FCUP-Matemática

Elementos de Topologia - 2003

Exercícios

Nota: os exercícios marcados com (S) são exercícios suplementares que, independentemente do seu grau de dificuldade, são considerados como secundários relativamente à matéria teórica; contêm informação extra e por isso devem, pelo menos, ser lidos; os exercícios marcados com uma $\star$ são de maior grau de dificuldade - alguns são enunciados de resultados matemáticos conhecidos e que se relacionam de perto com a matéria do curso

1 Espaços métricos - primeiras definições

Recordem-se os axiomas para uma métrica:

$$\begin{aligned} \text{M-1} &: \quad d(x,y)=0 \ sse \ x=y \\ \text{M-2} &: \quad d(x,y)=d(y,x) \\ \text{M-3} &: \quad d(x,z)\leqslant d(x,y)+d(y,z) \end{aligned}$$

Exercício 1 *Mostre que se uma função,* $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *, verifica os três axiomas para uma métrica,* $M-1, M-2, M-3$ *então* $d(x,y) \geqslant 0 \ ,\forall x,y \in X$.

Exercício 2 *Para* $j = 1,2,3$ *dê um exemplo de uma função* $d_i : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ *, em que* X *é um conjunto com três elementos, que não satisfaça o axioma* $M-i$ *mas satisfaça os outros dois axiomas para uma métrica.*

Exercício 3 *Mostre que o sistema de axiomas para uma métrica,*$M-1, M-2, M-3$ *é equivalente ao sistema de axiomas que consiste de* $M-1$ *e* $M-3\prime$ *em que* $M-3\prime$ *é*

$$d(z,x) \leqslant d(x,y)+d(y,z) \ \ \textit{para todos} \ \ x,y,z \in X$$

Exercício 4 *Verifique que as funções* $\|\|_1, \|\|_2 : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *definidas,para* $X = (x_1, x_2, ..., x_n)$*, por*

$$\|X\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n| = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ \ ; \ \ \|X\|_2 = \max\{|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|\}$$

são normas.

Exercício 5 *Sejam* d_1 *e* d_2 *as distâncias em* $\mathbb{R}^n$ *derivadas das normas*$\|\|_1$ *e* $\|\|_2$ *, respectivamente, e* d_e *a distância euclidiana. Mostre que se verifica*

$$d_2 \leq d_e \leq d_1 \leq nd_2.$$

Dê exemplo de um par de pontos $X, Y \in \mathbb{R}^n$ *para o qual as três desigualdades sejam estritas.*

Exercício 6 *a) Verifique que num espaço vectorial(real),* E *, uma norma* $\|\| : E \longrightarrow E$ *que resulta de um produto interno* $\langle,\rangle : E \longrightarrow E$ *, isto é, tal que* $\langle x,x\rangle = \|x\|^2, \forall x \in E$*, verifica a* regra do paralelogramo:

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$$

b) Mostre, usando a), que em $\mathbb{R}^n, n \geq 2$*, as normas*$\|\|_1$ *e* $\|\|_2$ *não são dadas por nenhum produto interno.*

Exercício 7 *Mostre que em* $\mathcal{L}(X;\mathbb{R})$*, os espaço das funções reais limitadas definidas num subconjunto* $X \subset \mathbb{R}$*,* $\|f\| = \sup\limits_{x\in X} |f(x)|$*define uma norma. Seja* $(\mathcal{L}; d)$ *a métrica associada.a) Calcule* $d(\sin, \cos)$*. b) Diga se esta norma provém de um produto interno no caso de* X *ter mais do que um elemento.*

Exercício 8 *Prove que toda a norma* $\|\|$ *em* $\mathbb{R}$ *é da forma* $\|x\| = a \cdot |x|\,, a > 0$*. Conclua que toda a norma em* $\mathbb{R}$ *provém de um produto interno.*

Exercício 9 *Mostre que* $d : \mathbb{R}\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *, definida por* $d(x, y) = (x - y)^2$ *, não é uma métrica.*

Exercício 10 *Seja* $d : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma métrica. Verifique que*

$$\alpha(x,y) = \sqrt{d(x,y)}\ ,\ \beta(x,y) = \frac{d(x,y)}{1+d(x,y)}\quad ,\ \gamma(x,y) = \min\{1, d(x,y)\}$$

são ainda métricas em M*.*

Exercício 11 *Identifique os subespaços* $X \subset \mathbb{R}^2$ *para os quais as métricas induzidas de* d_1 *e de* d_2 *(exercício 5.) coincidem com a métrica euclidiana.*

Exercício 12 *Sejam* $(X_i, d_i), i = 1, 2, ..., n$ *espaços métricos e seja* $X = \prod\limits_{i=1}^{n} X_i = \prod_{i=1}^{n} X_i$*.*

a) Mostre que as função definidas, para $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in X$*, por*

$$\begin{aligned} d\prime(x,y) &= \sum_{i=1}^{n} d_i(x_i, y_i) \\ d\prime\prime(x,y) &= \max\{d_i(x_i,y_i) : i = 1,2,...,n\} \end{aligned}$$

são métricas em X*.*

b) Compare as duas métricas entre si e com a métrica produto

$$d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} d_i^2(x_i, y_i)}$$

à semelhança do exercício 5.

Exercício 13 *Seja* $X = \bigcup\limits_{j=1}^{n} X_j$ *com* $X_j \cap X_k = \{x_0\}$ *para* $j \neq k$ *e seja* d_j *uma métrica em* X_j*. Mostre que a função definida por*

$$d(x,y) = \begin{cases} d_j(x,y) & se \quad x, y \in X_j \\ d_j(x,x_0) + d_k(x_0,y) & se \quad x \in X_j, y \in X_k, j \neq k \end{cases}$$

é uma métrica em X*.*

Exercício 14 *(S) - Mostre que, num espaço vectorial real E , uma métrica d é proveniente de uma norma sse ("se e só se") para $x, a \in E$ e $\lambda \in \mathbb{R}$ arbitrários, se verifica $d(x+a, y+a) = d(x, y)$ (invariância por translações) e $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda|\, d(x, y)$.*

Exercício 15 *(S) - Seja E um espaço vectorial real munido de um produto interno $\langle , \rangle : E \longrightarrow E$. Recorde a* desigualdade de Cauchy-Schwarz *:*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \cdot \|y\|$$

Mostre que se dá a igualdade sse x, y são linearmente dependentes.

Exercício 16 *(S) - Seja $(E, \|\|)$ um espaço vectorial normado e (E, d) o espaço métrico associado.*

a)Mostre que se $c - a = t \cdot (b - a), t \geq 1$ (isto significa que b pertence ao segmento de recta de extremidades a e c), então $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$.

b) Verifique que o recíproco não é verdadeiro em geral(isto é, em qualquer espaço vectorial normado), considerando em $(\mathbb{R}^2, \|\|_1)$ os pontos $a = (0, 1), b = (0, 0), c = (1, 0)$.

c) Mostre que se verifica o recíproco no caso de a norma provir de um produto interno.

Exercício 17 *(S) - Seja $X \subset \mathbb{R}^2$. Mostre que se a métrica euclidiana induzida em X coincide com a* métrica zero-um *então X tem no máximo três elementos. E se fosse $X \subset \mathbb{R}^3$? Generalize para $\mathbb{R}^n$.*

Dê exemplo de um espaço vectorial normado E e de um seu subconjunto infinito $X \subset E$ tais que para para todos $x, y \in X$, $x \neq y \Rightarrow d(x, y) = 1$.

2 Aplicações entre espaços métricos - 1

2.1 Continuidade e continuidade uniforme

Exercício 18 *Mostre que para cada $j = 1, 2, ...$ as aplicações $p_j : \mathbb{R}^\omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definidas por $p_j(x_1, x_2, ...) = x_j$ são* não-expansiveis.

Exercício 19 *Mostre que a* inversão *e a* projecção estereográfica *não são* homeomorfismos uniformes.

Exercício 20 *Dê exemplo de uma aplicação bijectiva $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que seja uniformemente contínua mas não seja um homeomorfismo uniforme.*

Exercício 21 *Seja $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ uma função* uniformemente contínua. *Mostre que se $x_n \in X$ é uma sucessão convergente (não necessariamente para um ponto pertencente a X), então $f(x_n)$ também converge. Dê um exemplo que mostre que o mesmo resultado não é válido se supusermos que f é apenas contínua.*

Exercício 22 *Mostre que as seguintes funções não são uniformemente contínuas:*

a) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;

b) $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } x > 0 \\ -1 \text{ se } x < 0 \end{cases}$;

c) $f : \mathbb{R} - \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \sin(\frac{1}{x})$

Use a caracterização de continuidade em termos de sucessões *para mostrar que não é possível estender as funções de b) e c) a funções contínuas em todo* $\mathbb{R}$*.*

Exercício 23 *Seja* $X = \prod_{i=1}^{n}(X_i, d_i)$ *um espaço produto e* $f : Y \longrightarrow X$ *uma aplicação dada por* $f(y) = (f_1(y), f_2(y), ..., \not{f}_n(y))$ *em que* $f_i : Y \longrightarrow X_i$*. Mostre que* f *é contínua sse* f_i *é contínua para todo* $i = 1, 2, ..., n$*. Verificar-se-á o análogo para continuidade uniforme?*

Exercício 24 ***(S)*** *- Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x \cdot \sin(\frac{1}{x})$ *se* $x \neq 0$ *e* $f(0) = 0$*. Mostre que* f *é contínua no ponto* 0 *mas não é* lipschitziana *em nenhum intervalo que contenha* 0*.*

Exercício 25 ***(S)*** *- Seja* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^2 \cdot \sin(\frac{1}{x})$ *se* $x \neq 0$ *e* $f(0) = 0$*. Mostre que* f *é derivável com* derivada descontínua*.*

Exercício 26 ***(S)*** *- Seja* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *derivável em todos os pontos do intervalo* $I \subset \mathbb{R}$ *. Mostre que se* f *é* lipschitziana *então a sua derivada é limitada em* M*.*

Exercício 27 *Sejam* $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínuas no ponto* $a \in M$ *. Mostre que se* $f(a) < g(a)$ *, existe* $\delta > 0$ *tal que,* $\forall x, y \in M$ *,* $x, y \in B(a; r) \Rightarrow f(x) < g(y)$*.*

Enuncie explicitamente o corolário que se obtém tomando $f(x) = 0$ *,* $\forall x \in M$*. Conclua que se* $B \subset M$ *é uma bola fechada e* $c \in M - B$ *então existe uma bola aberta (e portanto uma bola fechada)* B' *, de centro* c *, tal que* $B \cap B' = \emptyset$*.*

Exercício 28 *Sejam* $f, g : M \longrightarrow N$ *contínuas no ponto* $a \in M$*. Mostre que se* $f(a) \neq g(a)$ *, então existe uma bola aberta* $B = B(a; r)$*, tal que* $f(B) \cap g(B) = \emptyset$*. Em particular,* $x \in B \Rightarrow f(x) \neq g(x)$*.*

Exercício 29 *Sejam* $f, g : M \longrightarrow N$ *contínuas. Dado* $a \in M$ *, suponha que toda a bola de centro* a *contém um ponto* x *tal que* $f(x) = g(x)$*. Conclua que* $f(a) = g(a)$*. Use este facto para mostrar que se* $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *são contínuas e* $f(x) = g(x)$ *para todo* $x \in \mathbb{Q}$ *então* $f = g$*. (Uma função contínua fica completamente determinada pelos valores que toma nos números racionais.)*

Exercício 30 *Dadas* $f, g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *, defina-se* $f \vee g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *e* $f \wedge g : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *por* $(f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ *e* $(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}$*. Prove que se* f *e* g *são contínuas no ponto* $a \in M$ *então* $f \vee g$ *e* $f \wedge g$ *são contínuas no mesmo ponto.*

Exercício 31 *Seja* $M = A \cup B$*. Se* $f : M \longrightarrow N$ *é tal que* $f\mid_A$ *e* $f\mid_B$ *são contínuas, então* f *é contínua em cada ponto* $a \in A \cap B$*.*

Nota: os exercícios seguintes, 32-38, dão, no seu conjunto, provas de algumas propriedades fundamentais das funções reais de variável real, relativas à continuidade.

Exercício 32 ***(S)*** *- Sejam* I, J *intervalos arbitrários de* $\mathbb{R}$ *e* $f : I \longrightarrow J$ *uma bijecção que é* estritamente monótona*. Prove que* f *(e consequentemente* f^{-1}*) é contínua.*

Exercício 33 ***(S)*** - *Seja* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ *uma função contínua. Suponha que* $P = \{x \in X \ ; \ f(x) > 0\}$ *é limitado e não-vazio. Sejam* $a = \inf P$, $b = \sup P$*. Mostre que se* $a \in X$ *e* $b \in X$ *então* $f(a) \geq 0$ *e* $f(b) \geq 0$.

Exercício 34 ***(S)*** - *Dada* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *contínua, com* $f(a) > 0 > f(b)$ *, seja* $c = \sup\{x \in [a, b] \ ; \ f(x) > 0\}$*. Prove que* $f(c) = 0$*. Conclua que se* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *é contínua num intervalo* I *então* $f(I)$ *é um intervalo. (*Teorema dos Valores Intermédios, de Bolzano*).*

Exercício 35 ***(S)*** - *Seja* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua no intervalo* I*. Mostre que se* f *é injectiva então é estritamente monótona.(Consequentemente, pelos exercícios anteriores, a sua inversa ,* f^{-1}*, definida no intervalo* $J = f(I)$ *, também é contínua; isto mostra, em particular, que toda a bijecção contínua* $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *é um* homeomorfismo*).*

Exercício 36 ***(S)*** - *Mostre que toda a função contínua* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *é limitada. (Sugestão: seja* $X = \left\{x \in [a, b] \ ; \ f\,|_{[a,x]} \text{ é limitada}\right\}$*. Seja* $c = \sup X$*. Mostre que* $c \in X$ *e conclua que* $X = [a, b]$*.)*

Exercício 37 ***(S)*** - *Para toda a função contínua* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *, existem* $x_0, x_1 \in [a, b]$ *tais que* $f(x_0) \leq f(x) \leq f(x_1)$ *para todo* $x \in [a, b]$*.(*Teorema de Weierstrass *sobre a existência de máximo e mínimo) (Sugestão: se* x_1 *, por exemplo, não existisse, então, pondo* $\alpha = \sup f$ *, a função* $g(x) = 1/\left[f(x) - \alpha\right]$ *seria contínua e ilimitada em* $[a, b]$*.)*

Exercício 38 ***(S)*** - *A imagem de um intervalo fechado e limitado por uma função real contínua é ainda um intervalo fechado e limitado. Dê exemplos que mostrem que todos os demais tipos de intervalo podem ter imagem contínua que seja um intervalo de tipo diferente.*

Exercício 39 ***(S)*** - *Dada* $f : M \longrightarrow N$*, se existem constantes* $c > 0$ *e* $\alpha > 0$ *tais que* f *satisfaz a condição de Hölder* $d(f(x), f(y)) \leq c \cdot d(x, y)^\alpha$ *para todos* $x, y \in M$*, então diz-se que* f *é* hölderiana*. Mostre que se* f *é hölderiana então* f *é contínua. (Será uniformemente contínua?)*

Exercício 40 ***(S)*** - *Mostre que se* $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$*, definida num intervalo* I *, satisfaz uma condição de Hölder com* $\alpha > 1$ *então* f *é constante.*

Exercício 41 ***(S)*** - *Seja* $f : [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ *definida por* $f(x) = x^{\frac{1}{n}}$ *,* $n \in N$*. Mostre que* f *satisfaz a condição de Hölder* $|f(x) - f(y)| \leq c \cdot |x - y|^{\frac{1}{n}}$ *com* $c = 2^{(n-1)/n}$ *e, consequentemente, é contínua. Mostre que* f *não é lipschitziana em nenhum intervalo contendo* 0.

Exercício 42 ***(S)*** - *Num espaço métrico* M *,sejam* $F = B\,[a; r]$ *e* $G = M - B(a; s)$ *, com* $0 < r < s$*. Mostre que* $f : M \longrightarrow [0, 1]$ *definida por* $f(x) = \frac{d(x,F)}{d(x,F)+d(x,G)}$ *é contínua e, além disso,* $f^{-1}(0) = F$ *,* $f^{-1}(1) = G$.

Exercício 43 ***(S)*** - *Seja* $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x, y) = \frac{xy}{x^2+y^2}$ *se* $(x, y) \neq (0, 0)$ *e* $f(0, 0) = 0$*. Mostre que* f *é contínua relativamente a cada uma das variáveis, "separadamente", mas que é descontínua no ponto* $(0, 0)$*. (Sugestão: use a caracterização de continuidade em termos de sucessões.)*

Exercício 44 $\star$***(S)*** - *Invente uma métrica d em $\mathbb{R}^2$ e uma função $f = (f_1, f_2) : \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}^2, d)$ que seja descontínua mas que tenha ambas as funções coordenadas, f_1 e f_2, contínuas.*

2.2 Isometrias e Homeomorfismos

Exercício 45 *Seja E um espaço vectorial normado. Mostre que duas quaisquer bolas abertas (fechadas) com o mesmo raio são isométricas. Mais precisamente, existe uma* isometria *de E que envia uma dessas bolas na outra. Mostre, com um exemplo adequado, que para espaços métricos em geral, este resultado é falso.*

Exercício 46 *Seja T o subespaço do plano euclidiano formado por dois segmentos de recta de comprimento 1: um horizontal, I , e outro vertical, J , cuja origem é o ponto médio de I. Mostre que há sómente duas isometrias $g : T \longrightarrow T$.*

Exercício 47 *Dê exemplo de um espaço métrico, (X, d) e de uma imersão isométrica $g : X \longrightarrow X$ que não seja uma isometria.*

Exercício 48 *a) Dada uma imersão isométrica $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, mostre que existe $a \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = x + a$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ou $f(x) = -x + a$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Em particular, f é uma isometria.(Compare com o exercício seguinte; compare também com o exercício 53.)*

b) Seja $X \subset \mathbb{R}$. Mostre que toda a imersão isométrica se estende (de modo único se X tem mais que um ponto) a uma imersão $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Em particular, $f(x) = \pm x + a$, $\forall x \in X$.

Exercício 49 $\star$***(S)*** - *Seja $(E, \| \, \|)$ um espaço normado cuja norma provém de um produto interno. Mostre que toda a* imersão isométrica *$f : \mathbb{R} \longrightarrow E$ é da forma $f(t) = a + t.u$ em que $a, u \in E$ com $\|u\| = 1$.*

Exercício 50 ***(S)*** - *a) Construa uma imersão isométrica $f : \mathbb{R} \longrightarrow (\mathbb{R}^2, \| \|_1)$ cuja imagem, $f(\mathbb{R})$, não seja uma recta. Conclua que o resultado do exercício anterior não pode ser estendido aos espaços normados em geral.*

b) Poderá ter uma imersão isométrica como a anterior para $(\mathbb{R}^2, \| \|_2)$?

Exercício 51 $\star$***(S)*** - *Diga quais dos seguintes espaços são isométricos: $(\mathbb{R}^2, d_e)$, $(\mathbb{R}^2, d_1)$, $(\mathbb{R}^2, d_2)$. (Sugestão: note que uma isometria transforma bolas (esferas) em bolas (esferas) com o mesmo raio).*

Nota: os seguintes exercícios, 52-54 estabelecem resultados básicos sobre as *isometrias dos espaços euclidianos.*

Exercício 52 ***(S)*** - *a) Seja uma $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$*aplicação linear*. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes: i) T é uma imersão isométrica; ii) T é uma isometria; iii) $\|Tx\| = \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$ (com a notação $Tx = T(x)$); iv) $\langle Tx, Ty \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (isto é, T é uma* aplicação ortogonal*: preserva o produto interno).*

$\star$ *b) Mostre que uma aplicação* $T : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *é ortogonal sse a sua matriz* A *(relativamente à base canónica) verifica* $A^{-1} = A^t$ *em que* A^t *designa a* transposta *(A diz-se também ortogonal).*

$\star$ *c) Seja* $O(n)$ *o grupo das transformações (ou matrizes) ortogonais de* $\mathbb{R}^n$ *e* $SO(n)$ *o subgrupo das que têm determinante 1. c-1) Mostre que* $A \in SO(2)$ *sse é da forma* $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$*(representa uma rotação de ângulo* α *em torno da origem).c-2) Mostre que* $A \in O(n) - SO(n)$ *sse é da forma* $A = \begin{pmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha \\ \sin\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$*(representa uma reflexão numa recta que faz um ângulo de* $\frac{\alpha}{2}$ *com o eixo dos* xx*).*

Exercício 53 $\star$***(S)*** - *Seja* $\dot{f} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma imersão isométrica.(Não supomos que é linear!). Mostre que existem* $a \in \mathbb{R}^m$ *e uma aplicação linear* $T : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tais que* $f(x) = Tx + a$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$*. Em particular, se* $f(0) = 0$*, então* f *é linear; se* $m = n$ *então* f *é uma isometria e é a composta de uma aplicação ortogonal seguida de uma translação.*

Sugestão*: Comece por supor que* $f(0) = 0$ *; a) mostre que, sendo* $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ *a base canónica, e* $b_i = f(a_i)$, $i = 1, ...m$, $\{b_i\}_{i=1,...m}$ *é um conjunto ortonormado:* $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 \ , & se\ i = j \\ 0 \ , & se\ i \neq j \end{cases}$, $\forall i, j = 1, ...m$*; b) mostre, seguidamente, que* f *fica completamente determinada pelas imagens* $b_i = f(a_i)$, $i = 1, ...m$ *,isto é, se* $g(a_i) = f(a_i) = b_i$, $\forall i$ *, então* $f = g$ *.(Componha* f *com uma aplicação ortogonal* $T \in O(n)$ *tal que* $Tf(a_i) = a_i$*.)*

Exercício 54 $\star$***(S)*** - *Sejam* $X \subset \mathbb{R}^m$ *não-vazio e* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma imersão isométrica. Mostre que existe uma imersão isométrica (única quando* X *gera* $\mathbb{R}^m$*)* $\varphi : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *tal que* $\varphi|_X = f$*.*

Exercício 55 $\star$***(S)*** - *Seja* $\mathbb{R}^\infty$ *o espaço vectorial real formado pelas sucessões reais* $x = (x_1, ..., x_n, ...)$ *com apenas um número finito de termos* $x_n \neq 0$*. Considere em* $\mathbb{R}^\infty$ *a norma dada pelo produto interno* $\langle x, y \rangle = x_1y_1 + ... + x_ny_n + ...$ *(Esta soma é finita.) Mostre que a transformação linear* $T : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ *, definida por* $T(x_1, x_2, ...) = (0, x_1, x_2, ...)$ *é uma imersão isométrica mas não é uma isometria.(Compare com o exercício 52.a).)*

Exercício 56 *Sejam* $f : M \longrightarrow N$ *e* $g : N \longrightarrow P$ *contínuas e tais que* $g \circ f : M \longrightarrow P$ *seja um* homeomorfismo*. Supondo que* f *é sobrejectiva (ou então que* g *é injectiva) prove que* f *e* g *são ambas homeomorfismos.*

Exercício 57 *Sejam* $f : M \longrightarrow N$ *e* $g : N \longrightarrow M$ *contínuas tais que* $g \circ f = id : M \longrightarrow M$*. Prove que* f *é um homeomorfismo de* M *sobre um subespaço* $f(M) \subset N$*.*

Exercício 58 *Considere os seguintes subespaços de* $\mathbb{R}$*:* $X = [0, 1] \cup \{2, 3\}$*;* $Y = [0, 2] \cup \{3, 4, 5\}$*;* $Z = [0, 1] \cup [2, 3] \cup \{4, 5\}$*. Mostre que são dois a dois não homeomorfos. (Sugestão: ser* ponto isolado *é uma propriedade topológica; tenha além disso presente o teorema dos valores intermédios)*

Exercício 59 *Mostre que os espaços métricos seguintes são dois a dois homeomorfos:*

$X = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ x^2+y^2=1\}$
$Y = S^1 \times \mathbb{R}$
$Z = \mathbb{R}^2 - \{0\}$
$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ 1 < x^2+y^2 < 2\}$
$T = S^2 - \{p,q\}$ *onde* $p = (0,0,1)$ *e* $q = (0,0,-1)$
$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ ; \ z^2 = x^2+y^2 \ , \ z > 0\}$

Exercício 60 *Estabeleça um homeomorfismo entre o "primeiro quadrante"* $Q = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ x \geq 0, y \geq 0\}$ *e o semi-plano* $H = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \ ; \ y \geq 0\}$.

Exercício 61 ***(S)*** - *Seja* $(E, \|\|)$ *um espaço vectorial normado. Mostre que as seguintes aplicações são homeomorfismos:*

$m_r : E \longrightarrow E$ *, dada por* $m_r(x) = rx$ *(homotetia de razão* r*)*
$T_a : E \longrightarrow E$ *, dada pro* $T_a(x) = x + a$ *(translação pelo vector* a*)*

Exercício 62 (S) - *Seja* $(E, \|\|)$ *um espaço vectorial normado. Mostre que a aplicação* $f : E \longrightarrow B(0,1)$ *definida por* $f(x) = \frac{x}{1+\|x\|}$ *é um homeomorfismo com inversa* $g(y) = \frac{y}{1-\|y\|}$.

Exercício 63 (S) - *Um espaço métrico,* M *, diz-se* metricamente homogéneo *se para todos* $a, b \in M$ *, existe uma isometria* $f : M \longrightarrow M$ *tal que* $f(a) = b$.

a) Mostre que $\mathbb{R}^n$ *é metricamente homogéneo.*

b) Mostre que se $B = \{x \in \mathbb{R}^n ; \|x\| < 1\}$ *é a bola aberta unitária, toda a isometria* $g : B \longrightarrow B$ *verifica* $g(0) = 0$. *Conclua que* B *não é metricamente homogénea.*

$\star$ *c) Mostre que a esfera unitária* $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} ; \|x\| = 1\}$ *é metricamente homogénea.*

Exercício 64 (S) - *Um espaço métrico* M *diz-se* topologicamente homogéneo *quando, dados* $a, b \in M$ *arbitrários, existe um homeomorfismo* $h : M \longrightarrow M$ *tal que* $h(a) = b$. *Prove:*

(a) Se M *e* N *são homeomorfos então* M *é topologicamente homogéneo sse* N *o é.*

(b) Todo o espaço discreto é topologicamente homogéneo.

(c) Toda a bola aberta num espaço vectorial normado é topologicamente homogénea.

(d) $X = \{0, 1, 1/2, ..., 1/n, ...\}$*, com a métrica induzida de recta, não é topologicamente homogéneo.*

(e) O intervalo fechado $[a,b]$ *não é topologicamente homogéneo.*

Exercício 65 $\star$***(S)*** - *Mostre que o conjunto*

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \ ; \|x\|^2 + \|y\|^2 = 1, y \neq 0\right\}$$

é homeomorfo ao produto $\mathbb{R}^m \times S^{n-1}$.

Exercício 66 *$\star$(S) - Prove que o hiperboloide*

$$H = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \ ; \ \|x\|^2 - \|y\|^2 = 1\right\}$$

é homeomorfo ao produto $S^{m-1} \times \mathbb{R}^n$.

Exercício 67 *(S) - Construa um homeomorfismo entre $\mathbb{R}^2 - B((0,0);1)$ e $\mathbb{R}^2 - \{0\}$.*

Exercício 68 *(S) - Sejam p, q pontos distintos da esfera S^2 e $D \subset \mathbb{R}^2$ um disco fechado. Prove que $S^2 - \{p,q\}$ é homeomorfo a $\mathbb{R}^2 - D$.*

Exercício 69 *(S) - Seja M o conjunto de todas as bolas abertas do plano, $\mathbb{R}^2$. Mostre que $d\left(B(a;r), B(b;s)\right) = |a-b| + |r-s|$ define em M uma métrica com a qual M é homeomorfo a $U = \left\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 ; z > 0\right\}$. Estabeleça um homeomorfismo entre U e $\mathbb{R}^3$.*

3 Conceitos métricos e topológicos - 1

3.1 Conceitos métricos

Exercício 70 *Mostre que se todo o subespaço* próprio *de um espaço métrico é limitado, então o próprio espaço é limitado.*

Exercício 71 *Recorde as métricas intoduzidas no exercício 5. Represente gráficamente, em $\mathbb{R}^2$, e numa mesma figura, as bolas $B_{d_1}(a;r)$, $B_{d_2}(a;r)$ e $B_{d_e}(a;r)$, e justifique devidamente a sua resposta. Relacione as relações de inclusão entre estas três bolas com as desigualdades do exercício 5.*

Exercício 72 *Seja $X = [-1,2] \cup (4,5]$ com a métrica induzida da métrica usual em $\mathbb{R}$. Indique $B_X[2;2]$; $B_X(0;2)$; $B_X[5;3]$; $S_X(\frac{3}{2};3)$.*

Exercício 73 *Seja $X \subset \mathbb{R}^2$ definido por*

$$X = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq 0\right\} \cup \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1 \text{ e } y \geq 0\right\}$$

Para as métricas d_1 e d_2 represente no subespaço métrico X :

$$B_{(X,d_2)}\left((0,1);2\right) \ ; \ B_{(X,d_1)}\left((0,0);2\right) \ ; \ B_{(X,d_1)}\left[(0,0);1\right] \ ;$$

$$S_{(X,d_2)}\left((-1,-1);2\right) \ ; \ S_{(X,d_1)}\left((1,0);1\right) \ ; \ B_{(X,d_2)}\left[(0,-2);2\right] \ .$$

Exercício 74 *Mostre que em todo o espaço métrico (M,d) se verifica:*

$$B[a;r] = \bigcap_{s>r} B(a;s) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(a; r + \frac{1}{n}\right)$$

e

$$\{a\} = \bigcap_{r>0} B(a;r) = \bigcap_{n=1}^{\infty} B(a;\frac{1}{n})$$

Dualmente, exprima cada bola aberta de M como união de bolas fechadas.

Exercício 75 *Mostre que todo o espaço métrico finito é* discreto.

Exercício 76 *Mostre que:*

a) Num espaço métrico, para dois pontos distintos quaisquer, existem bolas fechadas e disjuntas, centradas nesses pontos

b) Num espaço métrico, se $b \notin B[a;r]$ *, então existe* $s > 0$ *tal que* $B[a;r] \cap B[b;s] = \emptyset$.

Exercício 77 *Dê exemplo de um subconjunto limitado* $X \subset \mathbb{R}$ *tal que não existam* $x, y \in X$ *com* $|x-y| = \delta(X)$ ($diam(X)$).

Exercício 78 *Dê exemplo de um espaço métrico onde hajam bolas* $B(a;r)$ *tais que* $\delta(B(a;r) < \delta(B[a;r])$. *Poderá ter um tal exemplo com a condição adicional de ser* $\delta(B[a;r]) < 2r$ *?*

Exercício 79 *a) Seja* M *um espaço métrico limitado. Mostre que, para cada* $a \in M$ *existe uma bola* $B[a;r]$ *cujo diâmetro é menor do que* $2r$.

b) Mostre que todo o espaço métrico é união numerável de subconjuntos limitados.

Exercício 80 *Dê exemplo de subconjuntos não-vazios,* A, B *, de um espaço métrico, tais que* $A \cap B = \emptyset$ *e* $d(A;B) = 0$.

Exercício 81 *Seja* $F = M - B(a;r)$ *o complementar de uma bola aberta no espaço métrico* M. *Mostre que se* $d(x,F) = 0$ *então* $x \in F$.

Exercício 82 ***(S)*** *- Em* $\mathbb{R}^2 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ *com a métrica produto* $d = d\,' \times d_e$ *em que* d' *é a métrica 0-1 e* d_e *é a métrica euclidiana, represente gráficamente:* $S\left((2,0)\,;\frac{1}{2}\right)$; $S\left((4,0)\,;1\right)$

Exercício 83 ***(S)*** *- Sejam* a *um ponto e* C *um subconjunto não-vazio de um espaço métrico* (M,d) *tais que* $d(a,C) = 2$. *Prove que existe uma bola aberta* $B(a;r)$ *tal que* $d(x,C) > 1$ *para todo* $x \in B(a,r)$.

Exercício 84 ***(S)*** *- Seja* (M,d) *um espaço métrico. A* diagonal $\Delta \subset M \times M$ *é o conjunto dos pares* $(x,x) \in M \times M$ *com coordenadas iguais. Prove que se* $z \in M \times M - \Delta$ *então existe uma bola aberta de centro* z *, em* $M \times M$ *, que é disjunta de* Δ.

Exercício 85 ***(S)*** *- Dados um subconjunto* X *de um espaço métrico* M *e um número real* $r > 0$ *, definiu-se a bola aberta, generalizada, de centro* X *e raio* r *como* $B(X;r) = \{x \in M : d(x,X) < r\}$.

a) Mostre que $B(X;r) = \bigcup\limits_{x \in X} B(x;r)$.

b) Prove que para todos os subconjuntos $X, Y \subset M$ *se verifica:*

$$B(X \cup Y;r) = B(X;r) \cup B(Y;r) \ ; \ B(X \cap Y;r) \subset B(X;r) \cap B(Y;r)$$

podendo esta inclusão ser estrita.

Exercício 86 ***(S)*** *- Para todo o subconjunto não-vazio* A *de um espaço métrico* M *, defina-se* $A_* = \{x \in M \ ; d(x,A) = 0\}$. *Prove que* $(A_*)_* = A_*$.

Nota: o exercício seguinte mostra porque é que a métrica num espaço produto dada pelo máximo das métricas nos factores (exercício 12) é especialmente conveniente: as bolas no espaço produto são o produto das bolas.

Exercício 87 ***(S)*** - *Sejam* $(X_i, d_i), i = 1, 2, ..., n$ *espaços métricos e seja* $X = \prod_{i=1}^{n} X_i$ *com a métrica dada, para* $x = (x_1, x_2, ..., x_n), y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in X$, *por*

$$d(x, y) = \max \{d_i(x_i, y_i) : i = 1, 2, ..., n\}$$

a) Mostre que

$$B((a_{1,} ..., a_n); r) = B(a_1; r) \times ... \times B(a_n; r)$$

e analogamente para bolas fechadas.

b) Mostre, com um exemplo, que o resultado análogo não se verifica para esferas.

c) Mostre que no caso de ser $n = 2$, *no espaço métrico produto* $X_1 \times X_2$ *a esfera de centro* (a, b) *e raio* r , $S((a, b); r)$ *é dada por:*

$$S((a, b); r) = (B[a; r] \times S(b; r)) \cup (S(a; r) \times B[a; r])$$

4 Aplicações entre espaços métricos - 2

4.1 Sucessões e continuidade

Exercício 88 *Mostre que se num espaço métrico* X *as únicas sucessões convergentes são as sucessões quase-constantes (constantes a partir de uma certa ordem) então* X *é homeomorfo a um espaço com a métrica 0-1.*

Exercício 89 *Sejam* $(a_n^i), n = 1, 2, ...$, $i = 1, 2, ..., k$ *sucessões num espaço métrico* M, *todas convergentes para o mesmo ponto* $c \in M$. *Seja* (b_n) *uma sucessão de* M *tal que para cada* $n = 1, 2, ...$ *se tem* $b_n \in \{a_n^1, a_n^2, ..., a_n^k\}$. *Mostre que* $\lim_n b_n = c$.

Exercício 90 *Mostre que em* $\mathbb{R}^n$ *toda a bola aberta contém pontos com todas as coordenadas racionais (sugestão: use o teorema que relaciona a convergência da sucessões num espaço produto com a convergência das sucessões coordenadas.)*

Exercício 91 *Mostre que uma aplicação* $f : X \longrightarrow Y$ *é uniformemente contínua* sse *para duas quaisquer sucessões* $x_n, x'_n \in X$, $n = 1, 2, ...$ *se* $\lim_n d(x_n, x'_n) = 0$ *então* $\lim_n d(f(x_n), f(x'_n)) = 0$.

Exercício 92 $\star$***(S)*** - *Seja* $x_n = (x_n^1, x_n^2, ...) \in I^\omega$, $n = 1, 2, ...$ *uma sucessão no cubo de Hilbert. Mostre que* $\lim_n x_n = x_0$ *em* I^ω sse *para cada* $i = 1, 2, ...$ *se tem* $\lim_n x_n^i = x_o^i$ *em* $\mathbb{R}$. *Mostre com um exemplo adequado que a proposição análoga é falsa no espaço de Hilbert* $\mathbb{R}^\omega$.

4.2 Métricas equivalentes

Exercício 93 *Dadas duas métricas* d, d' *num espaço* X , d *diz-se* mais fina *que* d', *e escreve-se* $d \succ d'$, *se a aplicação* $i_X : (X, d) \longrightarrow (X, d')$ *é contínua - portanto as duas métricas são* equivalentes, $d \sim d'$, sse $d \succ d'$ *e* $d \prec d'$. *Sejam* d_1, d_2, d_3 *métricas num espaço* X. *Mostre que se* $d_1 \prec d_2 \prec d_3$ *e* $d_1 \sim d_3$, *então* $d_1 \sim d_2 \sim d_3$.

Exercício 94 *Dados* $x, y \in \mathbb{R}$ *defina* $\delta(x,y) = |x-y|+1$ *se um desses números for positivo e o outro não e* $\delta(x,y) = |x-y|$ *no caso contrário. Verifique que* δ *é uma métrica em* $\mathbb{R}$. *Compare* δ *com a métrica usual. É mais fina, menos fina, equivalente ou não comparável?*

Exercício 95 *Mostre que em* $(0,+\infty)$ *a métrica* $\delta(x,y) = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{y}\right|$ *é equivalente à métrica euclidiana.*

Exercício 96 *Sejam* d_1, d_2 *métricas em* M. *Prove que* $d(x,y) = d_1(x,y) + d_2(x,y)$ *e* $\delta(x,y) = \max\{d_1(x,y), d_2(x,y)\}$ *definem métricas em* M *, ambas mais finas que* d_1 *e* d_2. *Prove ainda que* d_1 *e* d_2 *são equivalentes* sse *as quatro métricas* d_1, d_2, d, δ *são equivalentes entre si.*

Exercício 97 ***(S)*** - *Seja* $\varphi : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ *uma função crescente, tal que* $\varphi(0) = 0$ *e* $\varphi(x+y) \leq \varphi(x) + \varphi(y)$. *Mostre que se* d *é uma métrica em* M *,* $\varphi \circ d$ *também é uma métrica e que, além disso, se* φ *for contínua no ponto* 0, *as métricas* d *e* $\varphi \circ d$ *são equivalentes. Obtenha exemplos de tal* φ *considerando funções deriváveis, com* $\varphi(0) = 0, \frac{d\varphi}{dx} > 0, \frac{d^2\varphi}{dx^2} \leq 0$.

Exercício 98 ***(S)*** - *Sejam* E , F *espaços vectoriais normados e* $f : E \longrightarrow F$ *uma aplicação* linear. *Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes:*

(1) f *é contínua;*
(2) f *é contínua no ponto* $0 \in E$*;*
(3) Existe $c > 0$ *tal que* $\|f(x)\| \leq c \cdot \|x\|$ *para todo* $x \in E$*;*
(4) Existe $c > 0$ *tal que* $\|f(x) - f(y)\| \leq c \cdot \|x - y\|$ *para todos* $x, y \in E$*;*

Exercício 99 ***(S)*** - *a) Mostre que duas normas* $\|\|_1$ *e* $\|\|_2$ *num espaço vectorial* E *são* equivalentes *(isto é, as distâncias correspondentes são equivalentes)* sse *existem constantes* $\alpha, \beta > 0$ *tais que*

$$\alpha \cdot \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq \beta \cdot \|x\|_1 \ , \ \forall x \in E$$

(Sugestão: use o exercício anterior.)

b) Conclua que duas normas quaisquer num espaço vectorial de dimensão finita são equivalentes. (Sugestão: uma norma fica completamente determinada pelos valores que toma nos vectores de uma base.)

Exercício 100 ***(S)*** - *Seja* $f : E \longrightarrow F$ *uma aplicação* linear *entre dois espaços vectoriais normados em que o domínio tem dimensão finita. Prove que a aplicação é contínua.*

Exercício 101 $\star$ ***(S)*** - *Seja* $\mathbb{R}^\infty$ *o espaço vectorial normado definido no exercício 55. Mostre que a aplicação* $f : \mathbb{R}^\infty \longrightarrow \mathbb{R}^\infty$ *definida por*

$$f(x_1, x_2, ..., x_n, ...) = (x_1, x_2/2, ..., x_n/n, ...)$$

é um isomorfismo linear contínuo cuja inversa, dada por

$$f^{-1}(y_1, y_2, ..., y_n, ...) = (y_1, 2y_2, ..., ny_n, ...)$$

é descontínua.

5 Conceitos topológicos

5.1 Noções básicas: abertos, fechados, interiores, aderências...

Exercício 102 *Considere o subconjunto X de $\mathbb{R}$ definido por*

$$X = (-2,-1] \cup \left\{\frac{1}{n}; n \in N\right\} \cup ([2,3] \cap Q) \cup \{4\}$$

Determine $\overline{X}, \overset{\circ}{X}, X', \partial X, \overline{\overset{\circ}{X}}, \overset{\circ}{\overline{X}}, \overset{\circ}{\widehat{\partial X}}$.

Exercício 103 *Mostre que se (X,d) é um espaço métrico, para todo $A \subset X$ temos $\overline{A} = \{x \in X : d(x,A) = 0\}$*

Exercício 104 *Dê exemplo de um espaço métrico X e de dois subespaços* homeomorfos *$A, B \subset X$ um dos quais é aberto e o outro não.*

Exercício 105 *Mostre que a fronteira de um conjunto aberto, $A \subset M$, tem interior vazio. Mostre que, reciprocamente todo o subconjunto fechado, $X \subset M$, com interior vazio é fronteira de algum aberto de M.*

Exercício 106 *Mostre que não é verdade que $X \subset Y \Rightarrow \partial X \subset \partial Y$. Prove que se verifica sempre $\partial(\overset{\circ}{S}) \subset \partial S$ podendo a inclusão ser estrita.*

Exercício 107 *Dados subconjuntos arbitrários de um espaço métrico, $A, B \subset M$, relacione $\overset{\circ}{\widehat{A \cup B}}$ com $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ (o interior da união com a união dos interiores). Resolva o problema análogo para as intersecções.*

Exercício 108 *Dados X, Y num espaço métrico M , mostre que $\overline{X \cup Y} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ e que $\overline{X \cap Y} \subset \overline{X} \cap \overline{Y}$. Dê exemplos em que esta inclusão seja estrita.*

Exercício 109 *Prove que o* derivado *(conjunto dos pontos de acumulação) de qualquer subconjunto, é um conjunto fechado.*

Exercício 110 *Seja M um espaço métrico e $x \in M$. Um subconjunto $V \subset M$ diz-se uma* vizinhança de x *se $x \in \overset{\circ}{V}$.*

a) Mostre que todo o conjunto que contém uma vizinhança de x é ainda uma vizinhança de x.

b) Mostre que a intersecção de um número finito (ou a união de uma família qualquer) de vizinhanças de x é ainda uma vizinhança de x.

Exercício 111 *Mostre que todo o subconjunto aberto e não-vazio $A \subset R^m$ contém um ponto $x = (x_1, x_2, ...x_m)$ cujas coordenadas, x_i, são racionais.*

Exercício 112 *Verifique a seguinte afirmação: se $A \subset M$ é aberto e $X \subset M$ é* denso, *então $X \cap A$ é denso em A. O que pode afirmar se retirar a condição de A ser aberto?*

Exercício 113 ***(S)*** - *Seja $M = X \cup Y$. Mostre que se um subconjunto $S \subset M$ é aberto em $S \cup X$ e em $S \cup Y$ então é aberto em M. Conclua que se $S \subset M - X$ é aberto em $M - X$ e em $S \cup X$ então S é aberto em M. Enuncie e demonstre resultados análogos com "fechado" em lugar de "aberto".*

Exercício 114 ***(S)*** - *Dados $A \subset M$ e $B \subset N$, mostre que no espaço produto, $M \times N$, se tem $\overset{\circ}{\widehat{A \times B}} = \overset{\circ}{A} \times \overset{\circ}{B}$ e $\partial(A \times B) = (\partial A \times B) \cup (A \times \partial B)$.*

Dados $X \subset M$ e $Y \subset N$ mostre ainda que $\overline{X \times Y} = \overline{X} \times \overline{Y}$ em $M \times N$.

Exercício 115 ***(S)*** - *Mostre que num espaço métrico X se tem $\delta(A) = \delta(\overline{A})$ para todo o subconjunto A.*

Exercício 116 ***(S)*** - *Mostre que para todo $A \subset X$, a bola aberta generalizada $B(A; r)$ éuma união de bolas abertas $B(a; r)$ com $a \in A$ - sendo portanto um aberto.*

Exercício 117 ***(S)*** - *Seja $\mathcal{C}$ o conjunto das funções contínuas $f : [a, b] \longrightarrow [a, b]$ com a métrica do* sup *(ver exercício 7)*

a) Mostre que o subconjunto de $\mathcal{C}$ formado pelas funções que não são sobrejectivas é aberto.

b) Mostre que o subconjunto de $\mathcal{C}$ formado pelos homeomorfismos tem interior vazio em $\mathcal{C}$.

5.2 Continuidade de funções

Exercício 118 *Dê exemplo de uma aplicação contínua $f : X \longrightarrow Y$ e de um subconjunto aberto (repectivamente fechado) $A \subset X$ tal que $f(A)$ não seja aberto (respectivamente fechado) em Y.*

Exercício 119 *Mostre com um exemplo adequado de um subconjunto fechado $A \subset \mathbb{R}^2$ que as projecções de um espaço métrico produto nos seus factores não são necessariamente aplicações fechadas.*

Exercício 120 *Seja $f : M \longrightarrow N$ contínua. Dados um subconjunto arbitrário $X \subset M$ e um aberto $V \subset N$, com $f(X) \subset V$, mostre que existe um aberto U, de M , tal que $X \subset U$ e $f(U) \subset V$.*

Exercício 121 *Prove que para uma função $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ ser contínua, é necessário e suficiente que, para todo $a \in \mathbb{R}$, sejam abertos em M os conjuntos $X_a = \{x \in M; f(x) < a\}$ e $Y_a = \{x \in M; f(x) > a\}$.*

Exercício 122 *Seja $\xi_X : M \longrightarrow \mathbb{R}$ a* função característica *do subconjunto $X \subset M$ (definida por $\xi_X(x) = 1$ se $x \in X$ e $\xi_X(x) = 0$ se $x \notin X$.) Mostre que o conjunto dos pontos de descontinuidade de ξ_X é a fronteira de X em M.*

Exercício 123 *Mostre que se $f, g : X \longrightarrow Y$ são contínuas e existe um subconjunto* denso *$A \subset X$ tal que $f\,|_A = g\,|_A$ então $f = g$ em X.*

Exercício 124 ***(S)*** - *Seja $(X_\lambda)_{\lambda \in L}$ uma família de subconjuntos de M tais que $\bigcup\limits_{\lambda \in L} \overset{\circ}{X_\lambda} = M$. Mostre que se $f : M \longrightarrow N$ é tal que $f\,|_{X_\lambda}$ é contínua para todo $\lambda \in L$, então f é contínua.*

Exercício 125 ***(S)*** - *Seja* $(F_i)_{i=1,2,...n}$ *uma família finita de fechados de* M *tais que* $\bigcup_{i=1}^{n} F_i = M$. *Mostre que se* $f : M \longrightarrow N$ *é tal que* $f\,|_{F_i}$ *é contínua para todo* $i = 1, 2, ..., n$, *então* f *é contínua.Mostre ainda com um exemplo adequado que o resultado anterior não se pode estender ao caso de uma família infinita.*

Exercício 126 ***(S)*** - *Seja* $\varphi : M \longrightarrow N$ *contínua, sobrejectiva e aberta. Mostre que uma aplicação* $f : N \longrightarrow P$ *é contínua* sse *a composta* $f \circ \varphi : M \longrightarrow P$ *é contínua.*

Exercício 127 ***(S)*** - *Mostre que uma aplicação* $f : M \longrightarrow N$ *é contínua* sse *, para todo* $Y \subset N$, *se tem que* $f^{-1}\left(\overset{\circ}{Y}\right) \subset \overset{\circ}{\widehat{f^{-1}(Y)}}$.

Exercício 128 ***(S)*** - *Mostre que uma aplicação* $f : M \longrightarrow N$ *é contínua* sse *para todo* $X \subset M$ *se tem* $f(\overline{X}) \subset \overline{f(X)}$.

Exercício 129 ***(S)*** - *Prove que* $f : M \longrightarrow N$ *é uma aplicação* fechada sse *para todo* $y \in N$ *e todo o aberto* $V \supset f^{-1}(y)$ *de* M *, existe um aberto* $U \subset N$ *tal que* $V \supset f^{-1}(U) \supset f^{-1}(y)$.

Exercício 130 ***(S)*** - *Verifique a seguinte afirmação: se* X *é denso em* M *e* $f : M \longrightarrow N$ *é uma aplicação contínua e sobrejectiva, então* $f(X)$ *é denso em* N.

Exercício 131 ***(S)*** - *Uma função real* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *diz-se* semicontínua inferiormente *no ponto* $a \in M$ *se*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0 : d(x, a) < \delta \Rightarrow f(a) - \varepsilon < f(x)$$

a) Dê a definição análoga para semicontinuidade superior.

b) Prove que se f *e* g *são semicontínuas inferiormente no ponto* $a \in M$, *também o são* $f + g$ *e* $c.f$ *se for* $c > 0$ *(se* $c < 0$ *,* $c.f$ *será semicontínua superiormente.)*

c) Prove que $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *é semicontínua inferiormente (em todos os pontos)* sse, *para todo* $b \in \mathbb{R}$, *o conjunto* $f^{-1}((b, +\infty))$ *é aberto em* M. *Conclua que um subconjunto* $A \subset M$ *é aberto* sse *a sua função característica* $\xi_A : M \longrightarrow \mathbb{R}$ *é semicontínua inferiormente.*

d) Enuncie e prove resultados análogos aos das alíneas anteriores para o caso da semicontinuidade superior.

Exercício 132 $\star$ ***(S)*** - *Seja* $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ *semicontínua inferiormente. Prove que* f *é limitada inferiormente (minorada) e tem mínimo, isto é, existe* $x_0 \in [a, b]$ *tal que* $f(x_0) \leq f(x)$ *para todo* $x \in [a, b]$. *Prove o resultado análogo para semicontinuidade superior.(Note que estes resultados generalizam o Teorema de Weierstrass-exercício 37.)*

Exercício 133 ***(S)*** - *Dada uma função* $f : M \longrightarrow \mathbb{R}$, *seja* $C(f) = \{(x, y) \in M \times \mathbb{R}\,; y \geq f(x)\}$. *Prove que* f *é semicontínua inferiormente* sse $C(f)$ *é um subconjunto fechado de* $M \times \mathbb{R}$.

6 Espaços conexos

Exercício 134 *Mostre que se* $X = \bigcup_{t\in T} X_t$ *em que para cada* $t \in T$ *o subespaço* X_t *é conexo e existe* $t_0 \in T$ *tal que* $X_{t_0} \cap X_t \neq \emptyset$, $\forall t \in T$*, então o espaço* X *é conexo.*

Exercício 135 *Sejam* $X_1, X_2, ..., X_n, ...$ *subconjuntos conexos do espaço métrico* M*, tais que* $X_n \cap X_{n+1} \neq \emptyset$ *para todo* n*. Mostre que* $X = \cup X_n$ *é conexo.*

Exercício 136 *Sejam* $X, Y \subset M$ *conexos. Mostre que se* $\partial X \subset Y$ *então* $X \cup Y$ *é conexo.*

Exercício 137 *Sejam* X , C *subconjuntos de um espaço métrico* M*. Mostre que se* C *intersecta* X *e intersecta também* $M - X$*, então* $C \cap \partial X \neq \emptyset$*.*

Exercício 138 ***(S)*** *- Sejam* $X \subset M$ *conexos. Mostre que se* $A \subset M - X$ *é aberto e fechado em* $M - X$ *então* $X \cup A$ *é conexo.*

Exercício 139 *Indique, justificando, as* componentes conexas *dos seguintes subespaços de* $\mathbb{R}^2$*:*

a) $\mathbb{Q} \times \mathbb{R}$ *; b)* $\{0\} \times \mathbb{Q} \cup \left\{ \left(\frac{1}{n}, x\right) : x \in \mathbb{R} \ , \ n \in \mathbb{N} \right\}$.

Exercício 140 *Mostre que se* $A \subset \mathbb{R}^2$ *é aberto então cada componente conexa de* A *é aberta.*

Exercício 141 *Mostre, usando argumentos de conexão que os seguintes espaços são dois a dois não homeomorfos:*

a) $[a, b)$, $[c, d]$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$*.*

b) Os subespaços de $\mathbb{R}^2$ *formados pelos segmentos de recta que formam as letras X, Y, A, .*

Exercício 142 ***(S)*** *- Recorde que se um espaço métrico é finito as componentes conexas são os pontos; recorde também que as componentes conexas de* $\mathbb{Q}$ *são os pontos. Generalize estes exemplos mostrando que se um espaço métrico,* X*, é* numerável *então é* totalmente desconexo*, isto é, as componentes conexas são os pontos (sugestão: fixe-se* $a \in X$ *e considere-se a função* $d_a : X \longrightarrow \mathbb{R}$ *que a cada* $x \in X$ *associa a sua distância a a.)*

Exercício 143 ***(S)*** *- Mostre que se* $X \subset M$ *são conexos então, para cada componente conexa* C *de* $M - X$ *temos que* $M - C$ *é conexo.*

Exercício 144 *Sejam* $X \subset \mathbb{R}$ *e* $Y \subset \mathbb{R}^2$*. mostre que se* X *e* Y *são homeomorfos então* $\overset{\circ}{Y} = \emptyset$*.*

Nota: o resultado do exercício anterior pode ser generalizado a $X \subset \mathbb{R}^n$, $Y \subset \mathbb{R}^{n+k}$(em particular para $m > n$, $\mathbb{R}^n \not\cong \mathbb{R}^m$.) É o que estabelece a chamada *invariância (topológica) da dimensão* (mas a prova não é trivial) - foi primeiro estabelecida em 1910 pelo grande topólogo L.E.J. Brower.

Exercício 145 *Seja* $f : S^1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua. Mostre que existe um* $x \in S^1 : f(x) = f(-x)$*.*

Nota: o resultado do exercício anterior pode ser generalizado a dimensão n: toda a função $f : S^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ contínua envia um par de pontos antípodas no mesmo ponto. Este resultado é por vezes popularizado dizendo que, com a variação contínua da pressão e da temperatura à superfície terrestre, há sempre dois pontos antípodas à mesma pressão e temperatura.

Exercício 146 ***(S)*** - *Seja $\varepsilon > 0$. Uma $\varepsilon-$cadeia num espaço métrico X é uma sequência finita de pontos $x_1, x_2, ..., x_n$ tais que $d(x_i, x_{i+1}) < \varepsilon$, $i = 1, 2, ..., n$; os pontos x_1, x_n dizem-se $\varepsilon -$ encadeados. Mostre que dados $\varepsilon > 0$, $a \in X$, o conjunto dos pontos de X que são $\varepsilon -$ encadeados com a é um aberto e fechado de X (logo se X é conexo dois quaisquer pontos são $\varepsilon -$ encadeados para todo $\varepsilon > 0$; dê exemplo de um espaço desconexo em que esta propriedade se verifique.)*

Exercício 147 ***(S)*** - *Seja $f : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ contínua e tal que $f(0) = f(1)$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, prove que existe $x \in [0, 1]$ tal que $x+1/n \in [0, 1]$ e $f(x+1/n) = f(x)$.*

Exercício 148 $\star$ ***(S)*** - *Seja A um aberto e conexo de $\mathbb{R}^n$. Mostre que dados dois pontos $a, b \in A$, existe um homeomorfismo $h : A \longrightarrow A$ tal que $h(a) = b$ (A é* topologicamente homogéneo - *ver exercício 64)*

Exercício 149 ***(S)*** - *Mostre que o espaço de Hilbert $\mathbb{R}^\omega$ e o cubo de Hilbert I^ω são conexos.*

Exercício 150 ***(S)*** - *Recorde que a imagem por uma aplicação contínua de um subespaço conexo é um subespaço conexo. Dê exemplo de uma função $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que envie subespaços conexos em subespaços conexos mas não seja contínua*

6.1 Conexos por caminhos

Exercício 151 *Um espaço métrico X diz-se* conexo por caminhos *se para dois quaisquer pontos $a, b \in X$ existe uma aplicação contínua $\gamma : I \longrightarrow X$ tal que $\gamma(0) = a$, $\gamma(1) = b$ (dita um* caminho *entre a e b)*

Mostre que se X é conexo por caminhos então X é conexo.

Exercício 152 *Seja $f : X \longrightarrow Y$ contínua. Mostre que se X é conexo por caminhos então $f(X)$ é conexo por caminhos.*

Exercício 153 *Mostre que se $X \subset \mathbb{R}^n$ é aberto e conexo então X é conexo por caminhos.*

Exercício 154 $\star$ ***(S)*** - *Seja a $A \subset \mathbb{R}^2$ o subespaço formado pelos (infinitos) segmentos de recta l_n em que para cada $n = 1, 2, ...$ l_n tem extremidades $(1/n\ ,\ (-1)^n)$, $(1/n + 1\ ,\ (-1)^{n+1})$. Recorde que $\overline{A}$ é conexo; mostre que $\overline{A}$ não é conexo por caminhos.*

Exercício 155 ***(S)*** - *Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ aberto e conexo. Mostre que dois quaisquer pontos de A podem ser ligados por uma linha poligonal contida em A, cujos lados são paralelos aos eixos.*

7 Espaços compactos

Exercício 156 *Sejam A , B subconjuntos disjuntos não-vazios do espaço compacto M. Mostre que se $d(A,B) = 0$, então $\partial A \cap \partial B \neq \emptyset$.*

Exercício 157 *Sejam $K \subset V \subset X$ com K compacto e V aberto em X. Mostre que existe $r > 0$ tal que $\bigcup_{x \in K} B(x,r) \subset V$.*

Exercício 158 *Um espaço métrico X diz-se totalmente limitado se para todo $\varepsilon > 0$ existem $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ tais que $X = \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon)$.*

a)Mostre que todo o subespaço de um espaço totalmente limitado é totalmente limitado.

b)Dê exemplos de espaços limitados que não sejam totalmente limitados.

Exercício 159 *a) Mostre que se X é totalmente limitado toda a aplicação uniformemente contínua $f : X \longrightarrow Y$ é limitada.*

b) Mostre que se $X \subset \mathbb{R}^n$ é limitado e $f : X \longrightarrow Y$ é uniformemente contínua então f é limitada.

Exercício 160 *a) Sejam K, F subconjuntos disjuntos do espaço métrico X com K compacto e F fechado. Mostre que $d(K,F) > 0$.*

b) Dê exemplo de um espaço métrico e de dois subespaços fechados e disjuntos cuja distância seja zero.

Exercício 161 ***(S)*** *- Mostre que um espaço métrico X é compacto* sse *toda a função real contínua e positiva definida em M tem um mínimo positivo.*

Exercício 162 ***(S)*** *- Seja (M,d) um espaço métrico tal que para toda a métrica d' equivalente a d , (M,d') é limitado. Mostre que, então, M é compacto (Sugestão: considere a métrica $d_f(x,y) = d(x,y) + |f(x) - f(y)|$ em que f é contínua e não limitada)*

Exercício 163 *Recorde (* Teorema de Borel-Lebesgue*) que se X é compacto então toda a cobertura aberta de X tem uma subcobertura finita. Prove o recíproco, mostrando que se X não é compacto existe uma cobertura aberta de X sem subcobertura finita (Sugestão: comece por mostrar que se x_n , $n = 1, 2, ...$ é uma sucessão sem subsucessão convergente, então $\{x_n\}_{n=1,2,...}$ é um subespaço fechado e todos os seus pontos são isolados no subespaço)*

Exercício 164 ***(S)*** *- Mostre que um espaço métrico M é compacto* sse *toda a sua cobertura aberta admite uma subcobertura própria (isto é, diferente da cobertura dada)*

Exercício 165 ***(S)*** *- Mostre que o cubo de Hilbert I^{ω} é compacto.*

Exercício 166 ***(S)*** *- Mostre que a bola fechada $B[0,1]$ no espaço de Hilbert $\mathbb{R}^{\omega}$, em que $0 = (0,0,...)$, não é compacta. Dê exemplo de uma função real contínua definida em $\mathbb{R}^{\omega}$ que não seja limitada em $B[0,1]$.*

7.1 Compactos e conexos

Exercício 167 ***(S)*** - *Um espaço métrico é um* continuum *se é compacto e conexo. Sejam X_n , $n = 1, 2, ...$ subespaços do espaço métrico X com $X_{n+1} \subset X_n$ e em que cada X_n é um continuum. Mostre que a intersecção $\bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ é um continuum.*

Exercício 168 ***(S)*** - *Sejam $a = (1, 0)$, $b = (-1, 0) \in \mathbb{R}^2$ e seja $S = \overline{ab}$ o segmento de extremidades a e b. Seja $C_n = B\left[S, \frac{1}{n}\right] - (S - \{a, b\}$ em que $B\left[S, \frac{1}{n}\right] = \left\{x \in \mathbb{R}^2 : d(x, S \leq \frac{1}{n}\right\}$. Mostre que cada C_n é conexo e determine $\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n$.*

Exercício 169 ***(S)*** - *Mostre que um espaço métrico compacto é conexo* sse *dois quaisquer dos seus pontos são $\varepsilon -$encadeados (ver exercício 146) para todo $\varepsilon > 0$.*

Exercício 170 ***(S)*** - *Mostre que num espaço métrico compacto a componente conexa de cada ponto é o conjunto dos pontos que lhe são $\varepsilon -$ encadeados para todo $\varepsilon > 0$.*

Exercício 171 $\star$ ***(S)*** - *Seja X um espaço métrico compacto. Mostre que dois pontos $a, b \in X$ pertencem a componentes conexas distintas de X sse existe uma cisão $X = A \cup B$ com $a \in A$ e $b \in B$. Conclua que num espaço métrico compacto a componente conexa de um ponto é a intersecção de todos os abertos-fechados que contêm esse ponto.*

Nota: a intersecção dos abertos-fechados que contêm um ponto diz-se a *quase-componente* desse ponto; é claro que as quase-componentes formam uma partição do espaço por fechados. O que o exercício anterior mostra é que num espaço compacto as componentes e as quase-componentes coincidem. O exercício seguinte mostra que em geral não se dá essa coincidência.

Exercício 172 ***(S)*** - *Para cada $n = 2, 3, ...$ seja*

$$Q_n = \partial \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : -1 + \frac{1}{n} \leq x \leq 1 - \frac{1}{n} \ \wedge \ -n \leq y \leq n \right\}$$

e seja

$$Q_1 = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \pm 1 \right\}$$

Seja $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$. Determine as componentes e as quase componentes de X.

7.2 Contrações e expansões num espaço compacto

Exercício 173 ***(S)*** - *Seja X compacto e $f : X \longrightarrow X$ tal que $d(f(x), f(y)) < d(x, y)$ para todos $x \neq y \in X$. Mostre que f tem um único* ponto fixo *$a \in X$ o qual é atractor, isto é, para todo $x \in X$, $\lim_{n \to \infty} f^n(x) = a$.*

Exercício 174 ***(S)*** - *Seja X um espaço métrico compacto e $f : X \longrightarrow X$ uma* aplicação expansiva*, isto é, $d(x, y) \leq d(f(x), f(y))$ para todos $x, y \in X$. Mostre que f é um homeomorfismo (em particular toda a imersão isométrica de um espaço compacto nele próprio é uma isometria - cf. exercício 47)(Sugestão: para mostrar que f é sobrejectiva, suponha que $x \notin f(X)$; fazendo $x_n = f^n(x)$, $n = 1, 2, ...$ seria $d(x_n, x_m) \geq d(x, f(x))$, $\forall n, m \in \mathbb{N}$)*

Exercício 175 $\star$ ***(S)*** - *Seja X um espaço métrico compacto e $f : X \longrightarrow X$ uma* aplicação expansiva. *Prove que para todo $x \in X$ existem inteiros positivos $n_1 < n_2 < ... < n_k < ...$ tais que $\lim_{k\to\infty} f^{n_k}(x) = x$.*

Exercício 176 ***(S)*** - *Seja X um espaço métrico compacto e $f : X \longrightarrow X$ uma* aplicação expansiva. *Prove que $d(f(x), f(y)) = d(x, y)$ para todos $x, y \in X$, isto é, f é uma* isometria *(Sugestão: supondo que existem $x, y \in X$ tais que $d(f(x), f(y)) > d(x, y)$, usando o exercício anterior,existem $m_1 < m_2 < ... < m_k < ...$ tais que $\lim_{k\to\infty} f^{m_k}(x) = x$ e $\lim_{k\to\infty} f^{m_k}(y) = y$. Como $d(x, y) < d(f^{m_k}(x), f^{m_k}(y))$ teremos uma contradição...)*

Exercício 177 $\star$ ***(S)*** - *Seja X um espaço métrico compacto e conexo. Mostre que dado um homeomorfismo $h : X \longrightarrow X$, existe um par de pontos $a \neq b \in X$ tais que $d(h(a), h(b)) = d(a, b)$.*

8 Espaços completos

Exercício 178 *Mostre que uma sucessão é de Cauchy* sse $\forall\varepsilon > 0$ *existe um índice k tal que $d(x_k\ ,\ x_{k+m}) < \varepsilon$ para todo $m = 1, 2, ...$*

Exercício 179 *Verifique se $\mathbb{R}$ com a métrica $d(x, y) = \min\{1, |x - y|\}$ é ou não completo.*

Exercício 180 *Recorde que se um espaço métrico tem a propriedade que todo o subconjunto limitado está contido num subespaço compacto então ele é completo. Dê um exemplo que mostre que a implicação recíproca não se verifica.*

Exercício 181 *Mostre que se num espaço métrico X , toda a sucessão encaixada $F_1 \supset F_2 \supset ...$ de fechados com $\lim_n \delta(F_n) = 0$ tem intersecção não vazia, então X é completo.*

Exercício 182 *Mostre que num espaço métrico a união de dois conjuntos ambos com interior vazio e um deles fechado tem interior vazio; dê um exemplo que mostre que se nenhum dos conjuntos for fechado, a união pode ter interior não vazio.*

Exercício 183 *Mostre que num espaço produto $X = \prod_{i=1}^{m}(X_i, d_i)$, uma sucessão $x_n = (x_n^1, x_n^2, ..., x_n^m)\,, n = 1, 2, ...$ é de Cauchy* sse *para todo $i = 1, 2, ..., m$ a sucessão (x_n^i) é de Cauchy em (X_i, d_i).*

Exercício 184 *Mostre que um espaço produto $X = \prod_{i=1}^{m}(X_i, d_i)$ é completo* sse *cada (X_i, d_i) é completo.*

Exercício 185 ***(S)*** - *Recorde que se X é um espaço métrico compacto então X é completo e totalmente limitado. Mostre que o recíproco é verdadeiro.*

Exercício 186 ***(S)*** - *Seja $A \subset X$ um subconjunto* denso *e $f : A \longrightarrow Y$ uma função uniformemente contínua em que Y é um espaço métrico completo.*

a) Mostre que existe uma extensão de f a uma função contínua $f^* : X \longrightarrow Y$.

b) Mostre que a função f^* é também uniformemente contínua.

c) Mostre, com um exemplo, que em a) não se pode retirar a condição de ser Y completo.

Exercício 187 *Um subconjunto de um espaço métrico, $A \subset X$, diz-se um G_δ se é intersecção numerável de abertos de X.*

a) Mostre que todo o fechado de X é um G_δ.

b) Mostre, usando o teorema de Baire, que $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ não é um G_δ.

Exercício 188 ***(S)*** *- Seja $f : X \longrightarrow Y$ uma função entre espaços métricos e, para cada $n = 1, 2, ...$ seja $A_n \subset X$ definido por: $x \in A_n$ se existe uma vizinhança aberta U de x tal que $\delta(f(U)) < \frac{1}{n}$.*

a) Mostre que os A_n são abertos.

b) Mostre que o conjunto $C_f = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ é o conjunto dos pontos de continuidade da função f.

c) Conclua que não existe nenhuma função $\dot{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que seja contínua apenas nos racionais ($C_f = \mathbb{Q}$)

Exercício 189 ***(S)*** *- Seja $\dot{f} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por: $f(x) = 0$ se $x \in R - Q$, $f(0) = 1$, e $f(x) = \frac{1}{q}$ se $x = \frac{p}{q} \in Q$ com $q > 0$ e a fracção irredutível (função de Dirichlet). Mostre que o conjunto dos pontos de continuidade de f é o conjunto dos irracionais.*

Exercício 190 ***(S)*** *- Mostre que o espaço de Hilbert $\mathbb{R}^\omega$ é completo.*