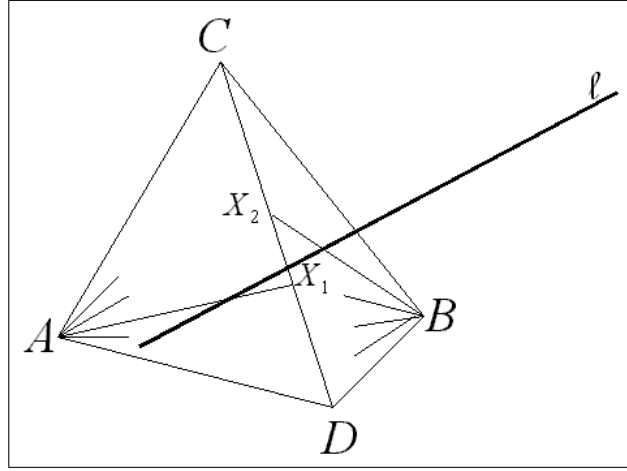


Figure 3.19:

Sob a hipótese referida, de que a homografia tem quatro pontos fixos, que formam um tetraedro de referência, as coordenadas (relativamente a esse tetraedro) de dois pontos P e Q que se correspondem por essa homografia, são:

$$P = [x^i] \quad Q = [y^i] = [\lambda_i x^i]$$

Portanto, para a recta que os une, $\ell = P \vee Q$, teremos:

$$\begin{cases} p^{12} = (\lambda_2 - \lambda_1) x^1 x^2 & p^{34} = (\lambda_4 - \lambda_3) x^3 x^4 \\ p^{13} = (\lambda_3 - \lambda_1) x^1 x^3 & p^{42} = (\lambda_2 - \lambda_4) x^4 x^2 \\ p^{14} = (\lambda_4 - \lambda_1) x^1 x^4 & p^{23} = (\lambda_3 - \lambda_2) x^2 x^3 \end{cases} \quad (3.6.10)$$

Pretende-se agora determinar as condições às quais devem satisfazer os p^{ij} , para que as equações precedentes possam ser resolvidas em ordem a x^1, x^2, x^3 e x^4 .

De facto, é possível substituir (3.6.10) por um sistema equivalente formado pelas três equações da primeira coluna de (3.6.10) e pelas seguintes:

$$\begin{aligned} (x^1)^2 &= \frac{\lambda_3 - \lambda_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_1)} \frac{p^{12} p^{13}}{p^{23}} \\ &= \frac{\lambda_4 - \lambda_3}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_4 - \lambda_1)} \frac{p^{13} p^{14}}{p^{34}} \\ &= \frac{\lambda_2 - \lambda_4}{(\lambda_4 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_4)} \frac{p^{14} p^{12}}{p^{42}} \end{aligned} \quad (3.6.11)$$

Tendo determinado x^1 através destas equações (supostas compatíveis), x^2, x^3 e x^4 serão calculados através das equações da primeira coluna de (3.6.10). Mas as condições de compatibilidade de (3.6.11) exprimem-se por:

$$\frac{p^{12} p^{34}}{p^{14} p^{23}} = \frac{\lambda_2 - \lambda_1}{\lambda_4 - \lambda_1} \cdot \frac{\lambda_4 - \lambda_3}{\lambda_3 - \lambda_2} = -(\lambda_1, \lambda_3; \lambda_2, \lambda_4) \quad (3.6.12)$$

$$\frac{p^{13} p^{42}}{p^{14} p^{23}} = \frac{\lambda_2 - \lambda_4}{\lambda_4 - \lambda_1} \cdot \frac{\lambda_3 - \lambda_1}{\lambda_3 - \lambda_2} = -(\lambda_1, \lambda_2; \lambda_3, \lambda_4) \quad (3.6.13)$$

e reduzem-se a uma só, visto que $\Omega(\mathbf{p}) = 0$.

Mas, a segunda destas relações é, precisamente, a equação de um complexo tetraédrico com:

$$k = (\lambda_1, \lambda_2; \lambda_3, \lambda_4) \quad (3.6.14)$$

Como já vimos, o dual de um complexo tetraédrico é um complexo tetraédrico, e por isso podemos afirmar que *as rectas ℓ de intersecção de dois planos que se correspondem homograficamente, constituem um complexo tetraédrico.*

Mostremos ainda que, sendo dada uma homografia h em \mathbb{P}^3 , *as rectas que intersectam as suas transformadas, constituem um complexo tetraédrico.*

De facto, sejam ℓ e $\ell' = h(\ell)$ duas rectas correspondentes e $P' = \ell \cap \ell'$. Ao ponto P' , considerado como um ponto de ℓ' , corresponde um ponto $P = h^{-1}(P') \in \ell$. Portanto a recta ℓ une dois pontos h -correspondentes e, conseqüentemente, pertence a um complexo tetraédrico. De igual modo se mostra que a recta ℓ' pertence a um complexo tetraédrico.

Por outro lado, dado um complexo tetraédrico \mathcal{T} , constituído por todas as rectas que unem um ponto P ao seu correspondente homográfico $P' = h(P)$, toda a recta do complexo, como por exemplo $\ell = P \vee P'$, intersecta necessariamente a sua transformada homográfica $\ell' = h(\ell)$ no ponto $P' = h(P)$.

Capítulo 4

Aplicações

4.1 Complexo de rectas nulas $\mathcal{N}_{\mathfrak{T}}$

Seja $\mathfrak{T} = (\vec{\omega}, \vec{M}(o))$ um torsor cujos elementos de redução, num ponto o , são $\vec{\omega} \in \vec{E}$ e $\vec{M}(o) \in \vec{E}_o$.

Seja D uma recta afim em \mathcal{E} . Se o campo de momentos $\mathbf{M} = \mathbf{M}_{\mathfrak{T}}$, é perpendicular a D , num certo ponto $p \in D$, então \vec{M} será também perpendicular a D , num qualquer outro ponto $q \in D$. Com efeito, pela propriedade de equiprojectividade de $\vec{M} = \vec{M}_{\mathfrak{T}}$, temos que:

$$0 = \vec{pq} \cdot \vec{M}(p) = \vec{pq} \cdot \vec{M}(q)$$

Uma tal recta D diz-se uma **recta de momento nulo do torsor** \mathfrak{T} , ou simplesmente uma **recta nula de** \mathfrak{T} , e o conjunto de todas essas rectas diz-se o **complexo de rectas nulas do torsor** \mathfrak{T} , e nota-se por:

$$\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathfrak{T}}$$

O conjunto das rectas nulas de \mathfrak{T} , que passam por um mesmo ponto $p \in \mathcal{E}$, formam um plano π_p , que contem p , e correlativamente, o conjunto de todas as rectas nulas que estão num mesmo plano π , passam todas por um mesmo ponto $p_{\pi} \in \pi$. Desta forma fica definida uma correlação involutiva:

Pontos de \mathcal{E}	\longleftrightarrow	Planos afins de \mathcal{E}
p	\longrightarrow	π_p
p_{π}	\longleftarrow	π

- O plano π_p diz-se o **plano focal** ou o **plano polar** do ponto p .
- O ponto p_{π} diz-se o **fóco** ou o **pólo** do plano π .

Note que $p \in \pi_p$ e que $p_{\pi} \in \pi$, isto é, um ponto p pertence sempre ao seu plano polar e, correlativamente, o pólo de um plano pertence sempre a esse plano¹. Note ainda que, por

¹a correlação é simplética

definição, todas as rectas do plano π que passam no seu pólo p_π , pertencem ao complexo $\mathcal{N}_{\mathfrak{T}}$ (ou, de forma equivalente, toda a recta que passa num ponto p e que está contida no plano polar π_p , pertence ao complexo).

Se designarmos por π_∞ o plano do infinito, então o respectivo pólo $p_\infty = p_{\pi_\infty}$ (que é um ponto no infinito), define uma direcção bem determinada no espaço, a que chamamos a **direcção axial** do complexo $\mathcal{N}_{\mathfrak{T}}$. A um plano cujo pólo esteja no infinito, chamaremos um **plano diametral**.

O complexo linear $\mathcal{N}_{\mathfrak{T}}$ define pois um conjunto de pares:

$$\mathcal{F}_{\mathfrak{T}} = \{(p, \pi_p), \quad p \in \mathcal{E}\}$$

(ou de forma equivalente $\{(p_\pi, \pi)\}$), constituídos por um ponto $p \in \mathcal{E}$ e pelo respectivo plano polar π_p , a que chamamos o **sistema focal** associado ao complexo $\mathcal{N}_{\mathfrak{T}}$.

4.1.1 Equação do complexo $\mathcal{N}_{\mathfrak{T}}$

Vamos caracterizar uma recta nula de \mathfrak{T} , em função dos elementos de redução $\vec{\omega}$ e $\vec{M}(o)$ de \mathfrak{T} , num ponto o , fixo de forma arbitrária. Seja \vec{u} um vector director unitário de D , e $p \in D$ uma ponto arbitrário de D . Então $D \in \mathcal{N}_{\mathfrak{T}}$ sse:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{u} \cdot \vec{M}(p) \\ &= \vec{u} \cdot (\vec{M}(o) + \vec{\omega} \times \vec{op}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{M}(o) + \vec{u} \cdot (\vec{\omega} \times \vec{op}) \\ &= \vec{u} \cdot \vec{M}(o) + \vec{\omega} \cdot (\vec{op} \times \vec{u}) \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Fixemos um referencial ortonormado positivo $\{o; \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$, e seja:

$$\begin{cases} \vec{\omega} &= p\hat{i} + q\hat{j} + r\hat{k} \\ \vec{M}(o) &= \xi\hat{i} + \eta\hat{j} + \zeta\hat{k} \end{cases} \quad (4.1.2)$$

Suponhamos ainda que:

$$\vec{u} = X\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$$

e consideremos as projecções do momento do vector deslizante (D, \vec{u}) , relativamente ao ponto o , em cada um dos eixos do referencial anterior:

$$\begin{aligned} L &= (\vec{op} \times \vec{u}) \cdot \hat{i} = yZ - zY \\ M &= (\vec{op} \times \vec{u}) \cdot \hat{j} = zX - xZ \\ N &= (\vec{op} \times \vec{u}) \cdot \hat{k} = xY - yX \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

onde:

$$p = o + x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$$

é um ponto arbitrário de D . Os números (X, Y, Z, L, M, N) chamam-se **coordenadas de Plücker** da recta D . Satisfazem a relação fundamental:

$$\boxed{\Omega \stackrel{\text{def}}{=} LX + MY + NZ = 0} \quad (4.1.4)$$

uma vez que $\vec{\mathbf{u}} = (X, Y, Z)$ é perpendicular a $\mathbf{M}((D, \vec{\mathbf{u}}); o) = \vec{o\tilde{p}} \times \vec{\mathbf{u}} = (L, M, N)$.

A equação (4.1.1) fica então na forma:

$$\begin{aligned} 0 &= \vec{\mathbf{u}} \cdot \vec{\mathbf{M}}(o) + \vec{\omega} \cdot (\vec{o\tilde{p}} \times \vec{\mathbf{u}}) \\ &= (X, Y, Z) \cdot (\xi, \eta, \zeta) + (\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}) \cdot (L, M, N) \\ &= \xi X + \eta Y + \zeta Z + \mathfrak{p}L + \mathfrak{q}M + \mathfrak{r}N \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

isto é:

$$\boxed{\xi X + \eta Y + \zeta Z + \mathfrak{p}L + \mathfrak{q}M + \mathfrak{r}N = 0} \quad (4.1.6)$$

que é uma equação linear nas coordenadas de Plücker (X, Y, Z, L, M, N) da recta D - a chamada **equação do complexo** $\mathcal{N}_{\vec{\mathbf{u}}}$. Esta equação pode ainda ser escrita na forma:

$$\boxed{\xi X + \eta Y + \zeta Z + \mathfrak{p}(yZ - zY) + \mathfrak{q}(zX - xZ) + \mathfrak{r}(xY - yX) = 0} \quad (4.1.7)$$

4.1.2 Equação do plano polar

Vejamus qual a equação do plano polar π_{p_o} , do ponto p_o cujas coordenadas, no referencial $\{o; \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$, são (x_o, y_o, z_o) . Na equação (4.1.7), o ponto $(x = x_o, y = y_o, z = z_o)$ estará fixo e portanto X, Y, Z devem satisfazer:

$$\xi X + \eta Y + \zeta Z + \mathfrak{p}(y_o Z - z_o Y) + \mathfrak{q}(z_o X - x_o Z) + \mathfrak{r}(x_o Y - y_o X) = 0$$

Se designarmos por (x, y, z) as coordenadas correntes de um ponto do plano polar π_{p_o} , a sua equação, obtém-se substituindo X, Y, Z , respectivamente por $x - x_o, y - y_o$ e $z - z_o$. Calculando, obtemos a equação seguinte:

$$\pi_{p_o} : \boxed{(\xi + \mathfrak{q}z_o - \mathfrak{r}y_o)(x - x_o) + (\eta + \mathfrak{r}x_o - \mathfrak{p}z_o)(y - y_o) + (\zeta + \mathfrak{p}y_o - \mathfrak{q}x_o)(z - z_o) = 0} \quad (4.1.8)$$

4.1.3 Complexo de normais às trajectórias dos pontos de um espaço móvel, num dado instante t .

Seja I um intervalo aberto de \mathbb{R} , contendo 0 no seu interior, e \mathfrak{M} e \mathfrak{F} , duas cópias de um mesmo espaço afim Euclideano orientado \mathcal{E} , a que chamamos o **espaço móvel** e o **espaço fixo**, respectivamente.

- **Definição 4.1.1** ... Um movimento a um parâmetro t , de \mathfrak{M} relativamente a \mathfrak{F} , é uma aplicação de classe C^∞ :

$$\begin{aligned} \Phi : I \times \mathfrak{M} &\longrightarrow \mathfrak{F} \\ (t, P) &\longmapsto \Phi(t, P) \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

tal que:

- $\Phi(0, \cdot) = \text{Id}_{\mathcal{E}}$.
- para cada $t \in I$, a aplicação:

$$\begin{aligned} g_t : \mathfrak{M} &\longrightarrow \mathfrak{F} \\ P &\longmapsto g_t(P) = \Phi(t, P) \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

é uma isometria afim positiva de \mathcal{E} , isto é, g_t preserva a orientação e a distância definidas em \mathcal{E} :

$$d(g_t(P), g_t(Q)) = d(P, Q), \quad \forall t \in I, \forall P, Q \in \mathfrak{m}$$

Um tal movimento notar-se-á por $(\mathfrak{M}/\mathfrak{F}; \Phi)$, ou por $(\mathfrak{M}/\mathbf{g}F; g_t)$.

Cada “**partícula**” ou “**molécula**” $P \in \mathfrak{M}$, descreve um movimento em \mathfrak{F} dado por:

$$\begin{aligned} p : I &\longrightarrow \mathfrak{F} \\ t &\longmapsto p(t) = g_t(P) \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

a que chamamos o **movimento (absoluto) da partícula $P \in \mathfrak{M}$, no espaço fixo \mathfrak{F}** .

Dado um movimento $(\mathfrak{M}/\mathfrak{F}; g_t)$, podemos definir um campo de vectores (dependente do tempo) $\vec{\mathbf{v}}_t$ em \mathfrak{F} , da seguinte forma - fixemos um instante $t \in I$, e um ponto arbitrário $p \in \mathfrak{F}$. Seja:

$$\boxed{P_t = g_t^{-1}(p) \in \mathfrak{M}} \quad (4.1.12)$$

o chamado **t -coincidente de p em \mathfrak{M}** , isto é, a partícula de \mathfrak{M} , que, no instante t , ocupa a posição $p \in \mathfrak{F}$, no espaço fixo. Definimos então o campo de vectores $\vec{\mathbf{v}}_t$, em \mathfrak{F} , através de:

$$\boxed{\vec{\mathbf{v}}_t(p) \stackrel{\text{def}}{=} \left. \frac{\partial}{\partial \tau} \right|_{\tau=t} g_\tau(P_t)} \quad (4.1.13)$$

Portanto $\vec{\mathbf{v}}_t(p)$ é a velocidade, no instante t , do movimento (absoluto) da partícula $P_t \in \mathfrak{M}$, cuja posição no instante t é o ponto $p \in \mathfrak{F}$.

Uma propriedade importante deste campo $\vec{\mathbf{v}}_t$, é que é um **campo equiprojectivo**, e portanto um **torsor**.

Seja:

$$r_t = g_t(\mathcal{R}) = \{g_t(O) = a_t; \hat{\mathbf{i}}(t) = \mathbf{R}_t(\mathbf{I}), \hat{\mathbf{j}}(t) = \mathbf{R}_t(\mathbf{J}), \hat{\mathbf{k}}(t) = \mathbf{R}_t(\mathbf{K})\}$$

um referencial móvel para \mathcal{E} . Então, se:

$$\vec{\mathbf{\Omega}}(t) = \mathbf{p}(t) \hat{\mathbf{i}}(t) + \mathbf{q}(t) \hat{\mathbf{j}}(t) + \mathbf{r}(t) \hat{\mathbf{k}}(t) \quad (4.1.14)$$

é a expressão do vector de rotação instantânea, expresso na base móvel, virá então, para o campo de velocidades, expresso na base móvel, e no instante t :

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_t(x, y, z) &= \xi(t) \hat{\mathbf{i}}(t) + \eta(t) \hat{\mathbf{j}}(t) + \zeta(t) \hat{\mathbf{k}}(t) + \\ &+ \left(\mathbf{p}(t) \hat{\mathbf{i}}(t) + \mathbf{q}(t) \hat{\mathbf{j}}(t) + \mathbf{r}(t) \hat{\mathbf{k}}(t) \right) \times \left(x \hat{\mathbf{i}}(t) + y \hat{\mathbf{j}}(t) + z \hat{\mathbf{k}}(t) \right) \end{aligned}$$

isto é:

$$\mathbf{V}_t(x, y, z) = \begin{bmatrix} V_x = \xi(t) + \mathbf{q}(t)z - \mathbf{r}(t)y \\ V_y = \eta(t) + \mathbf{r}(t)x - \mathbf{p}(t)z \\ V_z = \zeta(t) + \mathbf{p}(t)y - \mathbf{q}(t)x \end{bmatrix}_{r_t} \quad (4.1.15)$$

onde pusemos:

$$\overline{a_t \vec{p}} = x \widehat{\mathbf{i}}(t) + y \widehat{\mathbf{j}}(t) + z \widehat{\mathbf{k}}(t)$$

isto é, x, y, z são as componentes de um ponto $p \in \mathcal{E}$, relativamente ao referencial móvel $r_t = \{o = a_t; \widehat{\mathbf{i}}, \widehat{\mathbf{j}}, \widehat{\mathbf{k}}\}$ (omitimos t , por simplicidade).

Portanto as componentes do tursor $\mathbf{V} = \mathbf{V}_t$, no instante t , são a sua resultante geral, que é o vector de rotação instantânea $\overrightarrow{\Omega} = \overrightarrow{\Omega}_t$, e o momento em o , $\mathbf{V}_t(0, 0, 0) = \mathbf{R}^{-1}(\dot{a}_t) = (\xi, \eta, \zeta)_{r_t}$, que é a velocidade da origem do referencial móvel $o = a_t$, expressa nesse mesmo referencial.

O complexo $\mathcal{N} = \mathcal{N}_{\mathbf{V}}$, é constituído por todas as rectas de \mathcal{E} que são perpendiculares à velocidade de um dos seus pontos (e portanto, a qualquer dos seus pontos).

Dois casos são possíveis:

- $\overrightarrow{\Omega}_t \neq \overrightarrow{\mathbf{0}}$ - a rotação instantânea não é nula (no instante t) ... o movimento não é uma translação instantânea, e o sistema $(\overrightarrow{\Omega}_t, \overrightarrow{\mathbf{V}}_t(o))$ admite um eixo central $\Delta = \Delta_t$, que é o eixo instantâneo do movimento.

Escolhamos a origem do referencial $o \in \Delta$, e sejam $(\overrightarrow{\Omega}_t, \overrightarrow{\mathbf{V}}_t(o) = h \overrightarrow{\Omega}_t)$ os elementos de redução de $\overrightarrow{\mathbf{V}}_t$, ao eixo central.

Diremos que Δ é o **eixo do complexo** e que h é o seu **passo**.

Se $\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(o) = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ ou se $h = 0$, temos o que se chama um **complexo especial** - o movimento é uma rotação instantânea, e as rectas do complexo são as que intersectam o eixo Δ do complexo. O plano polar de um ponto p é o plano que contem p e o eixo Δ do complexo.

- $\overrightarrow{\Omega}_t = \overrightarrow{\mathbf{0}}$ - a rotação instantânea é nula (no instante t) ... Como $\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(p) = \overrightarrow{\mathbf{V}}_t(o) + \overrightarrow{\Omega} \times \overline{op}$, vemos que $\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(p) \equiv \overrightarrow{\mathbf{V}}_t(o), \forall p \in \mathcal{E}$, e o movimento é uma translação instantânea. As rectas do complexo \mathcal{N} são todas as que são perpendiculares ao vector constante $\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(o)$. Temos um **complexo especial** - todas as rectas do complexo intersectam a recta do infinito do plano perpendicular a $\overrightarrow{\mathbf{V}}_t(o)$, que pode ser considerada como o eixo do complexo.

4.1.4 Equação reduzida do complexo

Escolhamos o referencial móvel r_t , no instante t , de tal forma que o eixo dos zz coincida com o eixo instantâneo Δ , do movimento. Temos então que:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\Omega} &= \omega \widehat{\mathbf{k}}, & \text{isto é } \mathbf{p} = 0 = \mathbf{q} \text{ e } \mathbf{r} = \omega \\ \overrightarrow{\mathbf{V}}_t(o) &= h\omega \widehat{\mathbf{k}}, & \text{isto é } \xi = 0 = \eta \text{ e } \zeta = h\omega \end{aligned} \quad (4.1.16)$$

e portanto, por (4.1.15):

$$V_x = -\omega y, \quad V_y = \omega x, \quad V_z = h\omega \quad (4.1.17)$$

e a equação do complexo será (ver (4.1.6)):

$$\boxed{h\omega Z + \omega N = 0} \quad (4.1.18)$$

ou (ver (4.1.7)):

$$\boxed{h\omega Z + \omega(xY - yX) = 0} \quad (4.1.19)$$

O eixo do complexo é o eixo dos zz . O caso geral é quando $\omega \neq 0$ e $h \neq 0$, isto é, quando o movimento não se reduz a uma translação ou a uma rotação pura. Se o complexo for especial, temos os dois casos seguintes:

- $\omega \neq 0$, mas $h = 0$. A equação reduzida do complexo será $N = 0$.
- $\omega = 0$, mas $h \neq 0$. A equação reduzida do complexo será $Z = 0$, escolhendo o eixo dos zz paralelo ao vector constante $\vec{V}_t(o)$.

A equação (4.1.8), do plano polar do ponto $p_o = (x_o, y_o, z_o)_{rt}$, fica com o aspecto seguinte:

$$-\omega y_o(x - x_o) + \omega x_o(y - y_o) + h\omega(z - z_o) = 0$$

isto é:

$$\pi_{p_o} : \quad \boxed{-y_o x + x_o y + h(z - z_o) = 0} \quad (4.1.20)$$

que é perpendicular a $(-y_o, x_o, h)$.

Seja π um plano qualquer, e p_1, p_2 dois pontos quaisquer nesse plano. Os planos polares π_1 e π_2 de p_1 e p_2 , respectivamente, intersectam o plano π segundo duas rectas D_1 e D_2 , que pertencem ao complexo \mathcal{N} , e que se intersectam num certo ponto $p \in \pi$. A velocidade de p , no instante t , sendo perpendicular a D_1 e a D_2 , é portanto perpendicular a π . Este ponto p é o pólo de π .

4.2 Triangulação de uma trajectória sobre uma linha recta

Consideremos uma situação na qual um cenário 3D, contendo objectos (pontos) estáticos e em movimento, é observado através de uma câmara monocular em movimento. Uma questão natural a colocar neste contexto, que é discutida em pormenor em [AS], é a seguinte - será possível reconstruir as coordenadas 3D de um (único) ponto de um objecto em movimento? As medições disponíveis são apenas as “*linhas de visão*” (raios ópticos) e, portanto, numa situação geral, essa reconstrução é na prática impossível, se não se impuserem restrições adicionais.

De facto, quando a trajectória do ponto em movimento é rectilínea, o problema da reconstrução 3D a partir das linhas de visão é solúvel, como se mostra em [AS]. Este caso,

embora sendo o mais simples é, por outro lado, de grande interesse prático, numa série de aplicações como, por exemplo, pessoas, automóveis ou aviões, que tendem a mover-se ao longo de linhas rectas. Assim como é válido em diversas situações, para intervalos de tempo relativamente pequenos.

O problema da triangulação de uma trajectória rectilínea, define-se então do seguinte modo ([AS]): “consideremos um cenário 3D, contendo pontos em movimento, cada ponto movendo-se ao longo de trajectória rectilínea desconhecida, cenário esse que é observado por um certo número k de câmaras fixas (ou por uma única câmara em movimento conhecido). O problema consiste em reconstruir a trajectória (recta 3D) de cada ponto, a partir das tomadas de vista 2D, transversais às linhas de visão, supostas conhecidas.

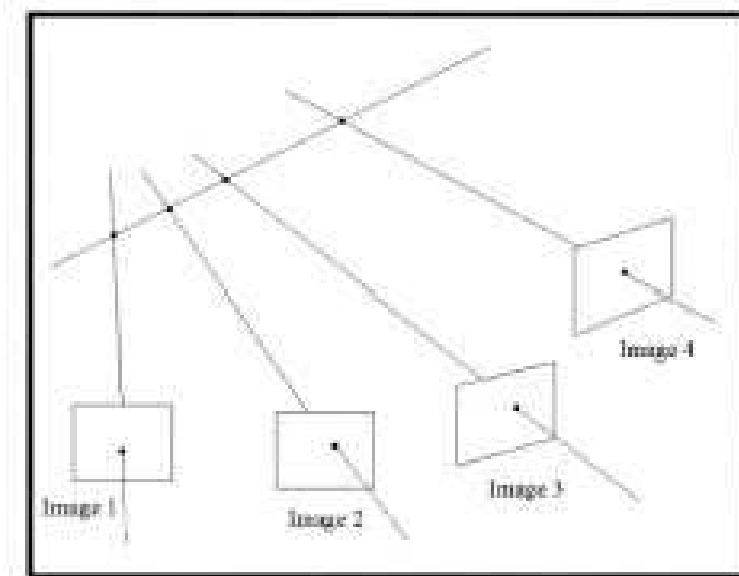


Figure 4.1: Um ponto desloca-se ao longo de uma recta enquanto a câmara se move

4.2.1 Interpretação Geométrica

O contexto geométrico em que o problema anterior pode ser formulado e resolvido é o de *complexo linear singular ou especial*, cujo eixo é a trajectória ℓ (recta 3D, desconhecida) de um dos pontos observados, e que é constituído por todas as rectas (raios ópticos, ou linhas de visão, que partem da câmara de observação) que intersectam a recta ℓ , em cada instante de observação (conhecido). Suponhamos que existem k tomadas de vista do ponto em movimento (ou que existem k câmaras fixas). A questão que se coloca agora é a seguinte - qual é o valor mínimo de k , de modo a obtermos um único complexo linear que satisfaça as condições pretendidas?

Claramente, se $k = 2$, temos infinitas rectas ℓ que intersectam os dois raios. Para $k = 3$, para cada ponto do primeiro raio, existe uma recta que intersecta simultaneamente esse raio e os dois restantes (o ponto e o segundo raio definem um plano que intersecta o terceiro raio num único ponto), portanto continuamos a ter infinitas soluções (ver a figura 4.3).

Para $k = 4$, três dos raios definem uma quádrlica regrada (formada pelo conjunto das linhas determinadas pelo movimento do ponto ao longo do primeiro raio, considerado antes), que intersecta o quarto raio em dois pontos distintos, pelo que temos duas soluções. Logo, para $k = 5$, existe uma única solução.

Pretendemos agora determinar a recta ℓ , dados $k \geq 5$ raios ópticos e conhecidas as matrizes 3×4 , M_i , de projecção e ainda as projecções p_i , $i = 1, \dots, k$, do ponto móvel P em cada um dos planos da câmara.

Sejam P e Q dois quaisquer pontos de ℓ e seja ℓ_i a projecção de ℓ no plano i da câmara. Temos então a relação de incidência $p_i^T \ell_i = 0$, uma vez que $p_i \in \ell_i$. Para representar a recta ℓ usamos as respectivas coordenadas de Pluecker:

$$\begin{aligned} \ell &= P \wedge Q \\ &= [1, x_P, y_P, z_P] \wedge [1, x_Q, y_Q, z_Q] \\ &= [x_P - y_Q, y_P - y_Q, z_P - z_Q, x_P y_Q - y_P x_Q, x_P z_Q - z_P x_Q, y_P z_Q - z_P y_Q] \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

As entradas de ℓ satisfazem como sabemos a relação quadrática:

$$\ell_1 \ell_6 - \ell_2 \ell_5 + \ell_3 \ell_4 = 0$$

Usando esta representação de Pluecker para as linhas em \mathbb{P}^3 , Faugeras (ver [AS]) mostra que as matrizes M_i se prolongam em matrizes 3×6 , \widetilde{M}_i , que satisfazem a relação $\ell_i = \widetilde{M}_i \ell$, onde ℓ é representada pelas suas coordenadas de Pluecker. As linhas de \widetilde{M}_i são os produtos exteriores dos pares das linhas de M_i , i.e., se M^j representa a j -linha de M , então:

$$\widetilde{M}_i = \begin{bmatrix} M^2 \wedge M^3 \\ M^3 \wedge M^1 \\ M^1 \wedge M^2 \end{bmatrix}$$

Portanto fica assim estabelecida a seguinte restrição linear sobre o vector de Pluecker desconhecido ℓ :

$$p_i^T \widetilde{M}_i \ell = 0 \quad (4.2.2)$$

que é linear nos parâmetros de ℓ . Portanto 5 tomadas de vista conduzem a uma única solução.

Para mais detalhes ver [AS].

4.3 Referência a outras aplicações

A teoria dos complexos de linhas tem várias aplicações, para além das que foram já referidas, e que passamos a citar, indicando alguma bibliografia adequada:

- **Estática gráfica** ... estudo da estabilidade e projecto de pontes, travejamentos, guindastes, etc., baseado no chamado método de Cremona-Maxwell. Ver Cremona L., “*Les Figures Réciproques en Statique Graphique*”, Gauthiers-Villars, 1885.
- **Cinemática. Mecanismos. Robótica** ... como já vimos o complexo de normais às trajectórias dos pontos de um espaço móvel, num dado instante t , é um complexo linear. É possível mostrar que o complexo dos suportes das velocidades instantâneas (ou das tangentes às trajectórias) dos pontos P do espaço móvel, formam um complexo quadrático. Ver Garnier R. “*Cours de Cinématique*”, vol. II, Gauthiers-Villars, 1956., Hunt K.H. “*Kinematic Geometry of Mechanisms*”, Oxford U Press, 1978, e ainda Selig J.M., “*Geometrical Methods in Robotics*”, Springer-Verlag, 1996.
- **Visualização** ... ver o livro recentemente publicado H. Pottmann & J. Wallner, “*Computational Line Geometry*”, Springer-Verlag, July 2001.
- **Matemática** ... refira-se apenas a tese de Émile Picard “*Application de la Théorie des Complexes Linéaires à l’étude des Surfaces et des Courbes Gauches*”, Ann. de l’Éc. Normale, Tome VI, 1877.

4.4 Apêndice. Vectores deslizantes. Momentos. Torsores

Em toda esta secção \mathcal{E} representa um espaço afim Euclideano orientado de dimensão 3, modelado num espaço vectorial (Euclideano orientado de dimensão 3) $\vec{\mathbf{E}}$.

Vectores aplicados ... Um **vector aplicado em** $a \in \mathcal{E}$, é um par:

$$(a, \vec{\mathbf{v}}) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\mathbf{v}}_a$$

onde $\vec{\mathbf{v}} \in \vec{\mathbf{E}}$. Os pontos a e $b = a + \vec{\mathbf{v}}$ dizem-se, respectivamente, a **origem** ou o **ponto de aplicação** e a **extremidade** do vector aplicado $\vec{\mathbf{v}}_a$. O conjunto dos vectores aplicados em $a \in \mathcal{E}$, é:

$$\vec{\mathbf{E}}_a \stackrel{\text{def}}{=} \{a\} \times \vec{\mathbf{E}}$$

Cada um dos espaços $\vec{\mathbf{E}}_a$, será munido da única estrutura vectorial Euclideana e orientada, para a qual a aplicação de **equipolência**:

$$\begin{array}{ccc} \vec{\mathbf{E}}_a & \longrightarrow & \vec{\mathbf{E}} \\ \vec{\mathbf{v}}_a = (a, \vec{\mathbf{v}}) & \longmapsto & \vec{\mathbf{v}} \end{array}$$

é um isomorfismo de espaços vectoriais Euclidianos orientados.

Portanto os vectores aplicados $\vec{v}_a = (a, \vec{v}) \in \vec{\mathbf{E}}_a$ e $\mathbb{k}_b = (b, \mathbb{k}) \in \vec{\mathbf{E}}_b$, respectivamente em $a \in \mathcal{E}$ e $b \in \mathcal{E}$, dizem-se **equipolentes**, sse $\vec{v} = \mathbb{k}$.

Quando $a \neq b$, à recta que passa em a e $b = a + \vec{v}$, chama-se o **suporte** do vector aplicado \vec{v}_a , e nota-se por Δ_{ab} .

Momento de um vector aplicado, num ponto ... Por definição, o **momento do vector aplicado** $\vec{v}_a \in \vec{\mathbf{E}}_a$, num ponto $p \in \mathcal{E}$, é o vector aplicado em p , dado por:

$$\boxed{\vec{\mathbf{M}}(\vec{v}_a; p) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{p}\vec{a} \times \vec{v}} \quad (4.4.1)$$

e o campo de vectores em \mathcal{E} , definido por:

$$\boxed{\vec{\mathbf{M}}(\vec{v}_a) : p \longmapsto \vec{\mathbf{M}}(\vec{v}_a; p)} \quad (4.4.2)$$

diz-se o **campo de momentos do vector aplicado** \vec{v}_a (ver figura 4.4). Note que $\vec{\mathbf{M}}(\vec{v}_a; p)$ é perpendicular ao plano que contem o ponto p e a recta suporte de \vec{v}_a .

Suponhamos que temos dois vectores aplicados equipolentes $\vec{v}_a \sim \vec{v}_b$, e calculemos a diferença entre os respectivos momentos num ponto $p \in \mathcal{E}$:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{M}}(\vec{v}_b; p) - \vec{\mathbf{M}}(\vec{v}_a; p) &= \vec{p}\vec{b} \times \vec{v} - \vec{p}\vec{a} \times \vec{v} \\ &= (\vec{p}\vec{b} - \vec{p}\vec{a}) \times \vec{v} \\ &= \vec{a}\vec{b} \times \vec{v} \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

Se $\vec{a}\vec{b}$ e \vec{v} são distintos, então (4.4.3) só pode ser zero quando $\vec{a}\vec{b}$ e \vec{v} são colineares, isto é, quando \vec{v}_a e \vec{v}_b têm como suporte uma mesma recta - a recta que une a e b . Isto motiva a definição de vector deslizante que introduzimos de seguida.

Vectores deslizantes ... No conjunto $\mathcal{E} \times \vec{\mathbf{E}}$ de todos os vectores aplicados, introduzimos a seguinte relação de equivalência: $\vec{v}_a \cong \mathbb{k}_b$, se e só se $\vec{v} = \mathbb{k}$ (isto é, os vectores são equipolentes), e \vec{v}_a e \vec{v}_b têm como suporte uma mesma recta - a recta Δ_{ab} que une a e b . Uma classe de equivalência da relação \cong diz-se um **vector deslizante**.

Alternativamente, um vector deslizante fica definido dando uma recta afim Δ em \mathcal{E} (**o suporte**), e um vector **não nulo** $\vec{v} \in \vec{\mathbf{E}}$ (**o vector director**). Um tal vector deslizante será notado por:

$$(\Delta, \vec{v})$$

e é pois constituído por todos os vectores aplicados $\{\vec{v}_a : a \in \Delta\}$. Um vector aplicado $\vec{v}_a = (a, \vec{v}) \in \vec{\mathbf{E}}_a$ não nulo, com extremidade $b = a + \vec{v}$, define um único vector deslizante (Δ_{ab}, \vec{v}) , onde Δ_{ab} representa a recta que une a e b .

A discussão do penúltimo parágrafo permite concluir que:

$$\vec{\mathbf{M}}(\vec{v}_b; p) = \vec{\mathbf{M}}(\vec{v}_a; p) \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_a \cong \vec{v}_b$$

isto é, o momento de um vector aplicado, num ponto p , mantem-se inalterado quando esse vector “desliza” sobre o seu suporte, o que permite definir o momento de um vector deslizante, num ponto p , através de:

$$\boxed{\vec{M}((\Delta, \vec{v}); p) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{M}(\vec{v}_a; p)} \quad (4.4.4)$$

onde a é um ponto qualquer de Δ

Momento do vector aplicado, relativamente a um eixo ... Seja \vec{v}_a um vector aplicado em a , e D uma recta afim. Consideremos dois pontos $p, q \in D$ e calculemos a diferença entre os momentos de \vec{v}_a , nos pontos q e p , respectivamente:

$$\begin{aligned} \vec{M}(\vec{v}_a; q) - \vec{M}(\vec{v}_a; p) &= \vec{q}\vec{a} \times \vec{v} - \vec{p}\vec{a} \times \vec{v} \\ &= (\vec{q}\vec{a} - \vec{p}\vec{a}) \times \vec{v} \\ &= \vec{p}\vec{q} \times \vec{v} \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

Em particular, deduzimos que o momento $\vec{M}(\vec{v}_a; p)$ se mantem inalterado, quando o ponto p se desloca ao longo de uma recta paralela a \vec{v} .

Projectemos agora os momentos $\vec{M}(\vec{v}_a; p)$ e $\vec{M}(\vec{v}_a; q)$ sobre uma recta orientada qualquer (eixo) $\vec{D} = (D, \vec{u})$, onde \vec{u} é um vector director unitário da recta D . Calculemos o produto interno de ambos os membros de (4.4.5) com \vec{u} :

$$\vec{u} \cdot \vec{M}(\vec{v}_a; q) - \vec{u} \cdot \vec{M}(\vec{v}_a; p) = \vec{u} \cdot (\vec{p}\vec{q} \times \vec{v}) = 0$$

(igual a 0 porque \vec{u} é colinear com $\vec{p}\vec{q}$). Portanto:

$$\boxed{\vec{u} \cdot \vec{M}(\vec{v}_a; q) = \vec{u} \cdot \vec{M}(\vec{v}_a; p)} \quad (4.4.6)$$

donde se deduz a seguinte **propriedade de equiprojectividade** - “seja \vec{v}_a um vector aplicado em a , \vec{D} um eixo, e p, q dois pontos quaisquer em D . Então os momentos de \vec{v}_a , nos pontos q e p , respectivamente, têm projecções ortogonais sobre $\vec{D} = (D, \vec{u})$ equipolentes” (ver a figura 4.2).

Podemos então definir o **momento do vector aplicado \vec{v}_a , relativamente ao eixo \vec{D}** , como sendo o vector deslizante representado pela projecção ortogonal sobre \vec{D} , do momento de \vec{v}_a , num ponto qualquer $p \in D$, isto é, pelo vector deslizante:

$$\boxed{\mathbf{M}(\vec{v}_a : \vec{D}) \stackrel{\text{def}}{=} (D, [\vec{u} \cdot \vec{M}(\vec{v}_a; p)]\vec{u})} \quad (4.4.7)$$

Momento de dois eixos ... Sejam $\vec{D} = (D, \vec{u})$ e $\vec{D}' = (D', \vec{u}')$ dois eixos. Podemos definir o respectivo momento através de:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}(\vec{D}, \vec{D}') &\stackrel{\text{def}}{=} \vec{u} \cdot \vec{M}(\vec{u}'_a; a) \\ &= \vec{u} \cdot (\vec{a}\vec{a}' \times \vec{u}') \\ &= \vec{u}' \cdot (\vec{u} \times \vec{a}\vec{a}') \\ &= \vec{u}' \cdot (\vec{a}'\vec{a} \times \vec{u}') \\ &= \mathbf{M}(\vec{D}', \vec{D}) \end{aligned} \quad (4.4.8)$$

onde $a \in D$ e $a' \in D'$ são dois pontos arbitrários.

Se fixamos um referencial ortonormado $\{o; \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$ para \mathcal{E} , e se:

$$\begin{cases} a &= o + x\hat{\mathbf{i}} + y\hat{\mathbf{j}} + z\hat{\mathbf{k}} \\ a' &= o + x'\hat{\mathbf{i}} + y'\hat{\mathbf{j}} + z'\hat{\mathbf{k}} \\ \vec{\mathbf{u}} &= o + X\hat{\mathbf{i}} + Y\hat{\mathbf{j}} + Z\hat{\mathbf{k}} \\ \vec{\mathbf{u}}' &= o + X'\hat{\mathbf{i}} + Y'\hat{\mathbf{j}} + Z'\hat{\mathbf{k}} \end{cases}$$

então:

$$\mathbf{M}(\vec{D}, \vec{D}') = LX' + L'X + MY' + M'Y + N'Z + NZ' \quad (4.4.9)$$

onde: (X, Y, Z, L, M, N) e (X', Y', Z', L', M', N') são as coordenadas de Plücker das rectas orientadas \vec{D} e \vec{D}' , respectivamente (ver a secção 4.1.1).

Sistemas de vectores deslizantes ... Um sistema de vectores deslizantes é um conjunto finito:

$$\mathcal{S} = \{(D_i, \vec{\mathbf{v}}_i) : i = 1, \dots, n\}$$

de vectores deslizantes. Para um tal sistema definimos:

- a soma geométrica de \mathcal{S} - é o vector (livre) de $\vec{\mathbf{E}}$:

$$\vec{\omega} \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{v}}_i \quad (4.4.10)$$

- o momento resultante de \mathcal{S} , num ponto $p \in \mathcal{E}$ - é o vector aplicado em p :

$$\vec{\mathbf{M}}(\mathcal{S}; p) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{M}}((D_i, \vec{\mathbf{v}}_i); p) = \sum_{i=1}^n \overrightarrow{pa_i} \times \vec{\mathbf{v}}_i \quad (4.4.11)$$

onde $a_i \in D_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, são pontos arbitrários. Os vectores $\vec{\omega} \in \vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{\mathbf{M}}(\mathcal{S}; p) \in \vec{\mathbf{E}}_p$, dizem-se os **elementos de redução** do sistema \mathcal{S} no ponto $p \in \mathcal{E}$.

- o campo de momentos de \mathcal{S} - é o campo de vectores definido em \mathcal{E} por:

$$\vec{\mathbf{M}}_{\mathcal{S}} : p \in \mathcal{E} \mapsto \vec{\mathbf{M}}(\mathcal{S}; p) \quad (4.4.12)$$

Consideremos agora dois pontos $o, p \in \mathcal{E}$ e vejamos qual a relação entre o campo de momentos $\vec{\mathbf{M}}_{\mathcal{S}}$, nesses dois pontos. Temos que:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{M}}_{\mathcal{S}}(p) - \vec{\mathbf{M}}_{\mathcal{S}}(o) &= \sum_{i=1}^n [\vec{\mathbf{M}}((D_i, \vec{\mathbf{v}}_i); p) - \vec{\mathbf{M}}((D_i, \vec{\mathbf{v}}_i); o)] \\ &= \sum_{i=1}^n [\overrightarrow{pa_i} \times \vec{\mathbf{v}}_i - \overrightarrow{oa_i} \times \vec{\mathbf{v}}_i] \\ &= \sum_{i=1}^n [(\overrightarrow{pa_i} - \overrightarrow{oa_i}) \times \vec{\mathbf{v}}_i] \\ &= \sum_{i=1}^n [\overrightarrow{po} \times \vec{\mathbf{v}}_i] \\ &= \overrightarrow{po} \times \sum_{i=1}^n \vec{\mathbf{v}}_i \\ &= \overrightarrow{po} \times \vec{\omega} \end{aligned}$$

donde resulta que:

$$\vec{M}_{\mathcal{S}}(p) = \vec{M}_{\mathcal{S}}(o) + \vec{p}o \times \vec{\omega}$$

ou:

$$\boxed{\vec{M}_{\mathcal{S}}(p) = \vec{M}_{\mathcal{S}}(o) + \vec{\omega} \times \vec{op}} \quad (4.4.13)$$

o que significa que o campo de momentos $\vec{M}_{\mathcal{S}}$, do sistema \mathcal{S} , fica determinado em todo o ponto $p \in \mathcal{E}$ desde que o conheçamos num único ponto $o \in \mathcal{E}$.

Sistemas equivalentes de vectores deslizantes. Torsores ... Dois sistemas $\mathcal{S}, \mathcal{S}'$, de vectores deslizantes, dizem-se equivalentes quando eles têm os mesmos elementos de redução num certo ponto $o \in \mathcal{E}$:

$$\mathcal{S} \sim \mathcal{S}' \quad \iff \quad \vec{\omega} = \vec{\omega}' \quad \text{e} \quad \vec{M}(\mathcal{S}; o) = \vec{M}(\mathcal{S}'; o)$$

Resulta então de (4.4.13) que eles têm o mesmo campo de momentos:

$$\mathcal{S} \sim \mathcal{S}' \quad \implies \quad \vec{M}_{\mathcal{S}}(p) = \vec{M}_{\mathcal{S}'}(p), \quad \forall p \in \mathcal{E}$$

É claro que a relação \sim é uma relação de equivalência no conjunto dos sistemas de vectores deslizantes. Uma classe de equivalência desta relação chama-se um **torsor**.

Todo o sistema \mathcal{S} de vectores deslizantes, representando um torsor \mathfrak{T} , admite num ponto qualquer $o \in \mathcal{E}$, um par de vectores fundamentais - os elementos de redução de \mathcal{S} em o , $\vec{\omega} \in \vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{M}(\mathcal{S}; o) \in \vec{\mathbf{E}}_o$. Por definição, este par não depende do representante \mathcal{S} para o torsor \mathfrak{T} - é pois uma característica de \mathfrak{T} , a que chamamos os **elementos de redução do torsor \mathfrak{T} , em o** . O vector $\vec{\omega}$ diz-se por vezes o **vector** ou a **resultante geral** do torsor, e $\vec{M}(o) = \vec{M}_{\mathfrak{T}}(o) = \vec{M}(\mathcal{S}; o)$ o **momento** do torsor em o . Pômos então:

$$\boxed{\mathfrak{T} = (\vec{\omega}, \vec{M}(o))} \quad (4.4.14)$$

Recíprocamente, a todo o par $(\vec{\omega}, \vec{\mathbf{G}}) \in \vec{\mathbf{E}}^2$, corresponde um único torsor cujos elementos de redução em o , são $\vec{\omega}$ e $\vec{\mathbf{G}} = \vec{M}_{\mathfrak{T}}(o)$ (veremos isto em breve). Portanto existe uma bijecção (que depende do ponto o):

$$\{\text{Torsores}\} \quad \longleftrightarrow \quad \vec{\mathbf{E}}^2$$

o que permite transferir a estrutura de espaço vectorial para o conjunto dos torsores. Assim definimos:

- **torsor nulo** - é o torsor que corresponde ao par $(\vec{\mathbf{0}}, \vec{\mathbf{0}}) \in \vec{\mathbf{E}}^2$.
- **adição de torsores** - se $\mathfrak{T} = (\vec{\omega}, \vec{M}(o))$ e $\mathfrak{T}' = (\vec{\omega}', \vec{M}'(o))$, põe-se:

$$\mathfrak{T} + \mathfrak{T}' \stackrel{\text{def}}{=} (\vec{\omega} + \vec{\omega}', \vec{M}(o) + \vec{M}'(o))$$

- multiplicação por escalares - se $\mathfrak{T} = (\vec{\omega}, \vec{M}(o))$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ põe-se:

$$\lambda \mathfrak{T} \stackrel{\text{def}}{=} (\lambda \vec{\omega}, \lambda \vec{M}(o))$$

Campos equiprojectivos ... Seja $\mathfrak{T} = (\vec{\omega}, \vec{M}(o))$ um torsor com elementos de redução $\vec{\omega} \in \vec{\mathbf{E}}$ e $\vec{M}(o) \in \vec{\mathbf{E}}_o$, num ponto $o \in \mathcal{E}$. Por (4.4.13), o momento resultante num qualquer outro ponto $p \in \mathcal{E}$, é dado por:

$$\vec{M}(p) = \vec{M}(o) + \vec{p}o \times \vec{\omega} \quad (4.4.15)$$

ficando assim definido o **campo de momentos** $\vec{M} = \vec{M}_{\mathfrak{T}} : p \mapsto \vec{M}(p)$ do torsor \mathfrak{T} .

Consideremos agora dois pontos quaisquer $p, q \in \mathcal{E}$. Temos então que:

$$\vec{M}(q) = \vec{M}(p) + \vec{q}p \times \vec{\omega}$$

e calculando o produto interno por $\vec{p}q$ de ambos os membros, obtemos:

$$\vec{p}q \cdot \vec{M}(q) = \vec{p}q \cdot \vec{M}(p)$$

o que significa que $\vec{M} = \vec{M}_{\mathfrak{T}}$ é um **campo equiprojectivo**, isto é, dados dois pontos quaisquer distintos $p, q \in \mathcal{E}$, $\vec{M}(p)$ e $\vec{M}(q)$, têm a mesma projecção sobre a recta que une p a q :

$$\vec{M}(p) \cdot \vec{p}q = \vec{M}(q) \cdot \vec{p}q$$

ou ainda

$$\boxed{\vec{p}q \cdot (\vec{M}(p) - \vec{M}(q)) \cdot = 0, \quad \forall p, q \in \mathcal{E}} \quad (4.4.16)$$

Vamos agora mostrar que, reciprocamente, “*dado um campo de vectores equiprojectivo $\mathbf{V} : \mathcal{E} \rightarrow \vec{\mathbf{E}}$, em \mathcal{E} , então \mathbf{V} é o campo de momentos de um torsor*”.

Fixemos um ponto $o \in \mathcal{E}$, e definamos a aplicação $L : \vec{\mathbf{E}} \rightarrow \vec{\mathbf{E}}$, através de:

$$L(\vec{v}) = \mathbf{V}(o + \vec{v}) - \mathbf{V}(o), \quad \vec{v} \in \vec{\mathbf{E}} \quad (4.4.17)$$

Como \mathbf{V} é equiprojectivo, temos que:

$$\vec{v} \cdot L(\vec{v}) = 0, \quad \forall \vec{v} \in \vec{\mathbf{E}}$$

e, por outro lado:

$$\begin{aligned} (\vec{w} - \vec{v}) \cdot [L(\vec{w}) - L(\vec{v})] &= (\vec{w} - \vec{v}) \cdot [\mathbf{V}(o + \vec{w}) - \mathbf{V}(o) - \mathbf{V}(o + \vec{v}) + \mathbf{V}(o)] \\ &= (\vec{w} - \vec{v}) \cdot [\mathbf{V}(o + \vec{w}) - \mathbf{V}(o + \vec{v})] \\ &= 0 \end{aligned}$$

Mas o primeiro membro é também igual a:

$$\begin{aligned} (\vec{w} - \vec{v}) \cdot [L(\vec{w}) - L(\vec{v})] &= \vec{w} \cdot L(\vec{w}) - \vec{w} \cdot L(\vec{v}) - \vec{v} \cdot L(\vec{w}) + \vec{v} \cdot L(\vec{v}) \\ &= -\vec{w} \cdot L(\vec{v}) - \vec{v} \cdot L(\vec{w}) \end{aligned}$$

Portanto:

$$\boxed{\vec{v} \cdot L(\vec{w}) = -L(\vec{v}) \cdot \vec{w}, \quad \forall \vec{v}, \vec{w} \in \vec{\mathbf{E}}} \quad (4.4.18)$$

o que significa que L é um endomorfismo anti-simétrico de $\vec{\mathbf{E}}$. É fácil mostrar que L é também linear, e fica então provado que “*um campo de vectores equiprojectivo $\mathbf{V} : \mathcal{E} \rightarrow \vec{\mathbf{E}}$, em \mathcal{E} , é afim:*”

$$\boxed{\mathbf{V}(o + \vec{v}) = \mathbf{V}(o) + L(\vec{v}), \quad \vec{v} \in \vec{\mathbf{E}}} \quad (4.4.19)$$

onde o endomorfismo associado $L : \vec{\mathbf{E}} \rightarrow \vec{\mathbf{E}}$ é um endomorfismo anti-simétrico de $\vec{\mathbf{E}}$ ”.

Fixemos agora uma base ortonormada positiva $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ para $\vec{\mathbf{E}}$. Temos então que:

$$\hat{i} \cdot L(\hat{i}) = \hat{j} \cdot L(\hat{j}) = \hat{k} \cdot L(\hat{k}) = 0$$

Definamos ainda:

$$\begin{aligned} \hat{k} \cdot L(\hat{j}) &= -\hat{j} \cdot L(\hat{k}) = \mathfrak{p} \\ \hat{i} \cdot L(\hat{k}) &= -\hat{k} \cdot L(\hat{i}) = \mathfrak{q} \\ \hat{j} \cdot L(\hat{i}) &= -\hat{i} \cdot L(\hat{j}) = \mathfrak{r} \end{aligned}$$

de tal forma que a matriz de L , na base referida, é a matriz anti-simétrica:

$$\begin{bmatrix} 0 & -\mathfrak{r} & \mathfrak{q} \\ \mathfrak{r} & 0 & -\mathfrak{p} \\ -\mathfrak{q} & \mathfrak{p} & 0 \end{bmatrix}$$

Pondo:

$$\boxed{\vec{\omega} = \mathfrak{p}\hat{i} + \mathfrak{q}\hat{j} + \mathfrak{r}\hat{k}} \quad (4.4.20)$$

temos então que:

$$\begin{aligned} L(\hat{i}) &= \vec{\omega} \times \hat{i} \\ L(\hat{j}) &= \vec{\omega} \times \hat{j} \\ L(\hat{k}) &= \vec{\omega} \times \hat{k} \end{aligned} \quad (4.4.21)$$

e portanto:

$$L(\vec{v}) = \vec{\omega} \times \vec{v}, \quad \forall \vec{v} \in \vec{\mathbf{E}}$$

Finalmente, por (4.4.19), temos que:

$$\mathbf{V}(o + \vec{v}) = \mathbf{V}(o) + \vec{\omega} \times \vec{v}$$

ou, de forma equivalente, pondo $p = o + \vec{v}$ (e portanto $\vec{v} = \vec{op}$):

$$\boxed{\mathbf{V}(p) = \mathbf{V}(o) + \vec{\omega} \times \vec{op}, \quad p \in \mathcal{E}} \quad (4.4.22)$$

o que mostra que dado um campo de vectores equiprojectivo $\mathbf{V} : \mathcal{E} \rightarrow \vec{\mathbf{E}}$, em \mathcal{E} , então \mathbf{V} é o campo de momentos do tursor $\mathfrak{T} = (\vec{\omega}, \mathbf{V}(o))$, de soma geométrica $\vec{\omega}$ e de momento resultante $\mathbf{V}(o)$, no ponto o .

Dimensão do espaço dos campos equiprojectivos em \mathcal{E} ... Fixemos um ponto qualquer $o \in \mathcal{E}$ e designemos por $\mathcal{A}(\vec{\mathbf{E}})$ o espaço vectorial dos endomorfismos anti-simétricos de $\vec{\mathbf{E}}$, que tem dimensão 3 (porque $\dim \vec{\mathbf{E}} = 3$). Definamos uma aplicação:

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{E}} \times \mathcal{A}(\vec{\mathbf{E}}) &\longrightarrow \{\text{Campos equiprojectivos em } \mathcal{E}\} \\ (\vec{\mathbf{V}}, L) &\longmapsto \mathbf{V}_o : p \mapsto \mathbf{V}_o(p) = \vec{\mathbf{V}} + L(\vec{op}) \end{aligned} \quad (4.4.23)$$

É fácil ver que esta aplicação é um isomorfismo de espaços vectoriais e, portanto o espaço dos campos equiprojectivos em \mathcal{E} , é um espaço vectorial de dimensão 6.

Eixo central de um torsor ... Seja $\mathfrak{T} = (\vec{\omega}, \vec{\mathbf{M}}(o))$ um torsor não constante, com vector $\vec{\omega} \neq \vec{\mathbf{0}}$. Vamos mostrar que o conjunto dos pontos p onde o momento resultante $\vec{\mathbf{M}}(p)$ é colinear com a resultante geral $\vec{\omega}$, é uma recta afim paralela a $\vec{\omega}$, a que chamamos o **eixo central de \mathfrak{T}** , e que notamos por $\Delta = \Delta_{\mathfrak{T}}$.

Antes de resolver este problema, vamos resolver o seguinte problema de **divisão vectorial** - dados $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}} \in \vec{\mathbf{E}}$, não nulos, calcular $\vec{\mathbf{x}}$ tal que:

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}}$$

É claro que esta equação tem solução apenas quando $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0$. Por outro lado, a solução não é única. De facto:

$$\begin{cases} \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{x}}_o = \vec{\mathbf{b}} \\ \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{b}} \end{cases} \implies \vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{x}} - \vec{\mathbf{x}}_o) = \vec{\mathbf{0}} \implies \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{x}}_o + \lambda \vec{\mathbf{a}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Para calcular uma solução particular $\vec{\mathbf{x}}_o$, desenvolvemos $\vec{\mathbf{x}}_o$ na base ortogonal $\{\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}\}$:

$$\vec{\mathbf{x}}_o = \alpha \vec{\mathbf{a}} + \beta \vec{\mathbf{b}} + \gamma (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})$$

Virá então (com $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = 0$):

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{b}} &= \vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{x}}_o \\ &= \vec{\mathbf{a}} \times [\alpha \vec{\mathbf{a}} + \beta \vec{\mathbf{b}} + \gamma (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})] \\ &= \beta (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) + \gamma \vec{\mathbf{a}} \times (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) \\ &= \beta (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) - \gamma a^2 \vec{\mathbf{b}} + \gamma (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) \vec{\mathbf{a}} \\ &= \beta (\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) - \gamma a^2 \vec{\mathbf{b}} \end{aligned}$$

onde pusemos $a = \|\vec{\mathbf{a}}\|$. Portanto α pode ser qualquer e, pondo $\alpha = 0 = \beta$ e $\gamma = -\frac{1}{a^2}$, obtemos a solução particular $\vec{\mathbf{x}}_o = -\frac{1}{a^2}(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}})$ e a solução geral é:

$$\boxed{\vec{\mathbf{x}} = \frac{1}{a^2}(\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}}) + \lambda \vec{\mathbf{a}}, \quad \lambda \in \mathbb{R}} \quad (4.4.24)$$

(o sinal $-$ foi absorvido por λ).

Regressemos agora ao problema inicial de calcular o eixo central de \mathfrak{T} .

Com efeito, fixemos um qualquer ponto $o \in \mathcal{E}$. Os pontos p que procuramos são os que satisfazem a condição $\vec{M}(p) = h \vec{\omega}$, isto é:

$$\vec{M}(o) + \vec{\omega} \times \vec{op} = h \vec{\omega}$$

ou:

$$\underbrace{\vec{\omega}}_{\vec{a}} \times \underbrace{\vec{op}}_{\vec{x}} = \underbrace{h \vec{\omega} - \vec{M}(o)}_{\vec{b}} \quad (4.4.25)$$

Adaptando a discussão anterior, sabemos que existe solução \vec{x} , sse $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$, isto é:

$$\vec{\omega} \cdot [h \vec{\omega} - \vec{M}(o)] = 0 \quad \implies \quad h \omega^2 - \vec{\omega} \cdot \vec{M}(o) = 0$$

o que define o **passo h do tursor \mathfrak{T}** , através de:

$$h = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{M}(o)}{\omega^2} \quad (4.4.26)$$

Em particular, todos os pontos p do eixo central $\Delta = \Delta_{\mathfrak{T}}$, têm o mesmo momento:

$$\vec{M}(p) \equiv h \vec{\omega} = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{M}(o)}{\omega^2} \vec{\omega}, \quad \forall p \in \Delta \quad (4.4.27)$$

Por (4.4.24), a solução geral de (4.4.25), é dada por:

$$\begin{aligned} \vec{op} &= \vec{x} \\ &= \frac{1}{a^2} (\vec{a} \times \vec{b}) + \lambda \vec{a}, \quad \text{com } \vec{a} = \vec{\omega} \text{ e } \vec{b} = h \vec{\omega} - \vec{M}(o) \\ &= \frac{1}{\omega^2} [\vec{\omega} \times (h \vec{\omega} - \vec{M}(o))] + \lambda \vec{\omega} \\ &= \frac{1}{\omega^2} (\vec{\omega} \times \vec{M}(o)) + \lambda \vec{\omega} \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

e a equação do eixo central de \mathfrak{T} , é portanto:

$$\vec{op} = \frac{\vec{\omega} \times \vec{M}(o)}{\omega^2} + \lambda \vec{\omega}, \quad \lambda \in \mathbb{R} \quad (4.4.29)$$

que é a equação de uma recta afim em \mathcal{E} , paralela a $\vec{\omega}$.

Equações do eixo central num referencial ortonormado ... Fixemos um referencial ortonormado positivo $\{o; \hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$, e seja:

$$\begin{cases} \vec{\omega} &= p \hat{i} + q \hat{j} + r \hat{k} \\ \vec{M}(o) &= \xi \hat{i} + \eta \hat{j} + \zeta \hat{k} \end{cases} \quad (4.4.30)$$

O momento num qualquer ponto $p \in \mathcal{E}$, tal que:

$$\vec{op} = x \hat{i} + y \hat{j} + z \hat{k}$$

é dado por:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{M}}(p) &= \vec{\mathbf{M}}(o) + \vec{\omega} \times \vec{op} \\ &= \xi \hat{\mathbf{i}} + \eta \hat{\mathbf{j}} + \zeta \hat{\mathbf{k}} + (\mathbf{p} \hat{\mathbf{i}} + \mathbf{q} \hat{\mathbf{j}} + \mathbf{r} \hat{\mathbf{k}}) \times (x \hat{\mathbf{i}} + y \hat{\mathbf{j}} + z \hat{\mathbf{k}}) \\ &= (\xi + \mathbf{q}z - \mathbf{r}y) \hat{\mathbf{i}} + (\eta + \mathbf{r}x - \mathbf{p}z) \hat{\mathbf{j}} + (\zeta + \mathbf{p}y - \mathbf{q}x) \hat{\mathbf{k}}\end{aligned}\quad (4.4.31)$$

e as equações homogêneas do eixo central (quando $\vec{\omega} \neq \vec{\mathbf{0}}$), são:

$$\boxed{\frac{\xi + \mathbf{q}z - \mathbf{r}y}{\mathbf{p}} = \frac{\eta + \mathbf{r}x - \mathbf{p}z}{\mathbf{q}} = \frac{\zeta + \mathbf{p}y - \mathbf{q}x}{\mathbf{r}}}\quad (4.4.32)$$

que exprimem a colinearidade de $\vec{\mathbf{M}}(p)$ com $\vec{\omega}$.

Comomento de dois torsores. Invariante escalar ou auto-momento de um torsor

... Sejam $\mathfrak{T}_1 = (\vec{\omega}_1, \vec{\mathbf{M}}_1(o))$ e $\mathfrak{T}_2 = (\vec{\omega}_2, \vec{\mathbf{M}}_2(o))$ dois torsores. É fácil mostrar que a função escalar:

$$f(p) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\omega}_1 \cdot \vec{\mathbf{M}}_2(p) + \vec{\omega}_2 \cdot \vec{\mathbf{M}}_1(p)$$

é constante. A esta constante chamamos o **comomento dos torsores** \mathfrak{T}_1 e \mathfrak{T}_2 , que notamos por:

$$\boxed{\mathbf{c}(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) \stackrel{\text{def}}{=} \vec{\omega}_1 \cdot \vec{\mathbf{M}}_2(o) + \vec{\omega}_2 \cdot \vec{\mathbf{M}}_1(o)}\quad (4.4.33)$$

ficando assim definida uma forma bilinear simétrica no espaço vectorial \mathcal{T} , de todos os torsores (que, recordemos, é isomorfo a $\vec{\mathbf{E}}^2$):

$$\begin{aligned}\mathbf{c}: \mathcal{T} \times \mathcal{T} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) &\longmapsto \mathbf{c}(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2)\end{aligned}\quad (4.4.34)$$

A forma quadrática associada a esta forma bilinear, é o chamado **auto-momento** ou **invariante escalar**:

$$\boxed{I(\mathfrak{T}) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2} \mathbf{c}(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}) = \vec{\omega} \cdot \vec{\mathbf{M}}(o)}\quad (4.4.35)$$

do torsor $\mathfrak{T} = (\vec{\omega}, \vec{\mathbf{M}}(o))$.

Vejamos as expressões de \mathbf{c} e I , num referencial ortonormado positivo $\{o; \hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}}\}$, para \mathcal{E} . Se:

$$\begin{cases} \vec{\omega}_i &= \mathbf{p}_i \hat{\mathbf{i}} + \mathbf{q}_i \hat{\mathbf{j}} + \mathbf{r}_i \hat{\mathbf{k}} \\ \vec{\mathbf{M}}(o) &= \xi_i \hat{\mathbf{i}} + \eta_i \hat{\mathbf{j}} + \zeta_i \hat{\mathbf{k}} \end{cases}, \quad i = 1, 2$$

são os elementos de redução de \mathfrak{T}_1 e \mathfrak{T}_2 , respectivamente, então:

$$\boxed{\mathbf{c}(\mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2) = \mathbf{p}_1 \xi_2 + \mathbf{q}_1 \eta_2 + \mathbf{r}_1 \zeta_2 + \mathbf{p}_2 \xi_1 + \mathbf{q}_2 \eta_1 + \mathbf{r}_2 \zeta_1}\quad (4.4.36)$$

e:

$$\boxed{I(\mathfrak{T}) = \mathbf{p} \xi + \mathbf{q} \eta + \mathbf{r} \zeta}\quad (4.4.37)$$

É possível mostrar, diagonalizando I numa base ortonormada apropriada, que a forma quadrática I é não degenerada e tem assinatura igual a $(3, 3)$.

Existem pois elementos isotrópicos, i.e., torsores \mathfrak{T} para os quais $I(\mathfrak{T}) = 0$ - são os **torsores especiais** que vamos analisar de seguida.

Classificação dos torsores ... Vamos dar uma classificação dos torsores, relativa ao valor do respectivo auto-momento I e, ao mesmo tempo, indicar um representante (sistema de vectores deslizantes) que seja o mais simples possível, para cada uma dessas classes de torsores.

Seja então $\mathfrak{T} = (\vec{\omega}, \vec{M}(o))$ um tursor. Analisemos os casos seguintes, conforme o respectivo auto-momento $I = \vec{\omega} \cdot \vec{M}(o)$ seja ou não nulo:

- **A...** $I = \vec{\omega} \cdot \vec{M}(o) = 0$... **Torsores especiais ou isotrópicos** - neste caso temos ainda as seguintes possibilidades, conforme a resultante geral $\vec{\omega}$ seja ou não nula:

- **A1...** $\vec{\omega} = \vec{0} = \vec{M}(o)$... **Torsor nulo** - representado pelo sistema $\mathcal{S} = \{(D, \vec{0})\}$.
- **A2...** $\vec{\omega} = \vec{0}$ mas $\vec{M}(o) \neq \vec{0}$... **Par** - neste caso o campo de momentos de \mathfrak{T} é constante:

$$\begin{aligned}\vec{M}(p) &= \vec{M}(o) + \vec{\omega} \times \vec{op} \\ &\equiv \vec{M}(o), \quad \forall p \in \mathcal{E}\end{aligned}$$

No plano π , que passa em o , e que é perpendicular a $\vec{M}(o)$, escolhamos um vector² deslizante (D, \vec{v}) , tal que:

$$\vec{M}((D, \vec{v}); o) = \vec{M}(o)$$

O par $\mathfrak{T} = (\vec{0}, \vec{M}(o))$ é então representado pelo sistema $\mathcal{S} = \{(D, \vec{v}), (D', -\vec{v})\}$, onde D' é a recta no plano π , que passa em o , e que é paralela a D (ver a figura 4.7).

- **A3...** $\vec{\omega} \neq \vec{0}$... **Deslizador** - neste caso o tursor admite um eixo central Δ , como vimos antes. Além disso, por (4.4.27), e como o passo $h = \vec{\omega} \cdot \vec{M}(o) / \omega^2 = 0$, tem-se que:

$$\vec{M}(p) = h \vec{\omega} = \frac{\vec{\omega} \cdot \vec{M}(o)}{\omega^2} \vec{\omega} \equiv \vec{0}, \quad \forall p \in \Delta$$

isto é, o momento de \mathfrak{T} é nulo em todo o ponto do seu eixo central Δ . Portanto, se $o \in \Delta$, temos que:

$$\vec{M}(p) = \vec{\omega} \times \vec{op}, \quad \forall p \in \mathcal{E}$$

O deslizador \mathfrak{T} (onde $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, mas $I(\mathfrak{T}) = \vec{\omega} \cdot \vec{M}(o) = 0$), pode ser representado por:

$$\mathcal{S} = \{(\Delta; \vec{\omega})\}$$

²isto é sempre possível. Com efeito....

- **B...** $I = \vec{\omega} \cdot \vec{M}(o) \neq 0$... No ponto o , decompomos $\vec{M}(o) \in \vec{E}_o$, em dois vectores aplicados em o :

$$\vec{M}(o) = \vec{M}_{\parallel}(o) + \vec{M}_{\perp}(o) \quad (4.4.38)$$

com $\vec{M}_{\parallel}(o)$ colinear com $\vec{\omega}$, e $\vec{M}_{\perp}(o)$ perpendicular a $\vec{\omega}$ (ver a figura 4.8).

Por definição de adição de torsores, tem-se que:

$$\begin{aligned} \mathfrak{T} &= (\vec{\omega}, \vec{M}(o)) \\ &= \underbrace{(\vec{0}, \vec{M}_{\parallel}(o))}_{\text{um par } \mathfrak{T}_{\parallel}} + \underbrace{(\vec{\omega}, \vec{M}_{\perp}(o))}_{\text{um deslizador } \mathfrak{T}_{\perp}} \end{aligned} \quad (4.4.39)$$

onde $\vec{M}_{\parallel} \neq \vec{0}$, uma vez que $\vec{\omega}$ não é perpendicular a $\vec{M}(o)$. O deslizador $\mathfrak{T}_{\perp} = (\vec{\omega}, \vec{M}_{\perp}(o))$ é representado por um único vector deslizante, cujo suporte é o eixo central Δ . Desta forma o torsor \mathfrak{T} decompõe-se na soma de um par $\mathfrak{T}_{\parallel} = (\vec{0}, \vec{M}_{\parallel}(o))$, de momento constante igual a $\vec{M}_{\parallel}(o) \neq \vec{0}$, com um deslizador $\mathfrak{T}_{\perp} = (\vec{\omega}, \vec{M}_{\perp}(o))$.

Vamos agora provar que: “*todo o torsor pode ser decomposto, de uma infinidade de maneiras possíveis, como soma de dois deslizadores*”. Antes de mais um lema:

Lema... *Seja $\mathfrak{T} = (\vec{\omega}, \vec{M}(o))$ um torsor de resultante geral $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, e \mathfrak{D}_1 um deslizador de eixo central D não paralelo a $\vec{\omega}$, tal que:*

$$c(\mathfrak{T}, \mathfrak{D}_1) \neq 0$$

Existe então um deslizador único \mathfrak{D}_2 e um número real λ único, tais que:

$$\mathfrak{T} = \lambda \mathfrak{D}_1 + \mathfrak{D}_2 \quad (4.4.40)$$

- **Dem.** ... Para cada $\lambda \in \mathbb{R}$, seja:

$$\mathfrak{T}_{\lambda} = \mathfrak{T} - \lambda \mathfrak{D}_1$$

de tal forma que $\mathfrak{T}_0 = \mathfrak{T}$. Representando por $\vec{\omega}_1$ a resultante geral de \mathfrak{D}_1 , a resultante geral de \mathfrak{T}_{λ} é $\vec{\omega} - \lambda \vec{\omega}_1$, que é não nula já que $\vec{\omega}$ e $\vec{\omega}_1$ são não colineares. Portanto, \mathfrak{T}_{λ} será um deslizador sse o seu invariante escalar fôr nulo, isto é:

$$\begin{aligned} 0 &= c(\mathfrak{T}_{\lambda}, \mathfrak{T}_{\lambda}) \\ &= c(\mathfrak{T} - \lambda \mathfrak{D}_1, \mathfrak{T} - \lambda \mathfrak{D}_1) \\ &= c(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}) - 2\lambda c(\mathfrak{T}, \mathfrak{D}_1) + \lambda^2 \underbrace{c(\mathfrak{D}_1, \mathfrak{D}_1)}_{=0} \\ &= c(\mathfrak{T}, \mathfrak{T}) - 2\lambda c(\mathfrak{T}, \mathfrak{D}_1) \end{aligned}$$

donde se deduz que \mathfrak{T}_{λ} será um deslizador sse:

$$\lambda = \frac{c(\mathfrak{T}, \mathfrak{T})}{2\lambda c(\mathfrak{T}, \mathfrak{D}_1)}$$

e para este valor de λ , o deslizador $\mathfrak{D}_2 \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{T} - \lambda\mathfrak{D}_1$ verifica as condições enunciadas, ■.

Seja $\mathfrak{T} = (\vec{\omega}, \vec{M}(o))$ um tursor de resultante geral $\vec{\omega} \neq \vec{0}$, e D uma recta afim. Consideremos um deslizador \mathfrak{D}_1 não nulo, de eixo central D , e apliquemos o lema anterior. Concluimos então que: “ \mathfrak{T} decompõe-se numa soma de dois deslizadores, em que um deles tem por eixo central D , sse D não é nem paralela a $\vec{\omega}$, nem uma recta de momento nulo de \mathfrak{T} . Esta decomposição é então única”. ■.



Figure 4.2: Três imagens de uma sequência onde um automóvel se desloca independentemente da cena. A câmara está a mover-se para a direita

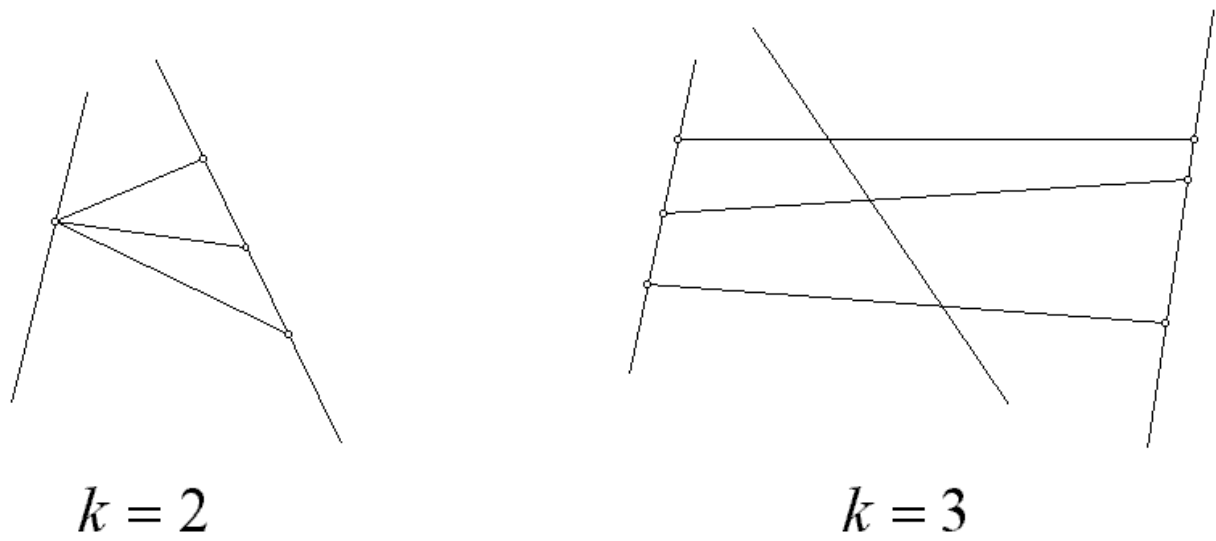


Figure 4.3: .

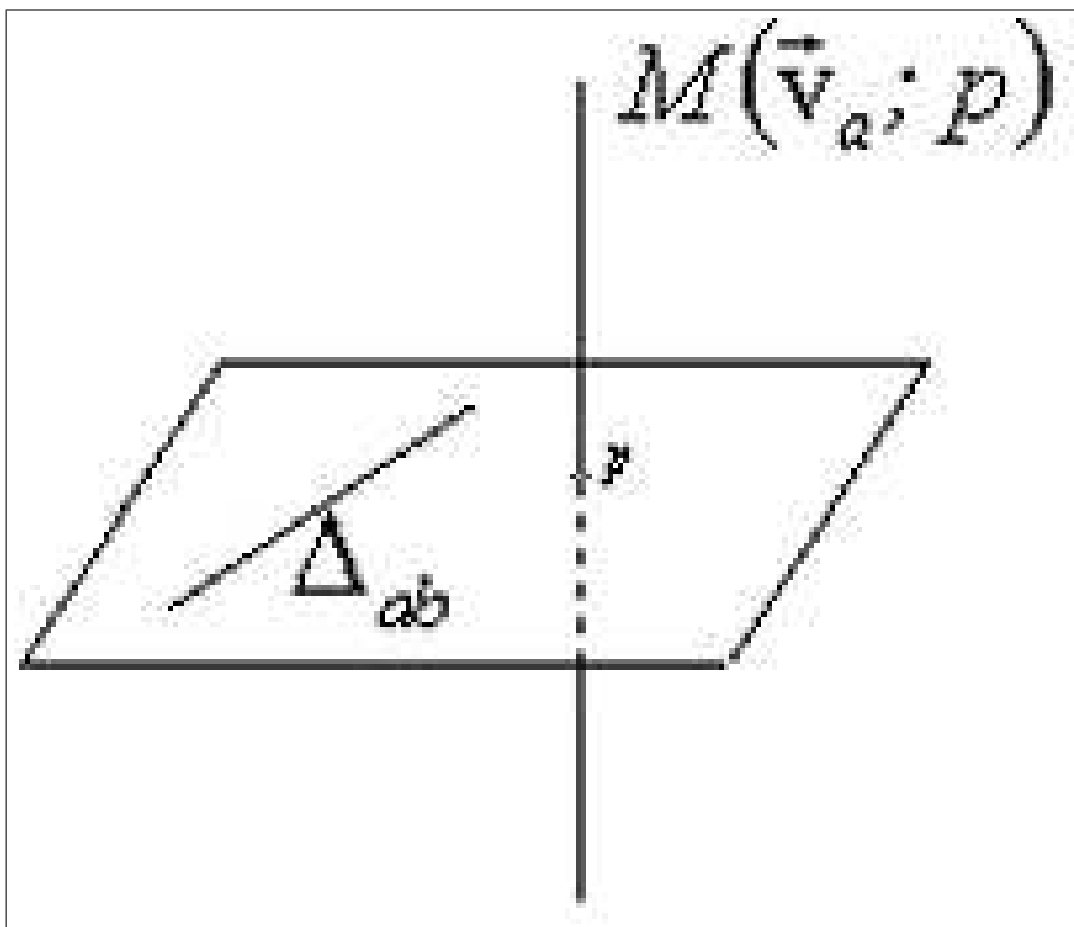


Figure 4.4: Campo de momentos do vector aplicado.

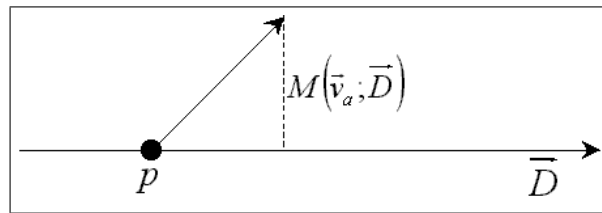


Figure 4.5: Momento de um vector aplicado relativamente a um eixo.

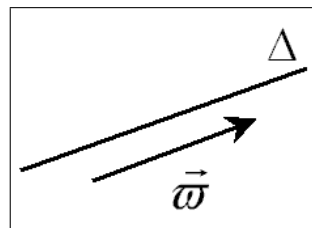


Figure 4.6: Eixo central do torsor.

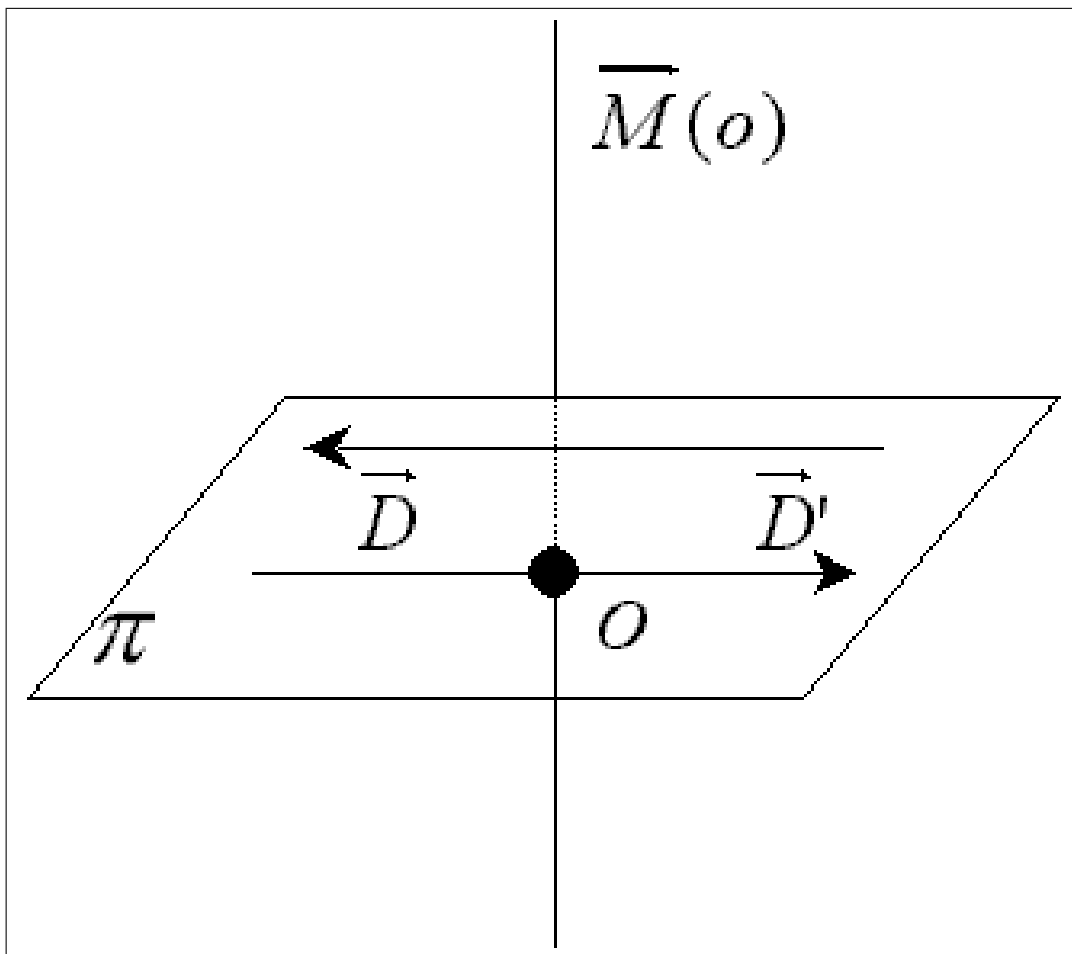


Figure 4.7: Torsor Par

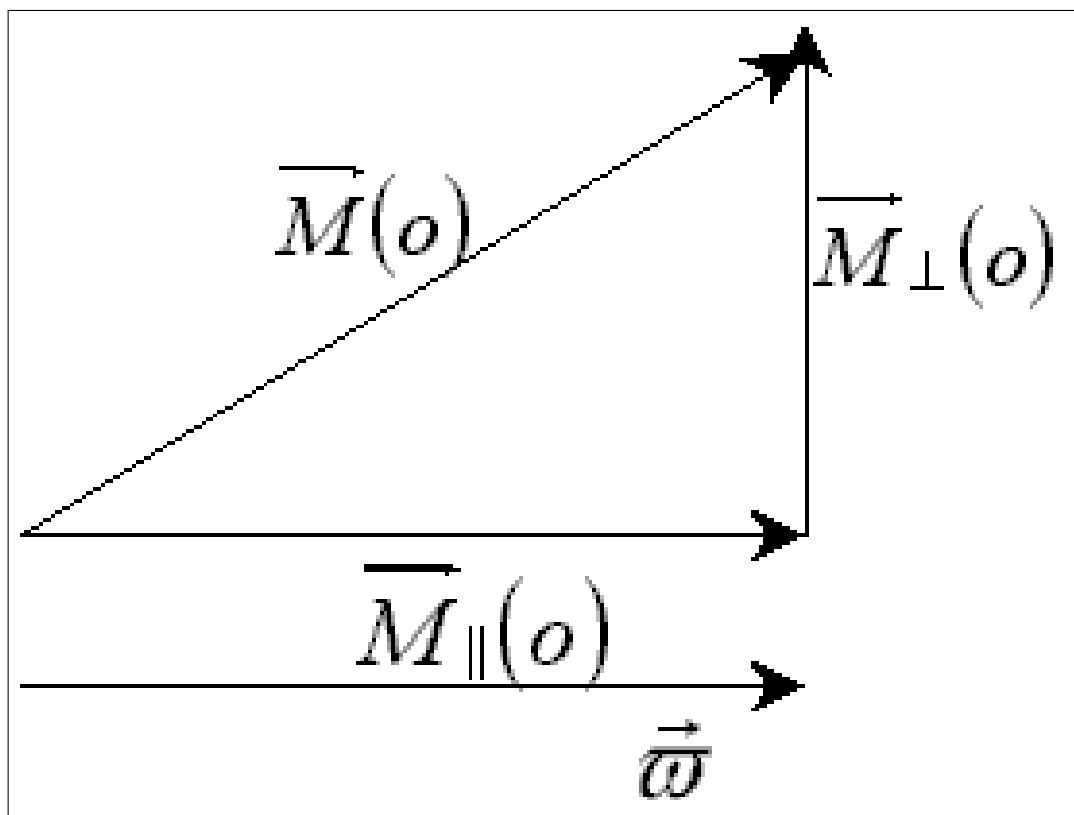


Figure 4.8:

Capítulo 5

Congruências Lineares. Feixes de Complexos Lineares

5.1 Geração das congruências lineares

Quando uma recta variável em \mathbb{P}^3 é restrita, de tal forma a reduzir os seus graus de liberdade de 4 para 2 (independentes), então diz-se que ela descreve uma **congruência de linhas** \mathfrak{C} . Por exemplo, \mathfrak{C} pode ser o conjunto de linhas comuns a dois complexos de linhas. É claro que se impomos ainda mais duas restrições, é de esperar que apenas um número finito de rectas de \mathfrak{C} satisfaçam essas restrições adicionais. Assim, por um ponto genérico $P \in \mathbb{P}^3$, passam apenas um número finito m de rectas de \mathfrak{C} . Este número m diz-se a **ordem** da congruência \mathfrak{C} . Anàlogamente, existem apenas um número finito n de rectas de \mathfrak{C} , situadas num plano genérico $\pi \subset \mathbb{P}^3$, e este número n diz-se a **classe** de \mathfrak{C} . A congruência \mathfrak{C} diz-se então uma congruência (m, n) .

Como exemplos simples temos:

- A **estrela**, que é uma congruência $(1, 0)$.
- O **plano regrado**, que é uma congruência $(0, 1)$.
- O conjunto de linhas que intersectam duas rectas não coplanares, que é uma congruência $(1, 1)$.
- A congruência $(1, 3)$ das cordas de uma cúbica não plana (ver a secção 2.12)

Um ponto P diz-se um **ponto singular** de uma congruência \mathfrak{C} , se por P passam uma infinidade de linhas de \mathfrak{C} . Anàlogamente, um plano que contenha uma infinidade de linhas de \mathfrak{C} , diz-se um **plano singular** de \mathfrak{C} .

5.2 Congruências Lineares

As linhas comuns a dois complexos lineares de linhas, \mathfrak{L}_a e \mathfrak{L}_b , formam uma congruência \mathfrak{C} , de tipo $(1, 1)$, que se diz uma **congruência linear**. A recta da congruência que passa num dado ponto P , é a (única) recta de intersecção dos planos polares de P , tomados relativamente a cada um dos referidos complexos.

Correlativamente, dado um plano qualquer ϖ , a recta da congruência situada em ϖ , é a (única) recta que une os pólos desse plano, tomados relativamente a cada um dos referidos complexos.

As equações de \mathfrak{C} podem ser escritas na forma (ver (3.3.7)):

$$\mathfrak{C}: \quad \mathbf{p} \in \Omega: \quad \begin{cases} \Omega(\mathbf{a}, \mathbf{p}) = \mathbf{a} \wedge \mathbf{p} = 0 \\ \Omega(\mathbf{b}, \mathbf{p}) = \mathbf{b} \wedge \mathbf{p} = 0 \end{cases} \quad (5.2.1)$$

e as linhas de \mathfrak{C} claramente que pertencem ao feixe de complexos lineares dado por:

$$\Omega(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \mathbf{p}) = (\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}) \wedge \mathbf{p} = 0$$

Procuremos os complexos singulares deste feixe. Eles serão definidos pelas raízes λ da equação quadrática $\Omega(\mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}, \mathbf{a} + \lambda \mathbf{b}) = 0$, isto é:

$$\Omega(\mathbf{b}, \mathbf{b}) \lambda^2 + 2\Omega(\mathbf{a}, \mathbf{b}) \lambda + \Omega(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 0 \quad (5.2.2)$$

Consideremos então as três possibilidades seguintes:

- a equação (5.2.2) tem duas raízes distintas λ_1 e λ_2 - o feixe de complexos lineares contem dois complexos singulares \mathfrak{L}_1 e \mathfrak{L}_2 que podem ser escolhidos como a base do feixe. Portanto, neste caso, a congruência \mathfrak{C} é constituída pelas rectas que se apoiam sobre duas mesmas rectas - os eixos \mathfrak{d}_1 e \mathfrak{d}_2 dos dois complexos singulares \mathfrak{L}_1 e \mathfrak{L}_2 - as chamadas **rectas focais (ou directrizes) da congruência**.
- a equação (5.2.2) tem uma raíz dupla $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2$. Neste caso, a congruência \mathfrak{C} tem apenas um eixo (directriz ou recta focal) \mathfrak{d} e diz-se **especial**. \mathfrak{C} consiste então de todas as rectas que se apoiam sobre \mathfrak{d} e que pertencem também a um complexo linear \mathfrak{L} . A recta \mathfrak{d} pertence a \mathfrak{L} porque, caso contrário, todas as linhas de \mathfrak{C} intersectariam a linha \mathfrak{d}' , conjugada de \mathfrak{d} relativamente a \mathfrak{L} , e a congruência teria dois eixos.

As linhas de \mathfrak{C} que passam num ponto $P \in \mathfrak{d}$ situam-se sobre um plano que contem \mathfrak{d} - o plano π_P , polar de P relativamente ao complexo linear \mathfrak{L} - e a pontual $\{P\}_{P \in \mathfrak{d}}$ e o feixe $\{\pi_P\}$ correspondem-se homograficamente.

- a equação (5.2.2) é satisfeita idênticamente $\forall \lambda$. Isto acontece quando os complexos \mathfrak{L}_a e \mathfrak{L}_b são ambos especiais e os respectivos eixos \mathbf{a} e \mathbf{b} se intersectam. A congruência \mathfrak{C} consiste neste caso de todas as rectas que passam no ponto em comum a \mathbf{a} e \mathbf{b} , juntamente com todas as linhas situadas no plano gerado por \mathbf{a} e \mathbf{b} .

Recapitulando, temos a seguinte:

- **Proposição 5.2.1** ... *A congruência linear geral consiste de todas as rectas que se apoiam em duas rectas que não se intersectam. A congruência linear especial é gerada por todas as linhas ℓ que se apoiam numa linha fixa \mathfrak{d} , de tal forma que o ponto $\ell \cap \mathfrak{d}$ e o plano $\mathfrak{d} \vee \ell$ se correspondem sob uma homografia fixa. Finalmente, congruência linear degenerada é formada por uma estrela centrada em A , e um plano regrado π , com $A \in \pi$.*

No caso geral, conhecidas as duas directrizes (ou rectas focais) \mathfrak{d}_1 e \mathfrak{d}_2 , da congruência linear \mathfrak{C} , é fácil construir a recta de \mathfrak{C} que passa num certo ponto P dado, assim como a recta de \mathfrak{C} , contida num certo plano ϖ dado:

- A recta $\mathfrak{r} \in \mathfrak{C}$, que passa em P , é exactamente a recta de intersecção dos planos $P \vee \mathfrak{d}_1$ e $P \vee \mathfrak{d}_2$.
- A recta $\mathfrak{r} \in \mathfrak{C}$, contida no plano ϖ , é exactamente a recta $\mathfrak{r} = A \vee B$, que une os pontos de intersecção $A = \varpi \cap \mathfrak{d}_1$ com $B = \varpi \cap \mathfrak{d}_2$.

É claro que a solução para estes problemas está unívocamente determinada, a não ser quando, no primeiro problema, o ponto P pertença a uma das directrizes, ou quando, no segundo problema, o plano ϖ contenha uma dessas directrizes. Por isso os pontos de \mathfrak{d}_1 e de \mathfrak{d}_2 , são **pontos singulares**, e os planos que contêm \mathfrak{d}_1 ou \mathfrak{d}_2 , são **planos singulares**, relativamente à congruência linear \mathfrak{C} . Consideremos uma congruência linear geral \mathfrak{C} , que seja intersecção de dois complexos lineares, e sejam \mathfrak{d}_1 e \mathfrak{d}_2 , as duas directrizes (ou rectas focais) de \mathfrak{C} . As rectas que unem um ponto qualquer de uma das directrizes \mathfrak{d}_1 , aos diversos pontos da outra \mathfrak{d}_2 , pertencem à congruência, e portanto, pertencem também a cada um dos dois complexos. Logo, por (P6), as rectas \mathfrak{d}_1 e \mathfrak{d}_2 são conjugadas relativamente a cada um dos complexos.

Concluindo: “dois complexos lineares quaisquer têm em comum um par de rectas conjugadas, reais ou imaginárias conjugadas”. No primeiro caso, a a intersecção dos dois complexos diz-se uma congruência linear hiperbólica (ver figura 5.1) e no segundo caso, uma congruência linear elíptica (ver Figura 5.2)”.

5.3 Superfícies Regradas

Uma superfície regrada \mathfrak{R} é um sistema de linhas gerado por uma linha variável cuja posição depende efectivamente de um único parâmetro. A **ordem** de \mathfrak{R} , quando esta é algébrica, é o número de linhas de \mathfrak{R} que intersectam uma linha genérica de \mathbb{P}^3 .

Um exemplo particularmente simples é o da intersecção de três complexos lineares \mathfrak{L}_i , $i = 1, 2, 3$. Se as equações desses três complexos são $\mathfrak{L}_i \equiv \Omega(\mathbf{a}_i, \mathbf{p}) = 0$, então as linhas comuns a esses complexos, também pertencem à rede (∞^2 -família linear) $\lambda \mathfrak{L}_1 + \mu \mathfrak{L}_2 + \nu \mathfrak{L}_3 = 0$. As linhas pertencem por isso, em particular, aos *Infinity* complexos especiais

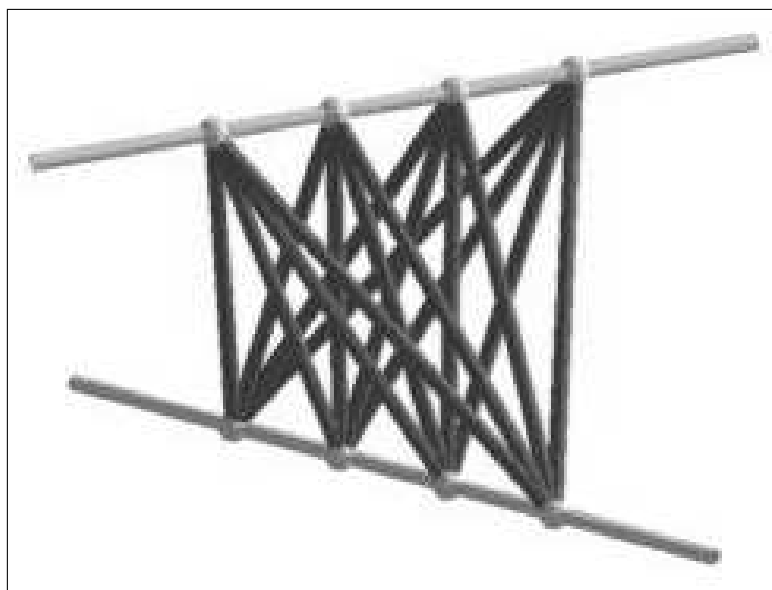


Figure 5.1: Congruência Linear Hiperbólica

dessa família, e elas têm os eixos desses complexos como transversais comuns. Mas esses eixos são dados por vectores coordenados da forma:

$$\lambda \mathbf{a}_1 + \mu \mathbf{a}_2 + \nu \mathbf{a}_3 = 0$$

e como podemos tomar três dos complexos especiais como os \mathfrak{L}_i , podemos concluir que o conjunto dos ∞^1 eixos formam um regulus, e o conjunto das linhas que neles se apoiam formam o regulus complementar (ver a secção 2.11). Concluindo: “a intersecção de três complexos lineares é, em geral, um regulus, i.e., uma superfície regradada de ordem 2”.

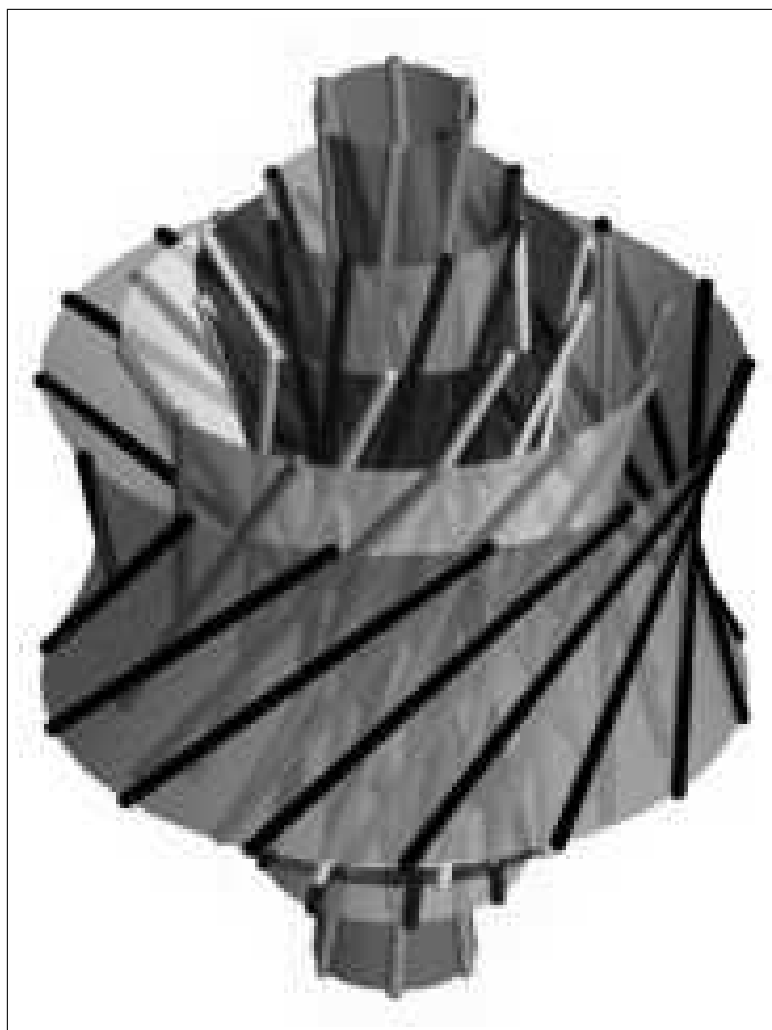


Figure 5.2: Congruência Linear Elíptica

Capítulo 6

Bibliografia

- [A] ... R. Artzy, “*Linear Geometry*”, Addison Wesley, New York, 1965.
- [AS] ... Avida S. and Shashua A., “Trajectory Triangulation of Lines: Reconstruction of a 3D point moving along a line from a monocular image sequence”, *Institute of Computer Science*, The Hebrew University, Jerusalem, Israel, 2001.
- [Be] ... Marcel Berger, “*Géométrie*”, Vols. 1 a 5, Cedic/ Ferdinand Nathan, CNRS, 1978.
- [Bo] ... G. Bouligand, “*Cours de Géométrie Analytique*”, Paris, Librairie Vuibert, 1928.
- [BK] ... Herbert Buseman & P. Kelly, “*Projective Geometry and Projective Metrics*”, Academic Press, 1953.
- [D] ... J. Dieudonné, “*Algèbre Linéaire et Géométrie Élémentaire*”, Hermann, 1978.
- [Fo] ... Fouret G., “*Notions Géométriques sur les Complexes et les Congruences de Droites*”. Ap— endice do livro de Schoenflies A. “*La Géométrie du Mouvement*”, Gauthiers-Villars, 1893.
- [Fr] ... Jean Frenkel, “*Géométrie pour l’élève-professeur*”, Hermann, 1977.
- [Ga] ... René Garnier, “*Leçons d’Algèbre et de Géométrie*”, Vol. I, II e III. Paris, Gauthier-Villars, 1937.
- [Ju] ... Gaston Julia, “*Cours de Géométrie Infinitésimale*”, Fasc. 3 e 4, Paris, Gauthier-Villars, 1953.
- [Pe] ... Dan Pedoe, “*Geometry, a Comprehensive Course*”; Dover Publications Inc., 1970.
- [PW] ... H. Pottmann & J. Wallner, “*Computational Line Geometry*”, Springer-Verlag, July 2001.

- [S] ... Pierre Samuel, "*Géométrie Projective*", Presses Universitaires de France, 1986.
- [SK] ... J. G. Semple & G. T. Kneebone, "*Algebraic Projective Geometry*". Oxford Classic Texts in Physical Sciences, Oxford University Press, 1952.
- [S] ... D. M. Y. Sommerville, "*Analytic Geometry of Three Dimensions*", Cambridge University Press, 1947.
- [Y] ... Paul B. Yale, "*Geometry and Symmetry*", Dover Publications Inc., 1968.