

Tópicos de Geometria

2003/2004

Eduardo Francisco Rêgo
FCUP - Departamento de Matemática Pura

Resumo

O tópico central do programa é constituído por **Grupos de Isometrias** e **Grupos de Simetria** no plano e no espaço: uma consulta à lista de conteúdos, em baixo, dará uma ideia dos temas a abordar e da estrutura a seguir.

Como os títulos indicam, este é um tema onde o encontro e fusão de *álgebra* e *geometria* é especialmente forte. As isometrias no plano podem ser tratadas de forma especialmente elegante com a identificação de \mathbb{R}^2 e \mathbb{C} , recorrendo à estrutura dos números complexos; optámos por não o fazer pois há alguns argumentos e construções mais directas que, embora sejam menos elegantes, têm a vantagem de se adaptar facilmente ao espaço tridimensional, onde as vantagens do uso de uma estrutura algébrica auxiliar aparecem de forma mais indirecta e restrita (mas não menos importante), através da relação rotações-quatérniões.

Os exercícios, definições, teoremas, etc., aparecem numerados de forma sequencial; optámos por manter este formato pois a maior parte dos "*Exercícios*" não são mais do que provas e complementos aos resultados e teoremas enunciados: neste sentido, são exercícios de recolha, estudo e compreensão, por consulta dos livros indicados nas referências. Estas notas irão sendo completadas pela "publicação" paralela de resoluções desses exercícios, que se espera sejam feitas e escritas maioritariamente pelos alunos como parte de avaliação contínua. Exercícios do tipo usual - que servem para testar e aprofundar os conhecimentos da parte teórica - aparecem agrupados em secções próprias; a referência a qualquer deles deve ser feita indicando o número da secção a que pertence seguido do seu número dentro da secção (assim, o exercício que pede para investigar porque é que o arco-íris é um arco e se é um arco de círculo, é o exercício 3.1 - 11)

Conteúdo

1	Isometrias e simetrias - generalidades	3
1.1	Subespaços afim e hiperplanos	6
1.2	Reflexões em hiperplanos	7
2	Isometrias de \mathbb{R}^2	8
2.1	Exercícios de revisão e aplicação...	10

3	Similitudes de \mathbb{R}^2	12
3.1	Exercícios de revisão e aplicação...	18
4	Transformações afim de \mathbb{R}^2	19
4.1	Exercícios de revisão e aplicação...	22
4.2	Colineações	24
5	Grupos de simetria - introdução	24
5.1	Polígonos regulares	25
5.2	Grupos finitos de isometrias do plano	27
5.2.1	Exercícios de revisão e aplicação...	27
5.3	Acções de grupos - noções gerais	28
6	Isometrias de \mathbb{R}^3	29
6.1	Similitudes de \mathbb{R}^3	31
6.2	Exercícios de revisão e aplicação...	32
7	Quaterniões e rotações	33
7.1	Conjugados e inversos:	36
7.2	Quaterniões unitários:	37
7.3	Acção de grupo de S^3 em \mathbb{R}^3	38
7.4	Exercícios de revisão e aplicação...	40
8	Grupos de simetria finitos de \mathbb{R}^3	40
8.1	Prismas e anti-prismas	41
8.2	Os sólidos Platónicos	43
8.2.1	A Fórmula de Euler:	45
8.2.2	Dualidade e inclusão	47
8.3	Os grupos de simetria dos sólidos platónicos	52
8.4	Os sólidos Arquimedianos	56
8.5	Grupos finitos de rotações de \mathbb{R}^3	58
8.6	Subgrupos finitos de $I(\mathbb{R}^3)$	63
8.7	Exercícios de revisão e aplicação...	66
9	Grupos Cristalográficos	68
9.1	A classificação dos grupos cristalográficos	70

1 Isometrias e simetrias - generalidades

O nosso tema central são as isometrias e simetrias em espaços euclidianos, em especial no plano e no espaço (tridimensional). Recordemos as definições mais gerais, envolvidas.

Definição 1 Uma isometria do espaço métrico (X, d) é uma função $f : X \rightarrow X$ que é sobrejectiva e que é uma imersão isométrica, isto é, preserva as distâncias: $\forall x, y \in X, d(f(x), f(y)) = d(x, y)$.

Exercício 2 Recorde a definição de espaço métrico. Mostre que uma função que preserva a distância, como na definição anterior (uma imersão isométrica) é sempre injectiva mas pode não ser sobrejectiva.

Definição 3 Consideramos em \mathbb{R}^n a métrica euclidiana dada, para $x = (x_1, \dots, x_n), y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, por $d(x, y) = \|x - y\|$, em que $\|\cdot\|$ é a norma euclidiana: $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n x_i^2$, em que $\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$ é o produto escalar usual.

Exercício 4 Recorde e escreva uma prova de que a métrica acabada de definir em \mathbb{R}^n , $d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2}$, é de facto uma métrica; recorde também, a propósito, a desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \|y\|$; recorde ainda a regra do paralelogramo: $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

Dado um espaço métrico, M , as suas isometrias, $Isom(M)$ (ou simplesmente $I(M)$) formam um grupo para a composição de funções, que é um subgrupo do grupo de todas as bijecções, $Bij(M)$.

Temos a seguinte cadeia de subgrupos:

$$Isom(M) \leq Sim(M) \leq Homeo(M) \leq Bij(M)$$

em que $Sim(M)$ e $Homeo(M)$ são os grupos das *similitudes* e dos *homeomorfismos*, respectivamente.

Exercício 5 Recorde as definições de similitude e homeomorfismo.

Dois tipos particulares de isometrias são as *translações* e as *aplicações ortogonais*.

Definição 6 A translação pelo vector a é definida por $T_a(x) = x + a$; em particular a identidade é translação pelo vector nulo, $id = \mathbf{1} = T_0$; é claro que a inversa é a translação pelo vector $-a$, $T_a^{-1} = T_{-a}$, e que $T_a T_b = T_{a+b}$.

Notação 7 Indicaremos frequentemente apenas por justaposição a composição de funções, $fg = f \circ g$, e também, desde que o contexto não permita confusões, as imagens de elementos, $f(x) = fx$.

As translações formam, portanto, um subgrupo abeliano de $I(\mathbb{R}^n)$.

O grupo linear geral (real), $GL(n, \mathbb{R})$, consiste das matrizes reais $n \times n$, não-singulares; identifica-se naturalmente ao espaço dos isomorfismos lineares $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$: $A \in GL(n, \mathbb{R})$ representa a aplicação linear que, relativamente à base canónica (ou outra qualquer base ortonormada), tem matriz A . O determinante define um homomorfismo de grupos: $\det : GL(n, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \setminus \{0\}$. O núcleo é o grupo linear especial, $SL(n, \mathbb{R})$, das matrizes com determinante 1.

Definição 8 Uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita ortogonal se $\langle Lx, Ly \rangle = \langle x, y \rangle$ para todos $x, y \in \mathbb{R}^n$, isto é, se preserva o produto escalar.

Exercício 9 Seja $A \in GL(n, \mathbb{R})$ e $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação linear correspondente. Mostre que L é ortogonal se e só se $A^{-1} = A^t$, isto é, a inversa de A é a sua transposta (diz-se, correspondentemente, que A é uma matriz ortogonal)

Temos o grupo ortogonal: $O(n) = \{A \in GL(n, \mathbb{R}) : AA^t = I\}$. Note-se que para $A \in O(n)$ temos $\det A = \pm 1$:

$$1 = \det I = \det(AA^t) = (\det A)(\det A^t) = (\det A)^2$$

O grupo $O(n)$ tem um subgrupo normal (de índice 2), o grupo ortogonal especial, $SO(n) = O(n) \cap SL(n, \mathbb{R})$, das matrizes ortogonais com determinante 1. É claro que $O(1) = \{\pm 1\}$ e $SO(1) = \{+1\}$. O grupo $O(2)$ consiste das matrizes $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ para as quais existe um θ tal que

$$\begin{bmatrix} a \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{bmatrix} e \begin{bmatrix} b \\ d \end{bmatrix} = \pm \begin{bmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{bmatrix}$$

Exercício 10 Verifique a afirmação anterior.

$SO(2)$ consiste então das matrizes $\begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$. Uma matriz destas representa uma rotação, de ângulo θ , em torno da origem. Como $SO(2)$ tem índice 2, os outros elementos de $O(2)$ são os da classe $SO(2) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ que consiste das matrizes $\begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & -\cos \theta \end{bmatrix}$. Cada uma destas representa uma reflexão R_l na recta l que faz ângulo de $\theta/2$ com o eixo dos xx . Ficamos, por agora, com o significado intuitivo deste outro tipo de isometria, as reflexões; mais à frente daremos a definição geral de reflexões em hiperplanos de \mathbb{R}^n .

O conjunto de exercícios que se seguem conduz a uma caracterização básica das isometrias de \mathbb{R}^n .

Exercício 11 Seja uma $L : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ aplicação linear. Mostre que as seguintes afirmações são equivalentes: i) L é uma imersão isométrica; ii) L é uma isometria; iii) $\|Lx\| = \|x\|$, $\forall x \in \mathbb{R}^n$; iv) $\langle Lx, Ly \rangle = \langle x, y \rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ (isto é, L é uma aplicação ortogonal).

O que pode afirmar se considerar, mais geralmente, aplicações lineares $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$?

Exercício 12 Seja $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão isométrica. (Não supomos que é linear!). Mostre que existem $a \in \mathbb{R}^n$ e uma aplicação linear $L : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tais que $f(x) = Lx + a$, $\forall x \in \mathbb{R}^m$. Em particular, se $f(0) = 0$, então f é linear (!); se $m = n$ então f é uma isometria e é a composta de uma aplicação ortogonal seguida de uma translação.

Sugestão: Comece por supor que $f(0) = 0$; a) mostre que, sendo $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ a base canónica, e $b_i = f(a_i)$, $i = 1, \dots, m$, $\{b_i\}_{i=1, \dots, m}$ é um conjunto ortonormado: $\langle b_i, b_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{se } i = j \\ 0, & \text{se } i \neq j \end{cases}$, $\forall i, j = 1, \dots, m$; b) mostre, seguidamente, que f fica completamente determinada pelas imagens $b_i = f(a_i)$, $i = 1, \dots, m$, isto é, se $g(a_i) = f(a_i) = b_i$, $\forall i$, então $f = g$. (Componha f com uma aplicação ortogonal $L \in O(n)$ tal que $Lf(a_i) = a_i$.)

Recordemos que são equivalentes:

- a) $\{a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_k - a_0\}$ são linearmente independentes.
b) $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_k\}$ são independentes afim, isto é, $\sum_{i=0}^k \lambda_i a_i = 0$, com $\sum_{i=0}^k \lambda_i = 0$ sse $\lambda_0 = \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$

Exercício 13 Sejam $X \subset \mathbb{R}^m$ não-vazio e $f : X \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão isométrica. Mostre que existe uma imersão isométrica (única quando X gera \mathbb{R}^m) $\varphi : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que $\varphi|_X = f$.

Sugestão: Comece por provar, usando também o exercício anterior, que uma imersão isométrica $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ fica completamente determinada pelas imagens de $m+1$ pontos independentes afim.

Provámos assim os seguintes teoremas:

Teorema 14 Se $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ é uma imersão isométrica então $f \in I(\mathbb{R}^n)$ e escreve-se, de modo único, como a composta $f = T_a L$, com $L \in O(n)$.

Definição 15 Se na decomposição do teorema anterior, $f = T_a L$, temos que $L \in SO(n)$ dizemos que f é uma isometria directa (ou: que preserva a orientação); caso contrário dizemos que é inversa (ou que inverte a orientação).

Teorema 16 Toda imersão isométrica $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ fica completamente determinada pelas imagens de $m+1$ pontos independentes. Em particular, tomando $m = n$ e $f = id$, em \mathbb{R}^n qualquer ponto fica determinado pelas suas distâncias a $n+1$ pontos independentes.

Teorema 17 Se $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e $\{b_0, b_1, b_2, \dots, b_n\}$ são dois conjuntos de $n+1$ pontos independentes de \mathbb{R}^n , com $d(a_i, a_j) = d(b_i, b_j)$ para $0 \leq i, j \leq n$, existe $f \in I(\mathbb{R}^n)$, única, tal que $fa_i = b_i$ para $0 \leq i \leq n$.

1.1 Subespaços afim e hiperplanos

Esta secção contém definições e algumas propriedades básicas sobre subespaços afim de \mathbb{R}^n : a descrição mais sumária é dizer que são translataados de subespaços vectoriais.

Definição 18 $A \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço afim se

$$\lambda a + \mu b \in A, \forall a, b \in A, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R} : \lambda + \mu = 1$$

isto é, se A contém a recta por dois quaisquer dos seus pontos.

Exercício 19 Mostre que se A é um subespaço afim então para todo o k verifica-se:

$$\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i \in A, \quad a_i \in A, \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

Exercício 20 Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ um subespaço afim.

- Mostre que $V = A - a = \{x - a : x \in A\}$ é um subespaço linear.
- Mostre que $A - a = A - b, \forall a, b \in A$

Se $A \subset \mathbb{R}^n$ é um subespaço afim, a sua *dimensão* é a dimensão do subespaço vectorial $V = A - a_0, a_0 \in A$. Se $\{a_1 - a_0, a_2 - a_0, \dots, a_k - a_0\}$ são uma base para V , $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_k\}$ são independentes afim e formam uma *base afim* para A : todo o elemento $a \in A$ se escreve de modo único como

$$a = \sum_{i=0}^k \lambda_i a_i, \quad \sum_{i=0}^k \lambda_i = 1$$

Exercício 21 Sejam $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$ subespaços afim e seja $f : A \rightarrow B$ uma aplicação afim, isto é,

$$f(\lambda a + \mu b) = \lambda f(a) + \mu f(b), \forall a, b \in A, \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu = 1$$

(e portanto que envia rectas em rectas - eventualmente degeneradas). Mostre que, para todo o k ,

$$f\left(\sum_{i=1}^k \lambda_i a_i\right) = \sum_{i=1}^k \lambda_i f(a_i), \quad \sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$$

Exercício 22 Sejam $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$ subespaços afim, $a \in A, b \in B$. Mostre que:

- Se $L : A - a \rightarrow B - b$ é uma aplicação linear, a aplicação $A_L : A \rightarrow B$ definida por $A_L(x) = L(x - a) + b$ é uma aplicação afim.
- Se $f : A \rightarrow B$ é uma aplicação afim, $L_f : A - a \rightarrow B - b$ definida por $L_f(x) = f(x + a) - f(a)$ é uma aplicação linear e $A_{L_f} = f$.

Definição 23 Um hiperplano H de \mathbb{R}^n é um subespaço afim de dimensão $n - 1$.

Se H é um hiperplano de \mathbb{R}^n e $a \in H$, então $H - a$ é um subespaço linear de dimensão $n - 1$, logo existe $b \neq 0$ (e podemos supôr $\|b\| = 1$) tal que $H - a = \{b\}^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle b, x \rangle = 0\}$: podemos considerar uma base ortonormal para $H - a$ e estendê-la, por um vector b , a uma base ortonormal de \mathbb{R}^n (veja o exercício seguinte). Portanto H pode ser descrito como $H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle b, y \rangle = t\}$, ou seja como o conjunto dos vectores que têm a mesma projecção sobre o vector b .

Exercício 24 *Recorde o processo de Gram-Schmidt para a obtenção de bases ortonormadas: dada uma base $\{a_1, a_2, \dots, a_j\}$ de um subespaço S de \mathbb{R}^n , começa-se por obter a partir dela, por recorrência, uma base ortogonal:*

$$f_1 = a_1, \dots, f_k = a_k - \sum_{i=1}^{k-1} \left(\frac{\langle a_k, f_i \rangle}{\langle f_i, f_i \rangle} \right) f_i, \dots$$

a) Aplique o método à seguinte base:

$$\{a_1 = (2, 1, 1), a_2 = (0, 1, 0), a_3 = (0, 0, 1)\}$$

Os hiperplanos aparecem naturalmente como os bissetores ortogonais de segmentos:

Exercício 25 *Se $a, b \in \mathbb{R}^n$ com $a \neq b$, então $B = \{x : d(x, a) = d(x, b)\}$ é um hiperplano de \mathbb{R}^n .*

Exercício 26 *Seja H um hiperplano em \mathbb{R}^n . Mostre que todo $x \in \mathbb{R}^n$ se pode escrever de forma única como $x = y + z$ com $y \in H$ e $z \perp (H - y)$.*

1.2 Reflexões em hiperplanos

Definição 27 *Seja H um hiperplano em \mathbb{R}^n . A reflexão em H é a isometria $R_H \in I(\mathbb{R}^n)$ definida por*

$$R_H(x) = y - z$$

em que $x = y + z$ com $y \in H$ e $z \perp (H - y)$ (exercício anterior).

Note-se que $R_H^2 = id$ e que R_H é a identidade em H . Se H é o bissetor ortogonal do segmento ab , R_H permuta a e b .

Exercício 28 *Seja H um hiperplano e $0 \in H$ (H é portanto um subespaço linear de codimensão 1). Mostre que a reflexão em H é dada por:*

$$R_H(x) = x - 2 \langle x, a \rangle a \text{ em que } a \perp H, \|a\| = 1$$

Exercício 29 *(Generalização do exercício anterior) Mostre que se H é um hiperplano dado por $H = \{x : \langle a, x \rangle = t\}$ em que $a \perp (H - h), h \in H$ (já vimos que todo o hiperplano pode ser dado desta forma)*

$$R_H(x) = x - 2 \langle x, a - t \rangle \frac{a}{\langle a, a \rangle}$$

1. *Reflexões em rectas*: $f = R_l$.
2. *Translações*: $f = T_a$.
3. *Rotações*: $f = R(a, \theta)$; esta notação representa a rotação de ângulo θ e centro a (ou "em torno de a "), isto é, $f = T_a L T_{-a}$ em que $L \in SO(2)$ é a rotação de ângulo θ em torno da origem.
4. *Reflexões deslizantes*: $f = T_a R_l = R_l T_a$ em que a é um vector paralelo à recta l .

As reflexões, em rectas e deslizantes, são as isometrias inversas, sendo as segundas obtidas como o produto de reflexões em três rectas, e as translações e rotações são as isometrias directas, obtidas como produto de reflexões num par de rectas, paralelas no primeiro caso, concorrentes no segundo.

Exercício 36 *Mostre que as isometrias de \mathbb{R}^2 são de facto dos quatro tipos descritos.*

Já vimos que toda a isometria, $f \in I(\mathbb{R}^2)$, se escreve como $f = T_a L$, com $L \in O(n)$. Há um modelo analítico para \mathbb{R}^2 , muito útil, em que podemos ver as isometrias, e mais geralmente as aplicações afim, como restrições de aplicações lineares de \mathbb{R}^3 e, assim, representá-las simplesmente através de uma matriz 3×3 .

Identificamos \mathbb{R}^2 ao hiperplano de \mathbb{R}^3 , $\hat{\mathbb{R}}^2$, de equação $z = 1$, através do mergulho natural

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^2 &\hookrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\rightarrow (x, y, 1) \end{aligned}$$

Seja f uma aplicação afim dada por $f(x, y) = L(x, y) + b$, em que L é linear e $b = (b_1, b_2)$; se a matriz de L é $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, a aplicação afim correspondente $\hat{f} : \hat{\mathbb{R}}^2 \rightarrow \hat{\mathbb{R}}^2$, $\hat{f}(x, y, 1) = (f(x, y), 1)$ pode ser dada simplesmente por

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

Esta representação tem a ver com as chamadas *coordenadas homogéneas* da *geometria projectiva*; o livro de Cederberg indicado na bibliografia, [1], faz um uso deste modelo analítico do plano euclidiano: consulte o capítulo 3; este livro bem como o de Rees, [5], contêm introduções à geometria projectiva.

Em particular uma isometria $f = T_b L$, $L \in O(n)$, $b = (b_1, b_2)$, representa-se como

$$\hat{f}(x, y, 1) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \pm a_{12} \\ a_{12} & \mp a_{11} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

com $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$.

2.1 Exercícios de revisão e aplicação...

1. Escreva a expressão em coordenadas cartesianas, (x, y) , da reflexão R_m , em que m é a recta de equação $y = 2x + 1$.
2. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = \left(\frac{3x+4y+10}{5}, \frac{4x-3y+15}{5}\right)$.
 - (a) Mostre que f é uma isometria.
 - (b) Escreva f como produto de reflexões em rectas.
 - (c) Classifique f , indicando em particular o seu conjunto invariante.
3. Seja $f \in I(\mathbb{R}^2)$ dada por $f = T_b R_m$ em que m é a recta de equação $y = 2x + 1$ e $b = (-2, 1)$. Classifique f , indicando, em particular, o seu conjunto invariante.
4. Recorde como uma isometria de \mathbb{R}^2 pode ser descrita por uma matriz 3×3 .
 - (a) Escreva a isometria definida por $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 5 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ como produto de reflexões em rectas.
 - (b) Escreva agora a isometria como produto de *duas* reflexões em rectas (cf. exercício 23 b., abaixo)
5. Escreva a rotação $R(C, \alpha)$ de ângulo $\alpha = \pi$ (*meio-giro*), em torno do ponto $C = (5, 2)$, através de uma matriz 3×3 .

Idem para a reflexão deslizante, f , na recta m de equação $y = x + 2$ em que $d(P_m x, P_m f(x)) = 2$, sendo $P_m y$ a projecção ortogonal de y na recta dada.
6. Sejam l, m, n as rectas no plano de equações $y = x + 2$, $y = -x + 3$ e $x = 2$ respectivamente. Considere $f \in I(\mathbb{R}^2)$ dada por $f = R_l R_m R_n$. Classifique f indicando, em particular, o conjunto invariante.
7. Mostre que duas rotações, $R(a, \alpha)$ e $R(b, \beta)$, diferentes da identidade ($\alpha, \beta \neq 0$) e com centros distintos ($a \neq b$) não comutam.
8. Prove o *Teorema de Hjelmslev*: se α é uma isometria do plano e l é uma recta, então existe uma recta m tal que para todo o ponto P de l , o ponto médio do segmento $\overline{P\alpha(P)}$ está em m .
9. É verdade que toda a *reflexão deslizante* é o produto de 3 reflexões em 3 rectas que contêm os lados de um triângulo? Justifique devidamente.
10. É verdade que se α é uma *isometria inversa* do plano então se pode escrever $\alpha = R_l R_m R_n$ em que uma qualquer das rectas l, m, n pode ser escolhida à partida?

11. Dados dois triângulos congruentes, $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, com $A = (0, 0)$, $B = (5, 0)$, $C = (0, 10)$, $D = (4, 2)$, $E = (1, -2)$, $F = (12, -4)$, determine equações de rectas tais que o produto de reflexões nessas rectas envie ΔABC em ΔDEF .
12. Suponha que as rectas l, m, n têm, respectivamente, equações $x = 2, y = 3$, e $y = 5$. Determine as equações para $R_m R_l$ e para $R_n R_m$.
13. Prove que se P é um ponto e l e m são rectas, então existem rectas p e q tais que P está em p e $R_m R_l = R_q R_p$.
14. Dadas rectas não paralelas \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{CD} , mostre que existe uma rotação ρ tal que $\rho(\overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{CD}$ (Note que há orientações fixadas nas rectas). O que pode dizer no caso de serem paralelas?
15. Diga, justificando, se são ou não verdadeiras as seguintes afirmações:
 - (a) Toda a translação é um produto de duas rotações não involutivas.
 - (b) Se $P \neq Q$ então existe uma única translação que envia P em Q mas existe um número infinito de rotações que enviam P em Q .
16. Se l, m, n são os bissectores ortogonais (mediatrizes) dos lados \overline{AB} , \overline{BC} , \overline{CA} , respectivamente, do ΔABC , então $R_n R_m R_l$ é uma reflexão em qual recta?
17. Quais são as rectas que são invariantes por uma rotação $R(c, \theta)$?
18. Se $R_l R_m R_n$ é uma *reflexão*, mostre que as rectas n, m, l ou são concorrentes ou são paralelas.
19. Mostre que $R_n R_m R_l = R_l R_m R_n$ se as rectas l, m, n são concorrentes ou têm uma perpendicular comum.
20. Mostre que o produto das reflexões nas três bissectrizes de um triângulo é uma reflexão numa recta perpendicular a um lado do triângulo.
21. Se $R_n R_m(x, y) = (x + 6, y - 3)$, determine equações para rectas m e n .
22. Se l e m são duas rectas distintas e concorrentes, determine o lugar geométrico dos pontos P tais que $R(P, \theta)(l) = m$ para algum θ .
23. Prove o seguinte *Teorema de Adição de Ângulos para Rotações*:
 - (a) Uma rotação de ângulo Θ seguida de uma rotação de ângulo Φ é uma rotação de ângulo $\Theta + \Phi$ excepto se $\Theta + \Phi = 0$, caso em que se obtém uma translação.
 - (b) Prove o resultado análogo ao de a. para os casos de uma rotação seguida de translação e de uma translação seguida de rotação.

24. Prove os Teoremas de Adição de Ângulos do exercício anterior usando a representação das isometrias através de matrizes 3×3 .
25. Suponha que o segmento \overline{PQ} tem ponto médio M e bissetor ortogonal m . Mostre que o conjunto das isometrias que enviam P em Q consiste precisamente das isometrias $R_m R_p$ e $R(M, \pi) R_p$ em que p é uma qualquer recta por P e $R(M, \pi)$ designa o *meio-giro* de centro M .
26. Se a recta l intersecta as rectas m e n em pontos distintos N e M , respectivamente, mostre que o eixo da reflexão deslizante $R_n R_l R_m$ contem os pés das perpendiculares a m e n que passam pelos pontos M e N , respectivamente. (Note que isto dá uma construção geométrica fácil para o eixo de uma reflexão deslizante).
27. Se $x' = ax + by + c$ e $y' = bx - ay + d$, com $a^2 + b^2 = 1$, são as equações de uma isometria α , mostre que α é uma reflexão sse $ac + bd + c = 0$ e $ad - bc - d = 0$.
28. Se $x' = \frac{3x}{5} + \frac{4y}{5}$ e $y' = \frac{4x}{5} - \frac{3y}{5}$ são equações para R_m determine m .
29. Classifique e descreva a isometria dada pelas equações $2x' = -3^{\frac{1}{2}}x - y + 2$ e $2y' = x - 3^{\frac{1}{2}}y - 1$.
30. Numa figura consistindo de dois pontos A e B , faça uma construção para o ponto P tal que $T_{B-P}R(B, 60^\circ)$ fixa A .
31. Dada uma recta p e dois pontos, A e B que não lhe pertencem faça uma construção da recta r que é invariante por $R(B, \pi)R_pR(A, \pi)$.
32. Prove ou apresente um contra exemplo: Dada T_A e uma rotação diferente da identidade, $R(C, \theta)$, existe uma rotação $R(D, \phi)$ tal que $T_A = R(D, \phi)R(C, \theta)$.
33. Mostre que se R_1, R_2, R_2R_1 , e $R_2^{-1}R_1$ são rotações, então os centros de R_1, R_2R_1 , e $R_2^{-1}R_1$ são colineares.

3 Similitudes de \mathbb{R}^2

Recorde que uma *similitude* de um espaço métrico (M, d) é uma aplicação *bijectiva* $f : M \rightarrow M$ tal que para algum $k > 0$ (dito a *razão* da similitude) se verifica

$$d(f(x), f(y)) = k d(x, y), \quad \forall x, y \in M$$

Se $k = 1$ temos uma isometria; é claro que f^{-1} é também uma similitude de razão $1/k$ e o conjunto das similitudes de M , $Sim(M)$ (ou apenas $S(M)$), formam um grupo de que as isometrias são um subgrupo:

$$Isom(M) \leq Sim(M) \leq Homeo(M) \leq Bij(M)$$

como já víramos.

No caso de \mathbb{R}^n , o exemplo mais útil são as (de centro 0), $D(0, k)$, que enviam cada $x \in \mathbb{R}^n$ em kx . Podemos, mais geralmente, definir homotetias (também ditas *esticões*) de centro arbitrário $C \in \mathbb{R}^n$ por

$$D(C, k) = T_C D(0, k) T_{-C}$$

O significado geométrico é claro: $D(C, k)$ fixa C e envia cada semirecta de origem C em si mesma, esticada pelo factor k . Os exercícios da secção 1 que conduziram aos três primeiros teoremas podem ser usados ou adaptados de forma imediata, com a inclusão de um factor k , para dar provas de teoremas análogos para similitudes:

Teorema 37 *Seja $f \in Sim(\mathbb{R}^n)$, de razão k .*

1. *Se $f(0) = 0$, então f é linear e temos $f = D(0, k)L = LD(0, k)$ com $L \in O(n)$, isto é, f é uma aplicação ortogonal seguida de uma homotetia central (ou precedida: comutam pois, sendo L linear, $L(kx) = kL(x)$).*
2. *A forma geral de f é $f = T_a LD(0, k)$, com $L \in O(n)$, isto é, f é uma homotetia central seguida de uma isometria (de acordo com o tipo dessa isometria, f diz-se, também, directa ou inversa)*
3. *f fica completamente determinada pelas imagens de $n + 1$ pontos independentes-afim e se $\{a_0, a_1, a_2, \dots, a_n\}$ e $\{b_0, b_1, b_2, \dots, b_n\}$ são dois conjuntos de $n + 1$ pontos independentes de \mathbb{R}^n , com $d(a_i, a_j) = kd(b_i, b_j)$ para $0 \leq i, j \leq n$, existe $f \in Sim(\mathbb{R}^n)$, única, tal que $fa_i = b_i$ para $0 \leq i \leq n$.*

Relativamente ao pontos 1. e 2. do teorema, note-se que em dimensão dois, $D(0, k)L$ se representa matricialmente por

$$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & \pm a_{12} \\ a_{12} & \mp a_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ka_{11} & \pm ka_{12} \\ ka_{12} & \mp ka_{11} \end{bmatrix}$$

com $a_{11}^2 + a_{12}^2 = 1$, logo $f \in Sim(\mathbb{R}^n)$ representa-se por uma matriz 3×3 :

$$\hat{f}(x, y, 1) = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & \pm c_{12} \\ c_{12} & \mp c_{11} \end{bmatrix} & \begin{matrix} b_1 \\ b_2 \end{matrix} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

com $c_{11}^2 + c_{12}^2 = k^2$.

Exercício 38 *Dê uma prova do teorema anterior.*

Exercício 39 *Se $f \in Sim(\mathbb{R}^n)$, por 2. do teorema anterior, f é uma homotetia central seguida de uma isometria; diga se também se pode representar f como uma isometria seguida de uma homotetia central.*

A classificação das similitudes de \mathbb{R}^2 , análoga à das isometrias, baseia-se no seguinte facto:

Teorema 40 *Uma similitude que não tem nenhum ponto fixo, é uma isometria.*

Quer isto dizer que se uma similitude tem razão $k \neq 1$, então tem necessariamente um ponto fixo, que por razões óbvias será único.

Antes de provar o teorema vamos proceder à classificação das similitudes de \mathbb{R}^2 . Seja $f \in Sim(\mathbb{R}^2)$ e k a sua razão. Se $k = 1$, então f é uma isometria, de um dos cinco tipos anteriormente descritos na classificação dessas transformações. Se $k \neq 1$, seja C o ponto fixo de f ; consideremos a composta de f com a homotetia de centro C e razão $1/k$, $g = D(C, 1/k)f$. Como g tem razão $k' = 1$, é uma isometria e tendo C como ponto fixo ou é a identidade, $g = id$, ou uma rotação de centro C , $g = R(C, \alpha)$, ou uma reflexão numa recta por C , $g = R_l$, $C \in l$ (as translações e as reflexões deslizantes não têm pontos fixos). Correspondentemente temos que $f = D(C, k)g$ é um *esticão* de centro C , ou uma *rotação esticada* (de centro C) ou uma *reflexão esticada* (em C). Resumindo, temos os seguintes tipos de similitudes:

1. *Isometrias* (de cinco tipos)
2. *Esticões* (homotetias)
3. *Rotações esticadas*
4. *Reflexões esticadas*.

1ª prova do teorema:

Seja $\alpha : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma similitude de razão $k \neq 1$. Sem perda de generalidade (*s.p.g.*) supomos $k < 1$ (caso contrário trabalhamos com a inversa de α : um ponto fixo de α é um ponto fixo de α^{-1}). Considerando um ponto arbitrário, P_0 , escrevemos $P_n = \alpha^n(P_0)$, a sucessão obtida por aplicação sucessiva de α . Vamos ver que esta sucessão é convergente: $P_n \rightarrow P$. O ponto limite, P , será então o ponto fixo de α : como α é uma aplicação contínua (é mesmo uniformemente contínua), $\alpha(P_n) \rightarrow \alpha(P)$; mas $\alpha(P_n) = P_{n+1} \rightarrow P$, logo $P = \alpha(P)$. Como \mathbb{R}^n é *completo* basta ver que $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é *sucessão de Cauchy*. Fixe-se m arbitrário; para $n = m + r$ temos

$$\begin{aligned} & \|P_m - P_n\| \leq \\ & \leq \|P_m - P_{m+1}\| + \|P_{m+1} - P_{m+2}\| + \|P_{m+2} - P_{m+3}\| + \cdots + \|P_{n-1} - P_n\| = \\ & = \|P_m - P_{m+1}\| + k \|P_m - P_{m+1}\| + k^2 \|P_m - P_{m+1}\| + \cdots + k^r \|P_m - P_{m+1}\| = \\ & = (1 + k + k^2 + \cdots + k^r) \|P_m - P_{m+1}\| \end{aligned}$$

logo, para qualquer $n > m$

$$\|P_m - P_n\| \leq \|P_m - P_{m+1}\| \left(\sum_{i=0}^{\infty} k^i \right) = \|P_m - P_{m+1}\| \frac{1}{1 - k}$$

Por outro lado,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|P_m - P_{m+1}\| = \lim_{m \rightarrow \infty} k^m \|P_0 - P_1\| = 0$$

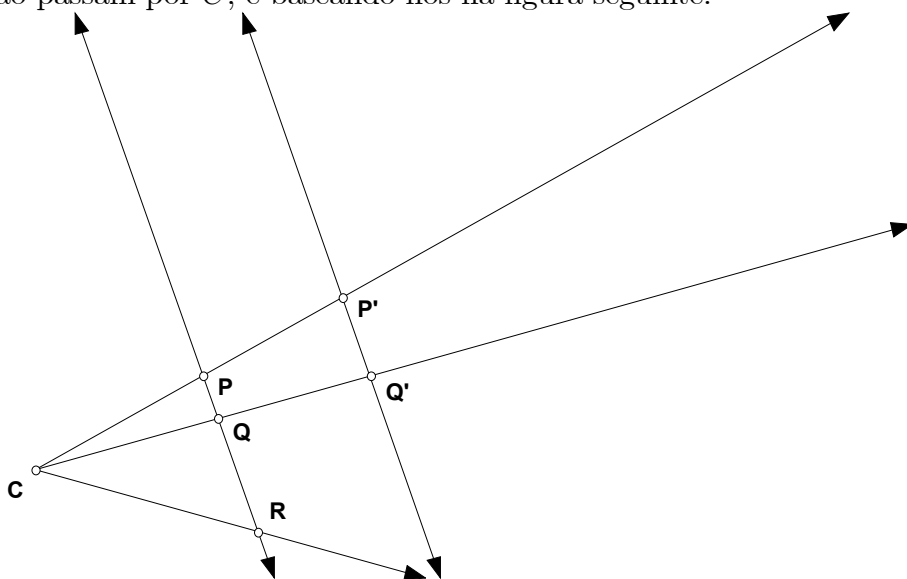
porque $0 < k < 1$. Logo, dado $\epsilon > 0$, existe $p \in \mathbb{N}$ tal que $m, n \geq p \implies \|P_m - P_n\| < \epsilon$, isto é, a sucessão é de Cauchy ■

Exercício 41 *Verifique os detalhes desta prova.*

A segunda prova que vamos dar é menos geral, feita apenas em dimensão 2, mas é mais geométrica e mais rica pois traz, e usa, informação adicional sobre as transformações do plano chamadas *dilatações*.

Definição 42 *Uma aplicação $\alpha : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ diz-se uma dilatação se é bijectiva e para toda a recta l a sua imagem por α é uma recta paralela: $l \parallel \alpha(l)$.*

Como veremos as dilatações formam um subgrupo $Dil(\mathbb{R}^2) = D(\mathbb{R}^2) \leq S(\mathbb{R}^2)$. É claro que as homotetias $D(C, k)$ são dilatações: as rectas por C são enviadas nelas próprias; para as que não passam por C , e baseando-nos na figura seguinte:



Sendo $P' = \alpha(P)$ e $Q' = \alpha(Q)$, temos, designando por XY o comprimento do segmento \overline{XY} , que

$$CP' = kCP, \quad CQ' = kCQ, \quad P'Q' = kPQ$$

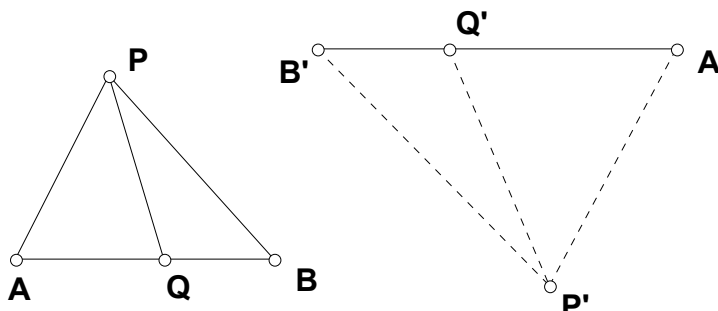
portanto temos semelhança dos triângulos, $\Delta CPQ \sim \Delta CP'Q'$, logo $\angle CPQ = \angle CP'Q'$ e então as duas rectas \overleftrightarrow{PQ} , $\overleftrightarrow{P'Q'}$ são paralelas, fazendo, com a recta \overleftrightarrow{CQ} ângulos alternos internos iguais.

É claro que um meio-giro, $R(C, \pi)$ é também uma dilatação. Logo um *esticão com meio-giro*, $R(C, \pi)D(C, k) = D(C, k)R(C, \pi)$, que também se indica por $D(C, -k)$, é uma dilatação. Finalmente as translações T_a são dilatações e como veremos de seguida são estas as únicas dilatações.

Consideremos dois segmentos de recta paralelos, $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$. Se existir uma dilatação δ com $\delta(A) = A'$ e $\delta(B) = B'$ temos:

Dado P não colinear com A e B , $P' = \delta(P)$ será determinado pela intersecção da paralela a \overline{AP} por A' com a paralela a \overline{BP} por B' . Se Q está na recta \overleftrightarrow{AB} , $Q' = \delta(Q)$ é determinado pela intersecção da recta paralela a \overleftrightarrow{PQ} por $P' = \delta(P)$ com a recta $\overleftrightarrow{A'B'}$. Portanto a imagem de cada ponto é completamente determinada pelas imagens A' e B'

de A e B , respectivamente.

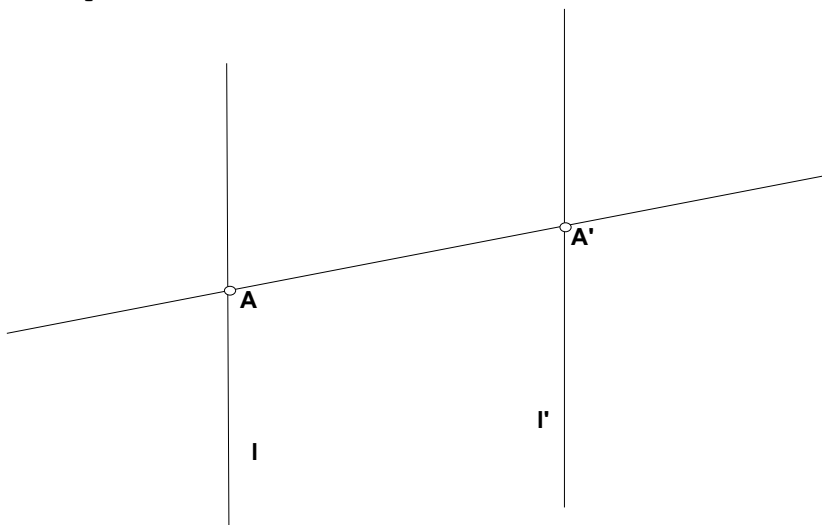


Concluimos assim que existe *no máximo uma* dilatação δ com $\delta(A) = A'$ e $\delta(B) = B'$. Por outro lado, como $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, a translacção $T_{A'-A}$ que leva A em A' , seguida do esticção de centro A' (simples ou com meio-giro, se necessário) que leva $T_{A'-A}B$ em B' é tal dilatação. Provámos, assim o seguinte teorema:

Teorema 43 *Se $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$, existe uma única dilatação, δ tal que $\delta(A) = A'$ e $\delta(B) = B'$.*

Note-se que se δ é uma dilatação e $\delta(A) = A'$, a recta $\overleftrightarrow{AA'}$ é invariante por δ , porque as duas rectas $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\delta(\overleftrightarrow{AA'})$ são paralelas, por definição de dilatação, e como têm um ponto comum, A' , são coincidentes.

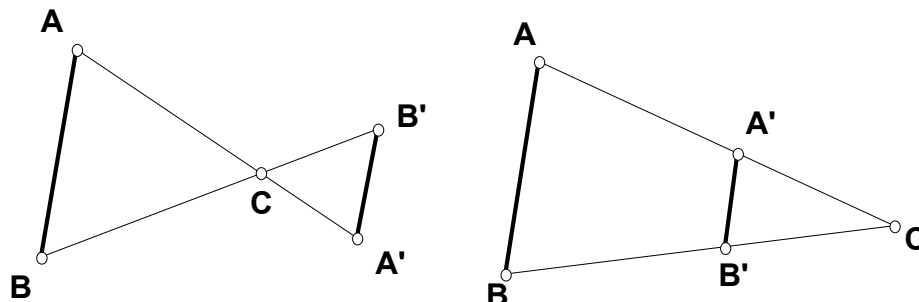
Seja α uma dilatação diferente da identidade; existe uma recta l tal que l e $l' = \alpha(l)$ são rectas distintas e paralelas.



Sejam A, B pontos de l e A', B' as suas imagens por α .

Se $\overleftrightarrow{AA'} \parallel \overleftrightarrow{BB'}$ então $AA'B'B'$ é um paralelogramo e portanto $T_{A'-A}$ leva A em A' e B em B' . Pelo teorema anterior, $\alpha = T_{A'-A}$. Se $\overleftrightarrow{AA'} \not\parallel \overleftrightarrow{BB'}$ seja C o ponto de intersecção de $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$ (figura seguinte). Como $\overleftrightarrow{AA'}$ e $\overleftrightarrow{BB'}$ são invariantes por α , C é ponto fixo de

α . Por semelhança de triângulos, $CA'/CA = CB'/CB$, logo existe um esticão de centro C (com meio-giro na situação da esquerda da figura), $\delta = D(C, \pm k)$, que envia A em A' e B em B' .



De novo pela unicidade, $\alpha = \delta$. Acabámos, assim, de provar a seguinte classificação de $Dil(\mathbb{R}^2)$

Teorema 44 *Uma dilatação é uma translação ou um esticão (simples ou com meio-giro).*

Podemos agora passar à segunda prova, estabelecendo primeiro o seguinte lema:

Lema 45 *Consideremos a recta pelos pontos A e B , com uma orientação fixada, \overrightarrow{AB} . Definimos, para um segmento de recta arbitrário, \overline{XY} , a distância dirigida \underline{XY} por $\underline{XY} = \pm \|Y - X\|$ conforme a orientação do segmento \overline{XY} coincide ou não com a orientação fixada; é claro que $\underline{XY} = -\underline{YX}$ e para todo o ponto C , $\underline{AC}/\underline{CB}$ é independente da orientação fixada.*

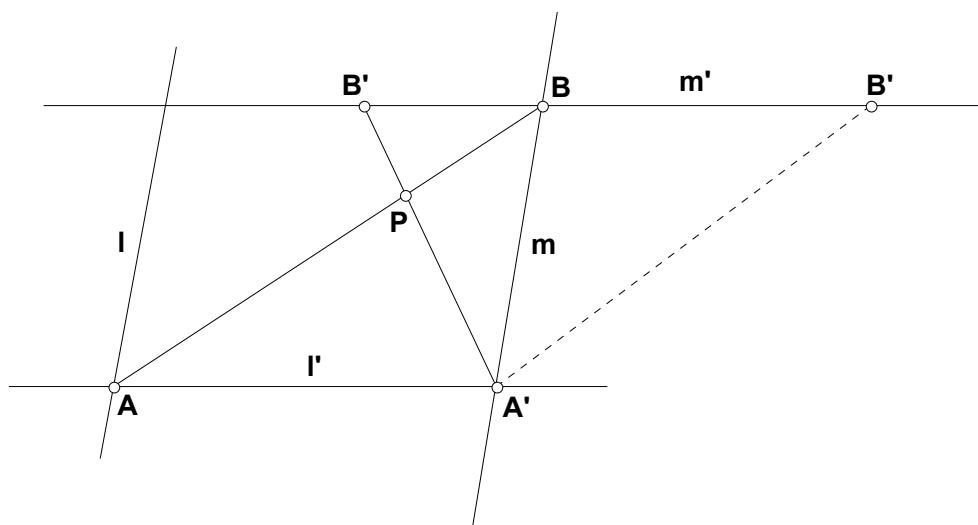
Se $y \neq -1$ existe um único ponto $P \neq B$ na recta, tal que $\underline{AP}/\underline{PB} = y$; reciprocamente para todo $P \neq B$, $\underline{AP}/\underline{PB} \neq -1$ e $\underline{AP}/\underline{PB} > 0$ se e só se P está entre A e B .

Exercício 46 *Prove o lema anterior (sugestão: existe uma correspondência natural entre os pontos da recta \overleftrightarrow{AB} e \mathbb{R} dada pela parametrização $A + x(B - A) = (1 - x)A + xB$)*

2ª prova do teorema:

Seja $\alpha \in S(\mathbb{R}^2) - I(\mathbb{R}^2)$; Sem perda de generalidade (*spg*) α não é uma dilatação, logo existe uma recta l tal que $l \not\parallel \alpha(l) = l'$. Sejam $A = l \cap l'$ e $A' = \alpha(A)$; *spg* $A \neq A'$; seja m uma recta por A' paralela a l e $m' = \alpha(m)$. Então $m' \parallel l'$ porque uma similitude (ou mais geralmente uma aplicação afim injectiva) envia rectas paralelas em rectas paralelas. Sejam $B = m \cap m'$ e $B' = \alpha(B)$; *spg* $B \neq B'$. Com referência à figura seguinte

spg $\overleftrightarrow{AB} \not\parallel \overleftrightarrow{A'B'}$, caso contrário $AA'B'B$ seria um paralelogramo e portanto $A'B' = AB$ e α seria uma isometria. Logo existe um ponto P na intersecção das duas rectas. Por semelhança de triângulos, $\underline{AP}/\underline{PB} = \underline{A'P}/\underline{PB'}$; por outro lado, se α tem razão k e $P' = \alpha(P)$, $\underline{AP}/\underline{PB} = k\underline{AP}/k\underline{PB} = \underline{A'P'}/\underline{P'B'}$; logo $\underline{A'P}/\underline{PB'} = \underline{A'P'}/\underline{P'B'}$; como $P, P' = \alpha(P) \in \overleftrightarrow{A'B'}$, passando a distâncias dirigidas em $\overleftrightarrow{A'B'}$, e fixando uma qualquer orientação já que estamos a considerar os quocientes, temos que $\underline{A'P}/\underline{PB'} = \underline{A'P'}/\underline{P'B'}$ logo, pela unicidade estabelecida no lema, $P' = P$ ■



3.1 Exercícios de revisão e aplicação...

1. Diga quais são as *similitudes* cujo quadrado é uma *dilatação*. Justifique devidamente.
2. Determine todos os *pontos fixos* e *rectas invariantes* de $R_m D(A, 2)$ em que ΔABC é equilátero e $m = \overrightarrow{BC}$.
3. Determine o ponto P para o qual um esticão de centro P , $D(P, k)$ tem equações $x' = -2x + 3$, $y' = -2y - 4$.
4. Mostre que duas quaisquer *parábolas* são semelhantes.
5. Quais são os pontos fixos e as rectas invariantes de uma *reflexão esticada*? Quais são os pontos fixos e as rectas invariantes de uma *rotação esticada*?
6. Dados dois pontos distintos A e B , esboce o conjunto de todas as rectas invariantes por $D(B, 3)D(A, -2)$.
7. Classifique e descreva as seguintes similitudes:
 - (a) f dada por $f(x, y) = (3x + 7, 3y - 5)$
 - (b) g dada por $g(x, y) = (3x + 5y + 2, tx - 3y)$ em que t deve ser determinado.
8. Se α é uma similitude tal que $\alpha(0, 0) = (1, 0)$, $\alpha(1, 0) = (2, 2)$, $\alpha(2, 2) = (-1, 6)$ determine $\alpha(-1, 6)$.
9. Dê uma prova ou apresente um contra-exemplo para cada uma das afirmações seguintes:

- (a) Dilatações α e β , diferentes da identidade, comutam sse são translações.
- (b) Há exactamente duas dilatações que enviam o círculo C no círculo C' .
10. Dado um triângulo agudo (i.e. acutângulo), ΔABC , construa o quadrado inscrito no triângulo que tem um lado em \overline{AB} (Sugestão: todos os quadrados são semelhantes...)
11. Investigue a seguinte questão: porque é que o arco-íris é um arco? É um arco de círculo? (Note que é um fenómeno físico, logo será necessário começar por perceber a sua explicação física...)

4 Transformações afim de \mathbb{R}^2

É possível fazer também, em dimensão 2, não uma classificação, mas uma caracterização interessante das transformações afim, isto é, aplicações afim *injectivas*. Recorde, da subsecção 1.1, que uma transformação afim de \mathbb{R}^n será do tipo $f = T_b L$ em que $L \in GL(n, \mathbb{R})$ é um *isomorfismo linear*. O conjunto das transformações afim é um grupo, $Afim(\mathbb{R}^n) = A(\mathbb{R}^n)$ de que as isometrias e similitudes são subgrupos:

$$Isom(\mathbb{R}^n) \leq Sim(\mathbb{R}^n) \leq Afim(\mathbb{R}^n)$$

Exercício 47 *Verifique que $Afim(\mathbb{R}^n)$ é de facto um grupo.*

No caso de \mathbb{R}^2 podemos representar $f \in A(\mathbb{R}^2)$ de forma análoga às isometrias e similitudes por uma matriz 3×3 : se $f = T_b L$, $b = (b_1, b_2)$, temos

$$A = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ 1 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \text{ com } |A| \neq 0 \text{ e } \hat{f}(x, y, 1) = A \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}$$

É claro, da definição e da subsecção 1.1, que dados dois triângulos ΔABC e $\Delta A'B'C'$ existe uma e uma só transformação afim que envia um triângulo no outro, seguindo aquela ordem dos vértices.

Exercício 48 *Verifique a afirmação anterior.*

Definição 49 *Uma transformação diz-se equiafim se é afim e preserva as áreas.*

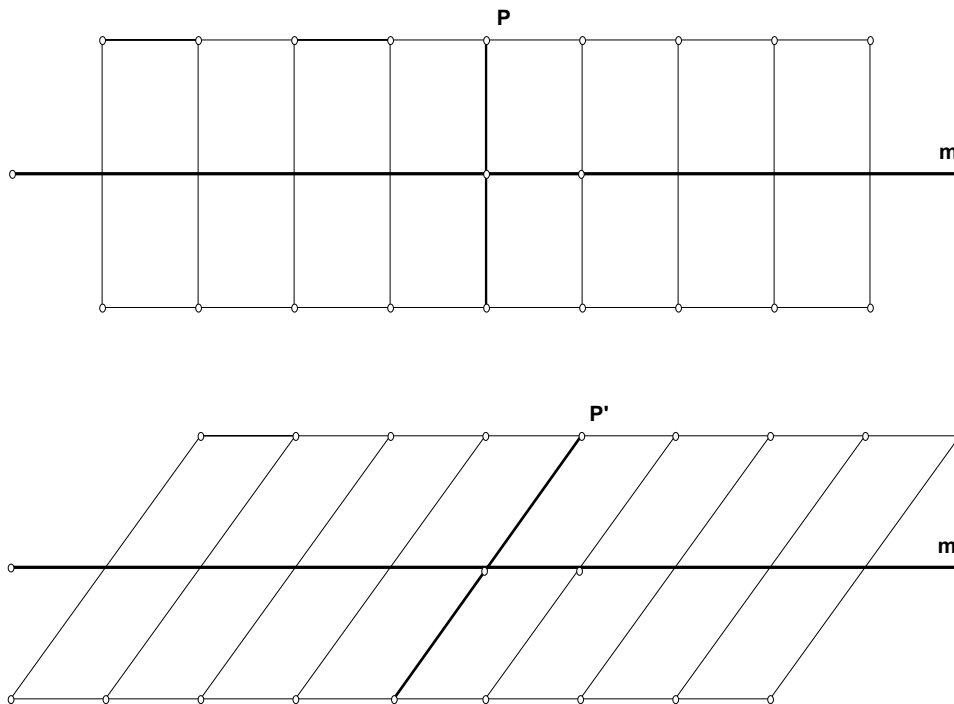
Dada uma transformação afim $f = T_b L$ com matriz A , como em cima, então f é *equiafim* sse $|A| = 1$: na verdade as áreas das imagens por uma transformação afim são destorcidas pelo factor $|A|$: se o ΔPQR tem área S , então $f(\Delta PQR)$ tem área $|A|S$.

Exercício 50 *Verifique a afirmação.*

Há dois tipos especiais de transformações afim do plano, "*shears*" e "*strains*" que passamos a descrever.

Exercício 51 Escolha traduções adequadas para "shears" e "strains" (por adequadas entenda-se simples e sugestivas: melhores do que "rotação axial" ou "esticão axial" que são nomes que as descrições abaixo podem sugerir...): as melhores serão depois escolhidas para substituir, no futuro, estas duas palavras que por agora vou continuar a usar!

Um *shear*, S_m , com eixo a recta m é a aplicação afim que fixa m e envia um ponto P em P' tal que $\overline{PP'} \parallel m$. As figuras seguintes representam esta transformação:



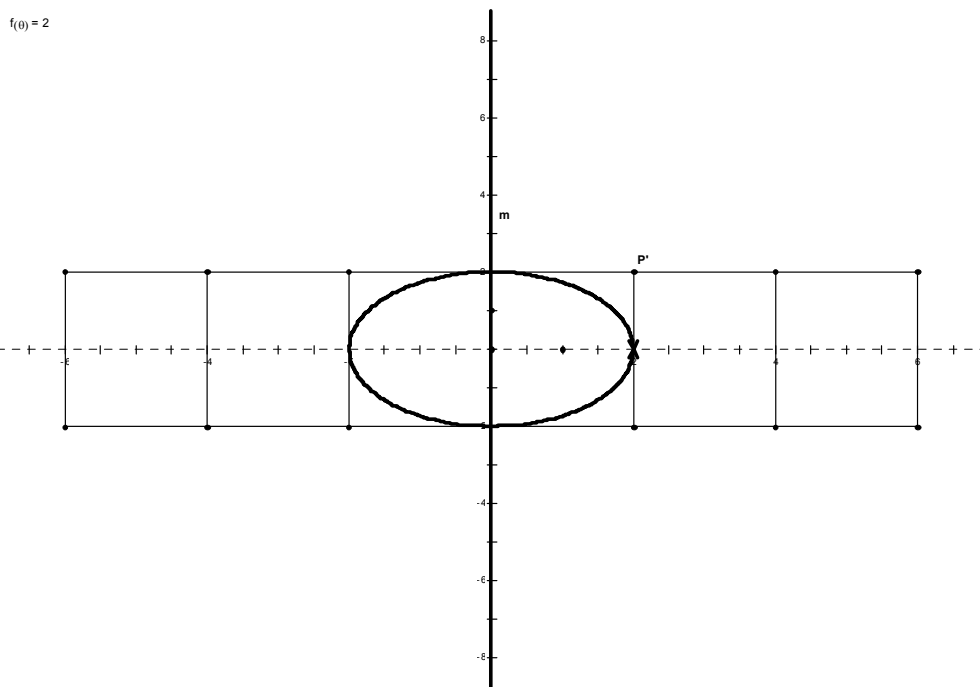
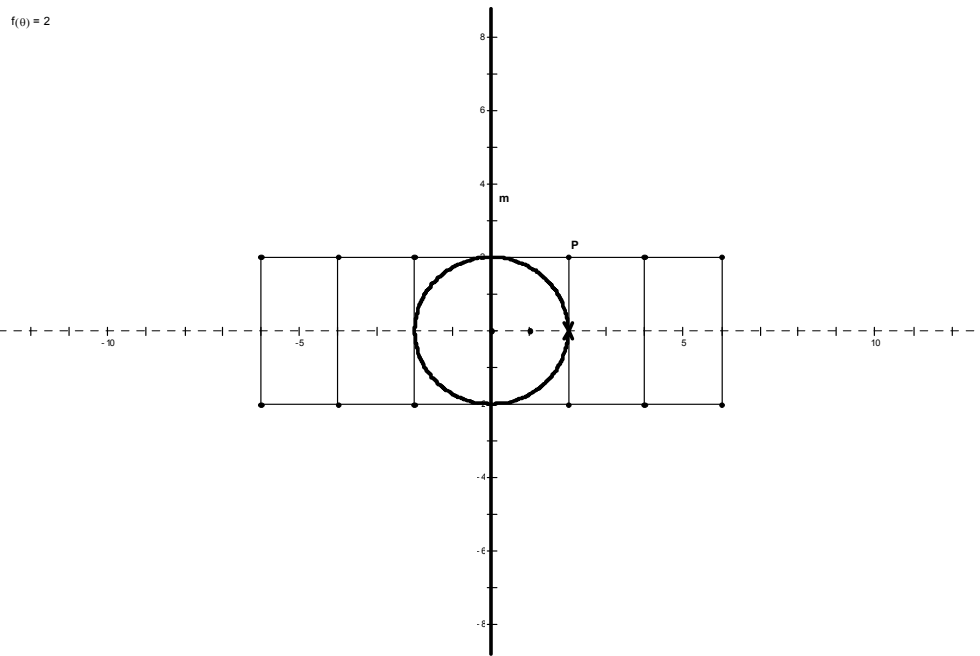
Um *strain*, \hat{T}_m (poderemos escrever apenas T_m se o contexto não permitir confusão com a notação para translações...) com eixo a recta m é a aplicação afim que fixa m e envia um ponto P em P' tal que $\overline{PP'} \perp m$. As figuras seguintes representam esta transformação;

Para um *shear* S_m com m o eixo dos xx , como na representação gráfica anterior e que indicamos por S_x , temos as seguintes equações : $x' = x + ky$, $y' = y$, a que corresponde a representação matricial

$$\begin{bmatrix} 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Analogamente, para um *strain* \hat{T}_x , com eixo xx (note que a representação gráfica seguinte é de \hat{T}_y) temos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



Em geral a representação matricial de S_m ou de \hat{T}_m pode ser obtida através de $S_m = SS_xS^{-1}$ (ou $T_m = ST_xS^{-1}$) em que S representa uma isometria directa enviando xx em m . Note-se que no caso particular de ser $k = -1$ temos que T_m é a reflexão R_m .

Exercício 52 *Escreva a representação matricial para S_y e \hat{T}_y .*

Temos agora a caracterização das transformações afin de \mathbb{R}^2 :

Teorema 53 *Toda a transformação afim se pode escrever como o produto de um shear, S_x , um strain, T_x , e uma similitude directa.*

Prova.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & -a_{21} & b_1 \\ a_{21} & a_{11} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & j & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

com $j = \frac{(a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22})}{(a_{11}^2 + a_{21}^2)}$, $k = \frac{(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})}{(a_{11}^2 + a_{21}^2)}$, não nulos porque $|A| \neq 0$

■

Exercício 54 *Verifique a prova anterior.*

Exercício 55 *Mostre que um um shear, S_x , se pode escrever como um produto de similitudes e strains.*

Pelo último exercício e pelo teorema anterior temos

Teorema 56 *Toda a transformação afim se pode escrever como um produto de strains e similitudes*

(Na verdade vale um resultado mais geral: o produto de um strain e uma similitude)

Exercício 57 *Consegue provar a versão mais geral do teorema?*

Por outro lado uma similitude é o produto de uma isometria e de uma homotetia (de centro 0); uma isometria é um produto de (não mais do que três...) reflexões, que são strains, e uma homotetia é o produto de dois strains. Temos, assim, a seguinte caracterização das transformações afim:

Teorema 58 *Uma transformação afim é um produto de strains.*

4.1 Exercícios de revisão e aplicação...

1. Determine as equações (ou a matriz) de uma transformação afim que envie os pontos $P(1, -1)$, $Q(2, 1)$, $R(3, 0)$ em $P'(0, 1)$, $Q'(1, 2)$, $R'(0, 3)$ respectivamente.
2. Se $P = (-2, -1)$, $Q = (1, 2)$ e $R = (3, -6)$, qual é a área do ΔPQR ? Quais são as áreas das imagens de ΔPQR pelas transformações α_k e β_k definidas no exercício seguinte?
3. Para um dado k , determine todos os pontos fixos e rectas fixas pelas transformações α_k e β_k que têm equações, respectivamente

$$\begin{cases} x' = kx \\ y' = y \end{cases} \quad \text{e} \quad \begin{cases} x' = x + ky \\ y' = y \end{cases}$$

4. Mostre que $\{\alpha_k : k \neq 0\}$ e $\{\beta_k\}$, α_k e β_k definidas no exercício anterior, formam grupos abelianos.
5. Determine as equações (a matriz) de
- Um *shear* com eixo $y = x$.
 - Um *strain* com eixo $x = 5$.
 - um *strain* de razão k e com eixo $y = mx$
6. Mostre que uma homotetia $D(C, k)$ é o produto de dois strains.
7. Diga, justificando, se as seguintes afirmações são verdadeiras ou são falsas:
- Uma transformação afim fica determinada pelas imagens de três pontos dados.
 - Se $\Delta ABC \cong \Delta DEF$, existe uma única transformação afim α tal que $\alpha(A) = D$, $\alpha(B) = E$ e $\alpha(C) = F$.
 - Se $\Delta ABC \sim \Delta DEF$, existe uma única transformação afim α tal que $\alpha(A) = D$, $\alpha(B) = E$ e $\alpha(C) = F$.
 - Dados dois triângulos, ΔABC e ΔDEF , existe uma única transformação afim α tal que $\alpha(\Delta ABC) = \alpha(\Delta DEF)$.
 - Strains e shears são equiafins.
 - Um shear é um produto de strains e similitudes.
 - Uma transformação afim é um produto de strains e similitudes.
 - Uma transformação afim é um produto de strains e isometrias.
 - Uma homotetia é um produto de strains; um strain é um produto de homotetias.
8. Suponha que uma transformação afim é o produto de um strain e uma similitude (ver exercício que segue um teorema anterior...). Mostre que, então, uma transformação afim é o produto de dois strains com eixos perpendiculares e uma isometria (Que os eixos perpendiculares não podem ser escolhidos arbitrariamente, vê-se no exercício seguinte).
9. Mostre que o shear de equações $x' = x + y$ e $y' = y$, não é o produto de strains com eixos os eixos coordenados seguidos de uma isometria.
10. Mostre que os shears não formam um grupo (e os strains?)
11. Prove as seguintes afirmações ou as suas negações:
- Os shears geram o grupo $Afim(\mathbb{R}^2)$.
 - Uma similitude equiafim é uma isometria.
 - Uma transformação afim *involuntiva* é uma reflexão ou um meio-giro.

4.2 Colineações

Sabemos da definição de aplicação afim (subsecção 1.1) que uma transformação afim $\alpha \in Afim(\mathbb{R}^n)$, envia rectas em rectas: se l é uma recta, então $l' = \alpha(l)$ é também uma recta (não degenerada...): α é, por isso, o que chamamos uma *colineação* (por que preserva a colinearidade). Haverá outras colineações para além das transformações afim? Pode-se mostrar que a resposta é não:

Teorema 59 *se $\alpha \in Bij(\mathbb{R}^n)$ é uma colineação então $\alpha \in Afim(\mathbb{R}^n)$.*

Podemos ver que o problema se reduz, sem dificuldade, ao caso de dimensão 2. Se $\alpha \in Bij(\mathbb{R}^n)$ é uma colineação e $\alpha(0) = A$, então $L = T_{-A}\alpha$ é também uma colineação e $L(0) = 0$; basta mostrar que L é linear:

$$L(\lambda a + \mu b) = \lambda L(a) + \mu L(b), \quad \forall a, b \in \mathbb{R}^n, \quad \forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$$

Sejam $a, b \in \mathbb{R}^n$, arbitrários; Seja $V = \langle a, b \rangle$ o subespaço de dimensão dois gerado pelos dois vectores e $V' = L(V)$. V' é também um subespaço de dimensão dois, gerado por $a' = L(a)$ e $b' = L(b)$: como, por hipótese, L é uma colineação, a recta $l = \overleftrightarrow{0a}$ é enviada na recta $l' = \overleftrightarrow{0a'}$ (o subespaço de dimensão 1 gerado por a') e a recta $m = \overleftrightarrow{0b}$ na recta $m' = \overleftrightarrow{0b'}$ (o subespaço de dimensão 1 gerado por b'). Dado $0 \neq c' \in V'$ seja c o ponto de V tal que $L(c) = c'$; como $c \neq 0$, existe uma recta n , por c , que intersecta $l \cup m$ em dois pontos e então $c' \in n' = L(n)$ que é uma recta que intersecta $l' \cup m'$ em dois pontos; reciprocamente se c' está numa recta por dois pontos de $l' \cup m'$ então $c' \in V'$. Concluimos então que V' consta da união de todas as rectas que passam por pontos de $l' \cup m'$ e portanto $V' = \langle a', b' \rangle$. Seja g um isomorfismo linear de \mathbb{R}^n que envie V' em V ; então gL é ainda uma colineação cuja restrição a V , $f = gL|_V$, é uma colineação de V ; supondo provado o teorema em dimensão 2, temos então que f é linear e portanto $L|_V = g^{-1}f : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ é também linear logo $L(\lambda a + \mu b) = \lambda L(a) + \mu L(b)$, $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

Exercício 60 *Estude e prepare uma exposição de uma prova do teorema em dimensão dois (consultando, por exemplo, [4, Capítulo15] : note que a definição de aplicação afim aí dada coincide com a nossa de colineação, mas, como verá, é apenas uma questão de palavras...)*

5 Grupos de simetria - introdução

Seja $X \subset \mathbb{R}^n$. $f \in Isom(\mathbb{R}^n)$ diz-se uma *simetria* de X se deixa X invariante: $f(X) = X$. O conjunto das simetrias de X , $S(X)$, é um grupo. Em geral consideramos apenas subconjuntos $X \subset \mathbb{R}^n$ que contêm $n+1$ pontos independentes afim, porque nesse caso, e só nesse, $S(X)$ coincide (isto é: é isomorfo) com o grupo $Isom(X)$.

Exercício 61 *Justifique a afirmação anterior.*

Exercício 62 Seja $l \subset \mathbb{R}^2$ uma recta; Mostre que $S(l) \leq I(\mathbb{R}^2)$ contém um subgrupo normal com dois elementos cujo quociente é isomorfo a $I(l) \simeq I(\mathbb{R})$. Conclua que $S(l)$ não é isomorfo a $I(l) \simeq I(\mathbb{R})$

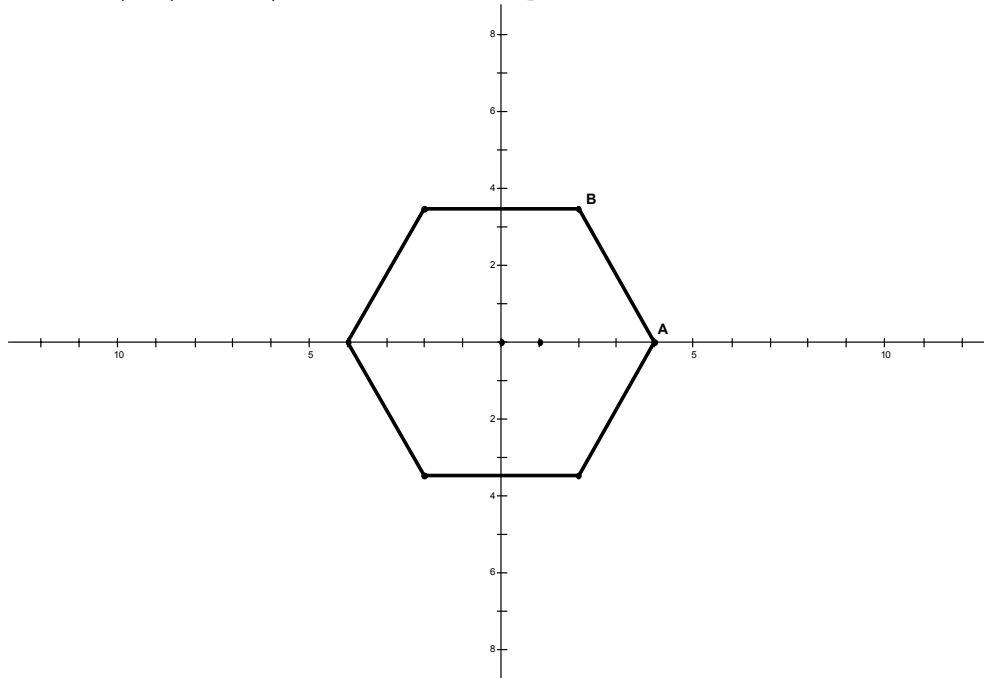
Exercício 63 Seja $X = \{(x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \cup \{(0, y) : \|y\| \leq 1\}$. Mostre que $S(X)$ é isomorfo ao grupo de Klein, $S(X) \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$, descrevendo, em particular, os três elementos não nulos.

5.1 Polígonos regulares

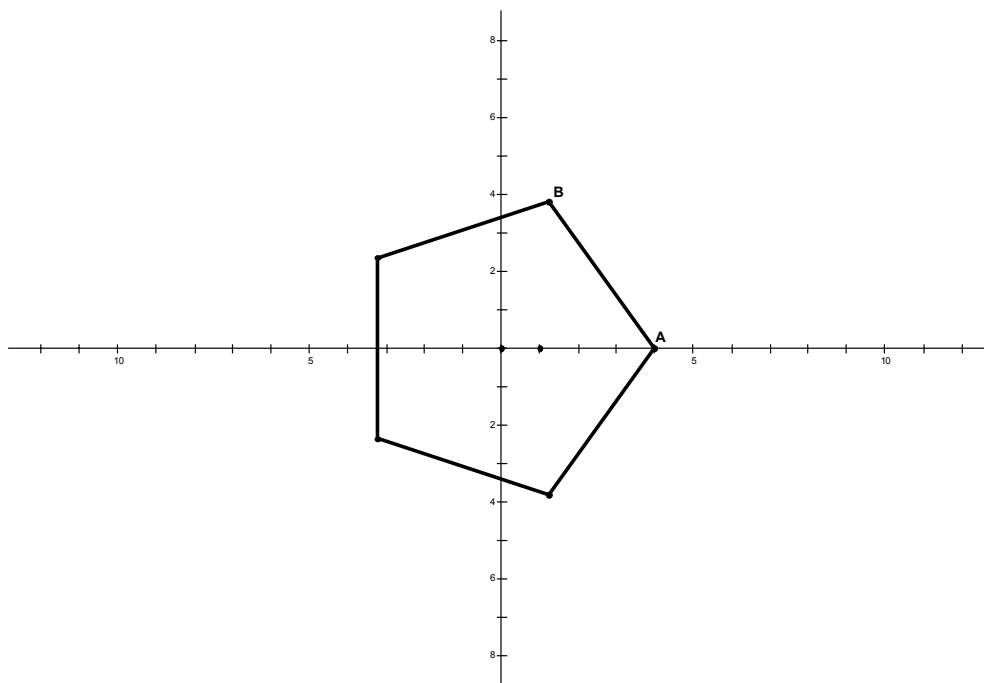
Um exemplo natural a analisar é o dos *polígonos regulares*: seja $P_n \subset \mathbb{R}^2$ um polígono regular com n lados; *spg* podemos supôr que o centroide de P_n (o centro do círculo circunscrito) é a origem das coordenadas e que um dos vértices está no semi-eixo positivo dos xx (ver figuras seguintes)

Exercício 64 Explique o sentido preciso da afirmação anterior, mostrando que $S(P_n)$ é conjugado a $S(P'_n)$, em que P'_n é um polígono de n lados na posição particular descrita.

A primeira observação é que P_n é claramente invariante por $\rho = R(0, 2\pi/n)$ e por $\sigma = R_x$ (reflexão no eixo dos xx), isto é, $\rho, \sigma \in S(P_n)$. Note-se que $\rho^n = \sigma^2 = 1$; é claro que, em $S(P_n)$, temos n rotações distintas, $\{\rho, \rho^2, \dots, \rho^n\} = \langle \rho \rangle$ e também n simetrias inversas distintas, $\rho\sigma, \rho^2\sigma, \dots, \rho^n\sigma$: temos assim, pelo menos, $2n$ simetrias distintas de P_n .



Por outro lado, se escolhermos uma das arestas de P_n , digamos \overline{AB} , uma simetria $s \in S(P_n)$ fica completamente determinada pela imagem de \overline{AB} , que será também uma aresta de P_n ; temos n escolhas possíveis para a imagem do vértice A e, para cada uma dessas, duas escolhas possíveis entre os vértices adjacentes a $s(A)$, para a imagem de B .



Temos portanto precisamente $2n$ simetrias de P_n , que são as que acabámos de descrever.

Ao grupo de simetrias do polígono regular de n lados chamamos *grupo diedral* (de 2 geradores) e designámo-lo por D_n ; este grupo contém, como subgrupo, o grupo cíclico de ordem n : $C_n = \langle \rho \rangle \simeq \mathbb{Z}_n$.

Em termos de *apresentações (finitas) de grupos* (ver [2]) temos:

$$\begin{aligned} D_n &= \langle \rho, \sigma \mid \rho^n, \sigma^2 \rangle \\ C_n &= \langle \rho \mid \rho^n \rangle \end{aligned}$$

Note-se que nos casos $n = 1$ e $n = 2$, que não correspondem a grupos de simetria de polígonos regulares, temos também

$$\begin{aligned} D_1 &= \langle \sigma \mid \sigma^2 \rangle \simeq C_2 \simeq \mathbb{Z}_2 \\ D_2 &= \langle \rho, \sigma \mid \rho^2, \sigma^2 \rangle \simeq \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \end{aligned}$$

Estes são ainda grupos de simetria de figuras do plano: os triângulo isósceles não equiláteros e os rectângulos não quadrados.

Os grupos cíclicos, $C_n, n \geq 1$, são também grupos de simetria de certas figuras:

Exercício 65 *Dê exemplo, para cada $n \geq 1$, de uma figura $F \subset \mathbb{R}^2$ (se possível, e por razões estéticas, um polígono convexo) tal que $S(F) \simeq C_n$.*

Dois casos de grupos diedrais que destacamos são D_3 , D_4 e D_5 , os grupos de simetria respectivamente do *triângulo equilátero*, do *quadrado* e do *pentágono*: no caso de D_3 , o argumento anterior que usámos para ver que temos precisamente $2n$ elementos em

D_n , mostra que D_3 é naturalmente isomorfo ao grupo das permutações dos vértices do triângulo que é o grupo simétrico S_3 . O grupo D_4 , também chamado grupo óptico é um dos três grupos (a menos de isomorfismo...) não abelianos com oito elementos. D_5 é único (a menos de isomorfismo...) grupo não abeliano de ordem 10.

Exercício 66 *Descreva os elementos de D_3 , D_4 e D_5 , em termos de reflexões e rotações de $I(\mathbb{R}^2)$ e exprima-os como produtos dos dois geradores, ρ e σ . Identifique em $D_3 \simeq S_3$ o (sub)grupo alterno, A_3 . Determine os centros destes grupos diedrais.*

5.2 Grupos finitos de isometrias do plano

O que é interessante é que os dois tipos de grupos de simetria dos polígonos esgotam os possíveis tipos de subgrupos finitos de $I(\mathbb{R}^2)$. É isso que afirma o teorema de Leonardo (da Vinci: ver [4, §8.2]):

Teorema 67 (Leonardo) *Todo o subgrupo finito de $I(\mathbb{R}^2)$ é cíclico ou diedral.*

Prova. *Seja $G \leq I(\mathbb{R}^2)$, finito e seja $a \in \mathbb{R}^2$, arbitrário. A órbita de a , $Orb(a) = Ga = \{ga : g \in G\}$, é finito, digamos com n elementos; seja $c = \sum_{g \in G} \frac{1}{n}ga$ o centroide dos n pontos da órbita. Dado $g \in G$, arbitrário, como g sendo isometria é aplicação afim, respeita a combinação linear anterior; mas como, por definição de órbita, $g(Orb(a)) = Orb(a)$, temos que $g(c) = c$, isto é, c é fixado por todas as isometrias de G . Da classificação das isometrias sabemos que se $g(c) = c$, então g é uma rotação em torno de c ou uma reflexão numa recta por c . O subgrupo de G das isometrias directas, G_d , consiste então num número finito de rotações de centro c . É fácil provar que G_d é cíclico, gerado pela rotação ρ de menor ângulo: $G_d = \langle \rho \rangle = \{\rho, \rho^2, \dots, \rho^n = 1\}$. Se $G = G_d \simeq C_n$ então G é cíclico; caso contrário contém m reflexões em rectas por c ; seja σ uma dessas reflexões: é fácil ver que $n = m$ e portanto que ρ e σ geram G , isto é, $G \simeq D_n$. ■*

Exercício 68 *Complete os detalhes da prova anterior, mostrando que G_d é cíclico e justificando a última afirmação.*

O exercício seguinte dá um argumento alternativo ao do centroide da prova anterior, para a existência do ponto fixo c .

Exercício 69 *Seja $G \leq I(\mathbb{R}^2)$. Mostre que G é infinito se contém uma rotação (não trivial) em torno de um ponto a e uma reflexão R_l tal que $a \notin l$. Mostre então que G é infinito se contém reflexões em três rectas não concorrentes. Conclua que se G é finito, então existe um ponto fixo por todas as isometrias de G .*

5.2.1 Exercícios de revisão e aplicação...

1. Diga se as seguintes afirmações sobre subgrupos de $I(\mathbb{R}^2)$ são ou não verdadeiras:
 - (a) Um grupo de isometrias com ordem 35 tem de ser cíclico.
 - (b) Todo o grupo de isometrias finito é grupo de simetria de algum polígono.

- (c) Todo o grupo de isometrias finito é grupo de simetria de algum polígono regular.
 - (d) Se um grupo de isometrias directas é finito, então é cíclico.
 - (e) Se um grupo de isometrias directas é cíclico e tem um ponto fixo então é finito.
2. Descreva os grupos finitos de isometrias tais que cada elemento do grupo fixa uma dada recta l . Descreva os grupos finitos de isometrias tais que cada elemento do grupo fixa um dado ponto P .
 3. Liste todos os grupos de simetria que são grupos de simetria de *quadriláteros* e para cada um desses grupos esboçe um quadrilátero do qual ele seja grupo de simetria.
 4. Se um polígono de n lados tem grupode simetria C_4 , o que pode afirmar sobre n ?

5.3 Acções de grupos - noções gerais

Os grupos de simetria $S(X), X \subset \mathbb{R}^n$, constituem um dos exemplos mais interessantes e úteis da noção de *acção de grupo*, de que damos agora a definição e propriedades gerais.

Dado um grupo G e um conjunto X , uma acção de G sobre X é uma função

$$\begin{aligned} * : G \times X &\longrightarrow X \\ (g, x) &\longrightarrow g * x \end{aligned}$$

que verifica as seguintes propriedades (por facilidade de notação, indicamos simplesmente a acção por justaposição: $g * x = gx$) : sendo e o elemento neutro de G

1. $ex = x, \forall x \in X$
2. $(g_1g_2)x = g_1(g_2x), \forall x \in X, \forall g_1, g_2 \in G$

Diz-se que G *age em* X e que X é um G -conjunto (G -cjt).

Para cada $g \in G$, temos definida uma função $f_g : X \longrightarrow X$ definida por $f_g(x) = gx$. Dar uma acção de G em X equivale a dar uma família de funções, indexada por G , $\{f_g : X \longrightarrow X\}_{g \in G}$ tal que a composição de funções corresponde ao produto em G :

$$\begin{aligned} f_e &= id_X \\ f_{ab} &= f_a \circ f_b, \forall a, b \in G \end{aligned}$$

No caso de X ser um espaço métrico e $G \leq Isom(X)$, como o produto em G é dado pela composição de funções e o elemento neutro é id_X , temos naturalmente uma acção de G em X em que a cada $g \in G$ associamos a função de X em X que é o próprio g : $f_g(x) = g(x) = gx$ (neste caso a simplificação de notação por justaposição coincide com a que já introduzimos para abreviar a notação para as imagens por uma função). Outro exemplo útil e análogo é o de subgrupos de homeomorfismos: $G \leq Homeo(X)$.

Dado um G -cjt X , a relação \sim definida em X por $x \sim y \Leftrightarrow \exists g \in G : gx = y$ é uma relação de equivalência;

Exercício 70 Prove a afirmação anterior.

As classes de equivalência, $[a]$, para esta relação dizem-se as *órbitas da acção* e temos para cada $a \in X$, $[a] = Orb(a) = Ga = \{ga : g \in G\}$ (O nome de *órbita* tem um sentido dinâmico e vem precisamente dos exemplos de acções por grupos de isometrias ou de homeomorfismos, em que a órbita de um ponto consiste das suas imagens pelas isometrias, ou homeomorfismos, do grupo)

Dado $x \in X$, definimos o *subgrupo de isotropia* (ou *estabilizador*) de x como o conjunto dos elementos de G que fixam x na acção: $Stab(x) = G_x = \{g \in G : gx = x\}$

Exercício 71 Verifique que $Stab(x) = G_x$ é de facto um subgrupo de G .

Exercício 72 Seja X um G -cjt, G finito. Mostre que para cada $x \in X$, o número de elementos da sua órbita é igual ao índice do seu estabilizador: $|Gx| = [G : G_x]$.

Exercício 73 Dê exemplo de um G -cjt X e de $x \in X$ tal que $Stab(x)$ não seja subgrupo normal (sugestão: use D_4)

Vamos estudar de seguida grupos de simetria e acções de grupo no espaço tridimensional, mas antes precisamos, tal como para o plano, de ter uma classificação das isometrias.

6 Isometrias de \mathbb{R}^3

Recorde-se, da secção 1, que uma isometria $f \in I(\mathbb{R}^3)$ se pode escrever como produto de, no máximo, 4 reflexões R_H em (hiper)planos H . Vamos começar por descrever sete tipos de isometrias de \mathbb{R}^3 e só depois provar que esses sete tipos esgotam de facto todas as possibilidades:

1. Translações

2. **rotações**: seja l uma recta orientada em \mathbb{R}^3 ; $R(l, \alpha)$ designa a rotação de eixo l e ângulo α , que fixa l e roda cada plano ortogonal a l e orientado com l de acordo com a regra do saca-rolhas, em torno do ponto de intersecção de um ângulo α . É claro que se l' designa a recta l com a orientação oposta, $R(l, \alpha) = R(l', -\alpha)$. No caso de l ser o eixo dos zz , $R(l, \alpha) \in SO(3)$ e tem matriz

$$\begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3. **Parafusos**: são as compostas $T_a R(l, \alpha) = R(l, \alpha) T_a$ em que $a \parallel l$.

Exercício 74 Na definição de parafuso dada, $a \parallel l$. Mostre que, em geral, a composição $T_a R(l, \alpha)$ é um parafuso, excepto se $a \perp l$, caso em que é ainda uma rotação $R(m, \alpha)$ com $m \parallel l$.

4. **Reflexões:** R_H , H um plano.

5. **Reflexões deslizantes:** são as compostas $T_a R_H = R_H T_a$, em que $a \parallel H$.

Exercício 75 Na definição anterior, $a \parallel H$. Mostre que, em geral, $T_a R_H$ é uma reflexão deslizante, excepto se $a \perp H$, caso em que é uma reflexão, $R_{H'}$. com $H' \parallel H$. O que acontecerá no caso geral com $R_H T_a$?

6. **Reflexões rotativas:** são as compostas $R_H R(l, \alpha) = R(l, \alpha) R_H$, em que $l \perp H$. Um caso particular importante é quando $\alpha = \pi$; nesse caso, esta isometria também se chama **Inversão** no ponto $a = l \cap H$, com notação I_a : envia cada ponto b no ponto c tal que a é ponto médio do segmento \overline{bc} . Quando $a = 0$, então $I_a \in O(3)$ e tem matriz diagonal com os elementos da diagonal todos iguais a -1 . A inversão em a é o produto das reflexões em três quaisquer planos mutuamente ortogonais cuja intersecção seja esse ponto.

Exercício 76 Prove a última afirmação (pode talvez usar a fórmula para a reflexão num (hiper)plano, deduzida num exercício anterior)

6-a Uma **Inversão Rotativa** é a composta de uma rotação de eixo l e de uma inversão num ponto $a \in l$. Claro que temos $R(l, \alpha) I_a = I_a R(l, \alpha)$.

Exercício 77 Mostre que toda a inversão rotativa é uma reflexão rotativa (incluindo o caso particular das reflexões como reflexões rotativas de ângulo 0) e vice-versa.

Exercício 78 Na definição de reflexão rotativa exigimos que $l \perp H$. Mostre que, em geral, desde que $l \not\subset H$ (seja ou não ortogonal), $R_H R(l, \alpha)$ é ainda uma reflexão rotativa. E $R(l, \alpha) R_H$? E o que acontecerá no caso em que $l \subset H$?

Note-se que destas isometrias, as três primeiras são isometrias directas e as outras inversas.

Teorema 79 Toda a isometria de \mathbb{R}^3 é de um dos seis tipos anteriores.

Exercício 80 Prove o teorema anterior, analisando os vários casos de acordo com o número mínimo de reflexões em planos necessários para escrever as isometrias $f \in I(\mathbb{R}^3)$ (Sugestão: no caso de termos quatro reflexões, distinga dois casos: f ter ou não um ponto fixo; se f tem um ponto fixo então escreve-se como o produto de no máximo três reflexões, mas como estamos a supor que f é directa então será o produto de duas reflexões; se f não tem um ponto fixo, considere $T_a f$ com um ponto fixo...)

Note-se que entre as isometrias directas descritas, apenas as rotações têm pontos fixos, que constituem o eixo, isto é, se uma isometria directa de \mathbb{R}^3 tem um ponto fixo então tem uma recta fixa; este facto é frequentemente referido dizendo que "toda a rotação tem um eixo".

Exercício 81 *Mostre que o produto de duas inversões é uma translação e que, reciprocamente, uma translação é o produto de duas inversões em que um dos pontos pode ser fixado arbitrariamente.*

Exercício 82 *Mostre que o produto de três inversões é uma inversão e que $I_A I_B I_C = I_C I_B I_A = I_D$, em que $\square ABCD$ é um paralelogramo se A, B, C não são colineares.*

Exercício 83 *Mostre que o produto de duas rotações, $R(l, \alpha), R(m, \beta)$ é uma rotação ou translação (quando $\alpha + \beta = 2\pi$), uma rotação ou um parafuso conforme as rectas l e m são, respectivamente, paralelas, concorrentes ou enviesadas ("Skew" em inglês); mostre que, reciprocamente, uma translação, uma rotação ou um parafuso se podem obter como produto de duas rotações de ângulo π (meios-giros)*

6.1 Similitudes de \mathbb{R}^3

O estudo das similitudes que fizemos no caso de \mathbb{R}^2 , adapta-se de imediato ao caso de dimensão 3 para dar uma classificação das similitudes de \mathbb{R}^3 , a partir da classificação das isometrias que acabámos de fazer; recordemos que toda a similitude, $f \in Sim(\mathbb{R}^3)$, se escreve como $f = T_a D(0, k) L$, com $L \in O(3)$ e se $0 < k \neq 1$ tem um ponto fixo, que é único: a primeira prova deste facto dada na secção 3 é válida em todas as dimensões e a segunda, baseada no conceito de dilatação, pode ser facilmente adaptada ao espaço.

Temos assim, de modo análogo ao de \mathbb{R}^2 , que uma similitude de \mathbb{R}^3 que não é uma isometria, com ponto fixo C , se escreve como $D(C, k)g$ em que g é uma isometria que tem C como ponto fixo: assim, considerando as isometrias de \mathbb{R}^3 que têm pontos fixos, somos conduzidos à seguinte classificação:

1. *Isometrias* (de seis tipos)
 2. *Esticções* (homotetias): $D(C, k)$
 3. *Rotações esticadas*: $D(C, k)R(l, \alpha) = R(l, \alpha)D(C, k)$, com $C \in l$
 4. *Reflexões esticadas*: $D(C, k)R_H = R_H D(C, k)$, com $C \in H$
 5. *Reflexões rotativas esticadas*: $D(C, k)R_H R(l, \alpha) = R_H R(l, \alpha)D(C, k)$, com $l \perp H$ e $C = l \cap H$.
- 5' *Inversões rotativas esticadas*, $D(C, k)I_C R(l, \alpha)$ como uma "variação" do caso anterior.

Neste caso, podemos dar uma versão mais elegante e simples da classificação em termos de inversões, já que as reflexões são um caso particular de inversão rotativa, quando a rotação é um meio-giro: assim toda a similitude que não é uma isometria é um *esticção*, uma *rotação esticada* ou uma *inversão rotativa esticada*.

Nota: Por vezes define-se um *esticção generalizado* $D(C, s)$, considerando também valores negativos de s , por: $D(C, s) = I_C D(C, -s) = D(C, -s) I_C$ se $s < 0$; nesse caso chamamos simplesmente *rotação esticada* a $D(C, s)R(l, \alpha)$, englobando então as inversões rotativas esticadas (é nestes termos que aparece a classificação em [4, §16.2]).

6.2 Exercícios de revisão e aplicação...

1. Considere $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (1 - y, x + 1, z + 1)$. Mostre que f é uma isometria, indicando, em particular, a sua parte ortogonal; classifique e descreva f indicando, em particular, pontos fixos e rectas invariantes.
2. Idem para $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dada por $f(x, y, z) = (z + 3, y + 2, 1 - x)$.
3. Mostre que os seis tipos de isometrias de $I(\mathbb{R}^3)$ são de facto diferentes.
4. Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:
 - (a) Um produto de quatro reflexões é um produto de duas reflexões.
 - (b) Uma isometria com três pontos fixos é uma reflexão.
 - (c) Um produto de duas rotações pode ser um parafuso.
 - (d) Um produto de dois parafusos pode ser uma rotação.
 - (e) Um parafuso seguido de uma inversão é outro parafuso.
5. Que isometrias são involuções? Que similitudes são involuções?
6. Uma *dilatação* é uma *colineação* α (ver secção 4.2) tal que para toda a recta l , $l \parallel \alpha(l)$. Diga quais as similitudes que são dilatações.
7. Descreva $R_H I_P$ quando $P \notin H$.
8. Se α é uma similitude, τ uma translação, σ uma rotação e η um parafuso, então $\alpha\tau\alpha^{-1}$ é uma translação, $\alpha\sigma\alpha^{-1}$ uma rotação e $\alpha\eta\alpha^{-1}$ um parafuso.
9. Que similitudes comutam com um parafuso?
10. Determine uma condição necessária e suficiente para uma translação T e uma rotação R comutarem.
11. Prove as seguintes afirmações ou as suas negações:
 - (a) A isometria $R_H R(l, \alpha)$ é uma reflexão deslizante sse $l \parallel H$ e $l \not\subset H$.

- (b) A isometria $R(l, \alpha)I_a$ é uma reflexão deslizante sse $a \notin l$.
- (c) Uma rotação $R(l, \alpha)$ deixa invariante o plano H sse $l \perp H$.
- (d) Toda a isometria é produto de isometrias de ordem 4.

12. Porque é que um *espelho* troca direita e esquerda mas não topo e base?

7 Quaterniões e rotações

Entre as isometrias de \mathbb{R}^3 as rotações têm especial importância: como vimos, todas as isometrias directas se podem obter como produto de rotações; para além disso são essenciais em certas descrições da Física. As rotações estão intimamente ligadas à estrutura algébrica dos *quaterniões*, \mathbb{H} (de Hamilton, seu inventor -16/10/1843, embora se saiba que Gauss já teria descoberto esta estrutura em 1820...). Os quaterniões têm, por isso, muitas aplicações, em particular em aplicações computacionais para realidade virtual (ver [8]).

Recorde-se que se f é uma isometria directa de \mathbb{R}^3 tal que $f(0) = 0$, então f é uma rotação e $f \in SO(3)$: as isometrias directas que fixam a origem são precisamente as rotações, que constituem o grupo $SO(3)$. Já vimos que toda a rotação tem um eixo; podemos ver de novo esse facto, verificando que se M é matriz de $f \in SO(3)$ (relativamente a uma qualquer base ortonormada), isto é, M é ortogonal e $\det(M) = +1$, então $\lambda = +1$ é *valor próprio* de M e portanto os *vectores próprios* associados ficam fixos, $Mv = \lambda v = v$, constituindo um *eixo*. Vejamos: como $M^{-1} = M^t$, temos

$$\begin{aligned} \det(M - I) &= \det(M - I) \det M^t = \det((M - I)M^t) \\ &= \det(I - M^t) = \det(I - M)^t = \det(I - M) \\ &= -\det(M - I) \end{aligned}$$

(Como $\det(-A) = (-1)^n \det A$ e neste caso $n = 3$, temos a última igualdade) Então $\det(M - I) = 0$, ou seja, $\lambda = +1$ é valor próprio.

Seja $f \in SO(3)$ e seja a um *vector unitário* tal que $fa = a$ (a é portanto um vector próprio, gerador do eixo da rotação). Se escolhermos uma base ortonormal $\{a, b, c\}$ a matriz relativamente a esta base será

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & -\sin \theta \\ 0 & \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix}$$

em que θ é o ângulo de rotação.

Nota: É claro que podemos fazer algo análogo para o caso de $f \in O(3)$ ser uma *reflexão rotativa*, a única diferença sendo um -1 em vez do 1 na matriz anterior.

Vejamos, com um exemplo, como se pode determinar o eixo e ângulo de rotação de uma rotação, encontrando uma representação matricial nesta forma.

Exemplo 84 Seja f dada, relativamente à base canónica, por

$$M = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Verifica-se de imediato que M é ortogonal especial (representa uma rotação obtida simplesmente por permutação dos vectores da base canónica). Para encontrar a unitário tal que $Ma = a$:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 \\ a_3 \\ a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \Leftrightarrow a_1 = a_2 = a_3$$

Podemos então tomar $a = \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1) = \frac{1}{\sqrt{3}}(i + j + k)$. Construímos de seguida uma base ortonormal $\{a, b, c\}$: se $b = (b_1, b_2, b_3)$, $a \perp b \Leftrightarrow (1, 1, 1) \perp (b_1, b_2, b_3) \Leftrightarrow b_1 + b_2 + b_3 = 0$; podemos então tomar $b = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0)$; finalmente o terceiro poderá ser $c = a \times b = \frac{1}{\sqrt{6}}(1, 1, -2)$. Escrevemos a matriz da transformação relativamente à nova base $\{a, b, c\}$. A matriz de mudança de base é

$$U = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} & 0 & \frac{-2}{\sqrt{6}} \end{bmatrix} = [a \mid b \mid c]$$

A matriz procurada será então $U^{-1}MU = U^tMU$. Fazendo os cálculos obtemos

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{bmatrix}$$

Comparando com a forma anterior temos: $\cos \theta = -1/2 \Leftrightarrow \theta = -2\pi/3$.

Nota: Podemos também calcular o valor do ângulo de rotação, através do traço da matriz dada, $\text{tr}(M)$:

$$\text{tr}(M) = 1 + 2 \cos \theta$$

De facto $\text{tr}(BA) = \text{tr}(AB)$, logo $\text{tr}(U^{-1}MU) = \text{tr}(MUU^{-1}) = \text{tr}(M)$ e $\text{tr}(U^{-1}MU) = 1 + 2 \cos \theta$. No exemplo, $\text{tr}(M) = 0$, logo $\cos \theta = -1/2$, como já tínhamos visto.

Nota: Podemos fazer algo análogo para reflexões rotativas, substituindo 1 por -1 .

Os quaterniões resultam de se adicionar ao espaço vectorial real \mathbb{R}^4 , com a sua soma usual de vectores, um produto que o transforma numa *algebra de divisão não-comutativa* (se não conhece ou não se lembra da definição, consulte [2]). A ideia inicial de Hamilton era procurar um produto que preservasse as distâncias à semelhança do que acontece em $\mathbb{R}^2 \equiv \mathbb{C}$ com o produto de complexos, cujo módulo é o produto dos módulos: $|XY| = |X||Y|$.

Nota: Sabe-se hoje que os únicos \mathbb{R}^n em que existe tal produto são os casos $n = 1$ (os reais), $n = 2$ (os complexos), $n = 4$ (os quaterniões, que definiremos já a seguir) e ainda $n = 8$ (os *octoniões* ou *números de Cayley* - do seu inventor, Arthur Cayley) (Uma diferença fundamental entre os quaterniões e os octoniões é que o produto dos primeiros é associativo e o dos segundos não...)

Considere-se então

$$\mathbb{R}^4 = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 = \{(\alpha, a) : \alpha \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}^3\} = \mathbb{H}, \langle \mathbb{H}, +, \cdot \rangle$$

com a soma usual, $(\alpha, a) + (\beta, b) = (\alpha + \beta, a + b)$ e o produto, que indicaremos apenas por justaposição, definido por

$$(\alpha, a)(\beta, b) = (\alpha\beta - a \cdot b, \alpha b + \beta a + a \times b)$$

em que $a \cdot b$ representa o *produto interno* dos vectores e $a \times b$ o *produto externo*.

Notação: se $q \in \mathbb{H}$, $q = (\alpha, a)$, dizemos que α é a *parte real* (ou *temporal*), $\alpha = R(q)$ e que a é a *parte imaginária* (ou *espacial*), $a = I(q)$. Assim

$$\begin{aligned} \mathbb{R} &\equiv \{(\alpha, 0) : \alpha \in \mathbb{R}\} = \mathcal{R} \\ \mathbb{R}^3 &\equiv \{(0, a) : a \in \mathbb{R}^3\} = \mathcal{I} \end{aligned}$$

ou seja, identificamos o espaço tridimensional aos *quaterniões imaginários puros*, \mathcal{I} .

Outra forma, mais usual, de introduzir os quaterniões é a seguinte: designando por $\{1, i, j, k\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$, como espaço vectorial real, e escrevendo $q = (\alpha, a) = t + (xi + yj + zk)$, $q' = (\alpha', a') = t' + (x'i + y'j + z'k) \in \mathbb{H}$, definimos a soma da forma usual

$$q + q' = (t + t') + (x + x')i + (y + y')j + (z + z')k$$

e o produto de forma a ser bilinear com \mathbb{R} *central* (isto é, os reais comutando com todos os elementos)

$$qq' = \dots \text{escreva!}$$

Assim o produto fica determinado indicando simplesmente os vários produtos

$$i^2, j^2, k^2, ij, ji, ik, ki, jk, kj$$

Exercício 85 *Mostre que estabelecendo a relação fundamental para o produto*

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$$

se obtém uma definição equivalente à anterior. Sugestão: comece por mostrar que se tem

$$ij = -ji = k, \quad jk = -kj = i, \quad ki = -ik = j$$

Terá sido aquela relação fundamental que Hamilton gravou, no momento com a excitação da descoberta, numa pedra: ver a citação de Hamilton no começo do capítulo 9 de [3].

Uma descrição alternativa e útil do produto de quaterniões é considerar as matrizes complexas 2×2 , $M(2, \mathbb{C})$, da forma

$$M_q = \begin{bmatrix} z & w \\ -\bar{w} & \bar{z} \end{bmatrix}$$

em que \bar{z} representa o *complexo conjugado* de z . Identificando $\mathbb{R}^4 \equiv \mathbb{C} \times \mathbb{C}$, um quaterniões $q = t + xi + yj + zk$ identifica-se ao par de complexos (z, w) em que $z = t + xi$ e $w = y + zi$ (em termos de produto de quaterniões, e atendendo às relações fundamentais, temos que $q = z + wj$). Identificamos então q à matriz M_q .

Exercício 86 *Mostre que o produto das matrizes M_q corresponde ao produto de quaterniões, isto é*

$$M_{q_1 q_2} = M_{q_1} M_{q_2}$$

É claro que a soma destas matrizes também corresponde à soma de quaterniões, e como o produto de matrizes é distributivo e associativo, temos verificadas essas propriedades para o produto de quaterniões.

7.1 Conjugados e inversos:

É claro que um quaterniões $q = (\alpha, a) = t + (xi + yj + zk)$, como elemento de \mathbb{R}^4 , tem a norma $\|q\|$ (ou módulo $|q|$) usual:

$$|q|^2 = \alpha^2 + |a|^2 = t^2 + x^2 + y^2 + z^2$$

Tal como em \mathbb{C} , temos a noção de *conjugado*, que tem relações análogas com a norma e os inversos: o conjugado de $q = (\alpha, a)$ é $\bar{q} = (\alpha, -a)$. É claro que $q\bar{q} = \bar{q}q = |q|^2$.

O inverso de um quaterniões $q \neq 0$ é dado por

$$q^{-1} = \frac{1}{|q|^2} \bar{q}$$

É fácil verificar que

$$\overline{q_1 + q_2} = \bar{q}_1 + \bar{q}_2, \quad \overline{q_1 q_2} = \bar{q}_2 \bar{q}_1$$

ou seja, a conjugação inverte a ordem do produto. Temos então que

$$\begin{aligned} |q_1 q_2|^2 &= q_1 q_2 \bar{q}_1 \bar{q}_2 = q_1 q_2 \bar{q}_2 \bar{q}_1 = \\ &= q_1 |q_2|^2 \bar{q}_1 = q_1 \bar{q}_1 |q_2|^2 = |q_1|^2 |q_2|^2 \end{aligned}$$

em que a quarta igualdade vem do facto de $|q_2|^2$ ser real e por isso comutar com todos os quaterniões. Temos assim a *lei do módulo* para \mathbb{H} :

$$|q_1 q_2| = |q_1| |q_2|$$

Note-se que a lei do módulo podia também ser obtida de imediato a partir da representação matricial: de facto $|q| = \det M_q$ e o determinante do produto de matrizes é o produto dos determinantes, $\det(AB) = (\det A)(\det B)$.

7.2 Quaterniões unitários:

Um quaternião unitário é um quaternião de norma 1. O conjunto dos *quaterniões unitários* identifica-se naturalmente à *esfera tridimensional*

$$S^3 = \{q \in \mathbb{R}^4 : \|q\| = 1\}$$

Da lei do módulo temos que este espaço é um *grupo* para o produto, dito $Sp(1)$ (de "*spin*", conceito da física (quântica) em que estes grupos têm grande relevância)

Exercício 87 Mostre que $S^3 \equiv Sp(1)$ contém como subgrupo (não comutativo)

$$Q = \{\pm 1, \pm i, \pm j, \pm k\}$$

Este grupo, dito *quaterniônico*, é um dos três grupos (a menos de isomorfismo) não abelianos, com 8 elementos (outro que já vimos é D_4)

Se $|q| = 1$, podemos escrever q na forma $q = \cos \theta + (\sin \theta)n$, em que $\cos \theta$ é a sua parte real e $(\sin \theta)n$ a sua parte imaginária, sendo n um imaginário puro unitário; é claro que os *imaginários puros unitários* se identificam naturalmente à esfera de dimensão dois:

$$S^3 \cap \mathcal{I} = \{(0, a) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 : \|a\| = 1\} \equiv S^2$$

Exercício 88 Mostre que $q \in \mathbb{H}$ verifica $q^2 = -1$ se e só se q é um imaginário puro unitário;

Portanto em \mathbb{H}

$$\sqrt{-1} = S^2$$

e temos assim que o polinómio $x^2 + 1$ tem um número infinito (mesmo não numerável) de zeros (o que contrasta com o que se passa com os polinómios com coeficientes num corpo, em que o número de zeros é menor ou igual ao grau)

Mais geralmente podemos escrever qualquer quaternião na sua *forma polar*

$$\begin{aligned} q &= \rho(\cos \theta + n \sin \theta) \\ \rho &= |q| \\ n^2 &= -1 \Leftrightarrow n \in S^2 \end{aligned}$$

O ângulo θ é dito o *argumento* de q , e, tal como no caso complexo, $q \in \mathcal{R}$ sse $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$.

Exercício 89 Se q é um quaternião que escrito na forma polar é $q = \rho(\cos \theta + n \sin \theta)$, defina \mathbb{C}_q como o subespaço vectorial de dimensão 2 de \mathbb{R}^4 gerado por 1 e n : é claro que \mathbb{C} e \mathbb{C}_q são naturalmente isomorfos através da correspondência $a + bi \leftrightarrow a + bn$. Considere o comutador de dois quaterniões, $[q, q'] = qq' - q'q$; como se sabe, q e q' comutam sse $[q, q'] = 0$.

Mostre que $\overline{[q, q']} = -[q, q']$ e que $[q, q'] \in \mathcal{I}$. Deduza que q, q' comutam sse um deles é real ou se $q' \in \mathbb{C}_q$.

7.3 Acção de grupo de S^3 em \mathbb{R}^3

Seja q um quaternião unitário, $q \in S^3$; então $\bar{q} = q^{-1}$. A conjugação por q é a aplicação

$$\begin{aligned} C_q : \mathbb{H} &\longrightarrow \mathbb{H} \\ p &\longrightarrow qp\bar{q} \end{aligned}$$

Exercício 90 Mostre que C_q é uma isometria de \mathbb{H} .

Note-se que C_q restrita a \mathcal{R} é a identidade, já que os reais comutam com todos os elementos de \mathbb{H} . O que acontecerá com a restrição a $\mathcal{I} \cong \mathbb{R}^3$? Temos o seguinte teorema:

Teorema 91 Seja $C_q : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ a conjugação por q . Então

1. Se $p \in \mathcal{I}$, $C_q(p) \in \mathcal{I}$.
2. Se $q = \cos \theta + (\sin \theta)n$, C_q restrita a $\mathcal{I} \cong \mathbb{R}^3$ representa uma rotação de ângulo 2θ e eixo gerado por n .
3. Toda a rotação pode ser representada por C_q para algum q e $C_{q_1} = C_{q_2}$ sse $q_1 = \pm q_2$.
4. O produto de rotações corresponde ao produto de quaterniões: $C_{q_1 q_2} = C_{q_1} C_{q_2}$.

Prova. 1. É fácil verificar que C_q é um homomorfismo de anel. Recorde-se que se $p \in \mathbb{H}$, $p + \bar{p} = 0 \Leftrightarrow p \in \mathcal{I}$; note-se que

$$\overline{C_q(p)} = \overline{qp\bar{q}} = \bar{q} \overline{qp} = q\bar{p} \bar{q} = C_q(\bar{p})$$

e portanto

$$\overline{C_q(p)} + C_q(p) = C_q(\bar{p}) + C_q(p) = C_q(p + \bar{p})$$

Então, $p \in \mathcal{I} \Rightarrow C_q(p + \bar{p}) = C_q(0) = 0 \Rightarrow C_q(p) \in \mathcal{I}$. Concluímos assim que a restrição de C_q aos imaginários puros define uma isometria

$$\begin{array}{ccc} C_q : \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{\cong} & \mathbb{R}^3 \\ \parallel & & \parallel \\ \mathcal{I} & & \mathcal{I} \end{array}$$

e como $C_q(0) = 0$, $C_q \in O(3)$; na verdade $C_q \in SO(3)$ como veremos.

2. Se $q = \cos \theta + (\sin \theta)n$, $n \in S^2 \subset \mathbb{R}^3 \cong \mathcal{I}$, escolha-se uma base ortonormal de \mathbb{R}^3 cujo primeiro vector seja precisamente n : $\{n_i, n_j, n_k\}$, $n_i = n$; verifica-se facilmente a partir da primeira definição do produto, dada em termos dos produtos escalar e vectorial, que uma base ortonormal de imaginários puros verifica as mesmas relações fundamentais que $\{i, j, k\}$: por isso, para simplificar a notação designamos n_i, n_j, n_k por i, j, k respectivamente.

Calculando, obtemos

$$\begin{aligned}
C_q(i) &= (\cos \theta + (\sin \theta)i) i (\cos \theta - (\sin \theta)i) = \\
&= (\cos^2 \theta)i - \sin \theta \cos \theta - (\cos \theta \sin \theta)i^2 + (\sin^2 \theta)i = i \\
C_q(j) &= (\cos \theta + (\sin \theta)i) j (\cos \theta - (\sin \theta)i) = \\
&= ((\cos \theta)j + (\sin \theta)k)(\cos \theta - (\sin \theta)i) = \\
&= (\cos^2 \theta)j + (\sin \theta \cos \theta)k - (\sin \theta \cos \theta)(-k) - (\sin^2 \theta)j = \\
&= (\cos 2\theta)j + (\sin 2\theta)k \\
C_q(k) &= \dots = \\
&= (\cos 2\theta)k - (\sin 2\theta)j
\end{aligned}$$

Portanto a matriz de C_q relativamente àquela base será

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ & \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$$

isto é, C_q é uma rotação de ângulo 2θ em torno do eixo n . Em particular, vemos também que $C_q \in SO(3)$.

3. É claro do ponto anterior que uma qualquer rotação de eixo gerado por $n \in S^2$ e ângulo φ , pode ser obtida como C_q em que $q = \cos \theta + (\sin \theta)n$ e $\theta = \varphi/2$. Antes de provar a segunda afirmação vejamos primeiro a prova de 4.

4. Decorre de um cálculo rotineiro:

$$\begin{aligned}
C_{q_1 q_2}(p) &= q_1 q_2 p \overline{q_1 q_2} = q_1 q_2 p \overline{q_2} \overline{q_1} = \\
&= q_1 C_{q_2}(p) \overline{q_1} = C_{q_1}(C_{q_2}(p))
\end{aligned}$$

Concluimos assim que a conjugação, C , define um homomorfismo de grupos

$$C : S^3 \longrightarrow SO(3)$$

Ora se $q = \cos \theta + (\sin \theta)n$, $C_q = id$ se e só se $2\theta \equiv 0 \pmod{2\pi}$, ou seja $\theta = 0$ ou $\theta = \pi$, e portanto $q = \pm 1$. Temos assim que o núcleo do homomorfismo é $\ker C = \{1, -1\}$. Podemos agora concluir a prova do ponto 3.: por definição de núcleo, temos que, para cada $q \in S^3$, o conjunto dos elementos que têm a mesma imagem que q é $C^{-1}(C(p)) = \{pk : k \in \ker C\} = \{q, -q\}$. ■

Em consequência da prova do teorema anterior, podemos enunciar o seguinte teorema:

Teorema 92 A conjugação induz um isomorfismo

$$S^3 / \{\pm 1\} \xrightarrow{\cong} SO(3)$$

Esta descrição do grupo de rotações como $S^3 / \{\pm 1\}$ é útil em mecânica quântica, no estudo do "spin".

7.4 Exercícios de revisão e aplicação...

1. Calcule $(2 + 3i - k)^{-1}$
2. Verifique que uma base ortonormal de *imaginários puros* verifica as mesmas relações fundamentais que $\{i, j, k\}$.
3. Use a *lei do módulo* para mostrar que se dois inteiros são a soma de quatro quadrados, também o é o seu produto.
4. Escreva a rotação $f \in SO(3)$ cuja matriz, relativamente à base canónica é

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

como C_q .

5. Mostre que dois quatérnios não nulos p, q são ortogonais (entenda-se: como vectores de \mathbb{R}^4) sse $p^{-1}q \in \mathcal{I}$.

8 Grupos de simetria finitos de \mathbb{R}^3

Recorde-se (Teorema de Leonardo) que todo subgrupo finito de $I(\mathbb{R}^2)$ é *diedral*, D_n , ou *cíclico*, C_n , sendo que D_n é o grupo de simetrias do polígono regular de n lados e C_n o seu subgrupo das simetrias directas. Estes grupos são também subgrupos finitos de $I(\mathbb{R}^3)$: é claro que o subgrupo $\langle \alpha \rangle$ gerado por uma rotação $\alpha = R(l, 2\pi/n)$ é cíclico; vejamos como podemos obter também D_n . Podemos considerar nas duas primeiras variáveis x, y as isometrias do polígono regular de n lados, P_n , como representado nas figuras da secção 5.1, e tomar a identidade na terceira coordenada z ; recorde-se que aquelas isometrias são $\{\rho, \rho^2, \dots, \rho^n\} = \langle \rho \rangle$, em que ρ é a rotação de centro na origem e ângulo $2\pi/n$, e também n simetrias inversas, $\rho\sigma, \rho^2\sigma, \dots, \rho^n\sigma$, em que σ é a reflexão no eixo dos xx , e que são reflexões em n rectas que fazem entre si sucessivos ângulos de π/n . Assim em \mathbb{R}^3 temos o análogo com $\rho = R(\overleftarrow{z}, 2\pi/n)$ a rotação em torno do eixo dos zz , e $\sigma = R_H$ a reflexão no plano $y = 0$.

Mas note-se agora que em $P_n \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$ o efeito da reflexão σ pode também ser obtido pela *rotação no espaço* em torno do eixo dos xx e de ângulo π (meio-giro): designemos essa *rotação* também por σ : $\sigma = R(\overleftarrow{x}, \pi)$. Temos então que o grupo diedral $D_n = \langle \rho, \sigma \mid \rho^n, \sigma^2 \rangle$ é também um grupo de rotações de \mathbb{R}^3 , neste caso um subgrupo de $SO(3)$ já que 0 fica fixo; mais geralmente, tomando $\rho = R(l, 2\pi/n)$ e $\sigma = R(m, \pi)$, em que $m \perp l$, obtemos o grupo diedral gerado por essas duas rotações: $\rho\sigma, \rho^2\sigma, \dots, \rho^n\sigma$ são n rotações com eixos perpendiculares a l no ponto $l \cap m$, e fazendo entre si sucessivos ângulos de π/n . Podemos então enunciar o teorema:

Teorema 93 *Os grupos cíclicos C_n e os grupos diedrais D_n são grupos de rotações de \mathbb{R}^3 .*

Na prova do Teorema de Leonardo, em 5.1, vimos que todo o grupo finito de isometrias tem um ponto fixo por todos as isometrias do grupo: a prova desse facto é geral e vale também em \mathbb{R}^3 ; mas, mais geralmente, no caso de grupos de rotações a existência desse ponto não depende do grupo ser finito como os exercícios seguintes mostram:

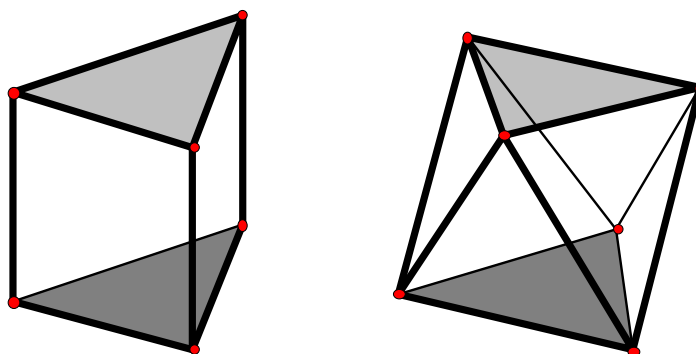
Exercício 94 *Mostre que se os eixos de três rotações α, β, γ não são concorrentes mas intersectam-se dois a dois, então o produto $\gamma\beta\alpha$ é um parafuso (Sugestão: recorde um exercício anterior sobre o produto de duas rotações)*

Exercício 95 *Mostre, usando o último exercício, que num grupo de rotações todos os eixos são concorrentes num ponto que é, por isso, fixo.*

Teorema 96 *Um grupo de rotações tem um ponto fixo;
Um grupo finito de isometrias tem um ponto fixo.*

8.1 Prismas e anti-prismas

Podemos construir poliedros $P \subset \mathbb{R}^3$ cujos grupos de simetria $S(P)$ são C_n ou D_n , construindo *prismas* ou *anti-prismas* sobre os polígonos regulares $P_n \subset \mathbb{R}^2 \times \{0\}$, e adicionando, por vezes, alguns elementos (*telhados*) num ou em ambos os topos. Um *prisma* obtém-se simplesmente como $P_n \times [-a, a]$; temos portanto n faces laterais que são rectângulos. Um *anti-prisma* obtém-se rodando um dos polígonos de um dos topos, $P_n \times \{-a\}$ ou $P_n \times \{a\}$, de um ângulo π/n , e considerando como faces laterais n triângulos (que podemos supor equiláteros para uma escolha conveniente de $a...$): ver a figura seguinte em que estão representados um prisma e um anti-prisma triangulares

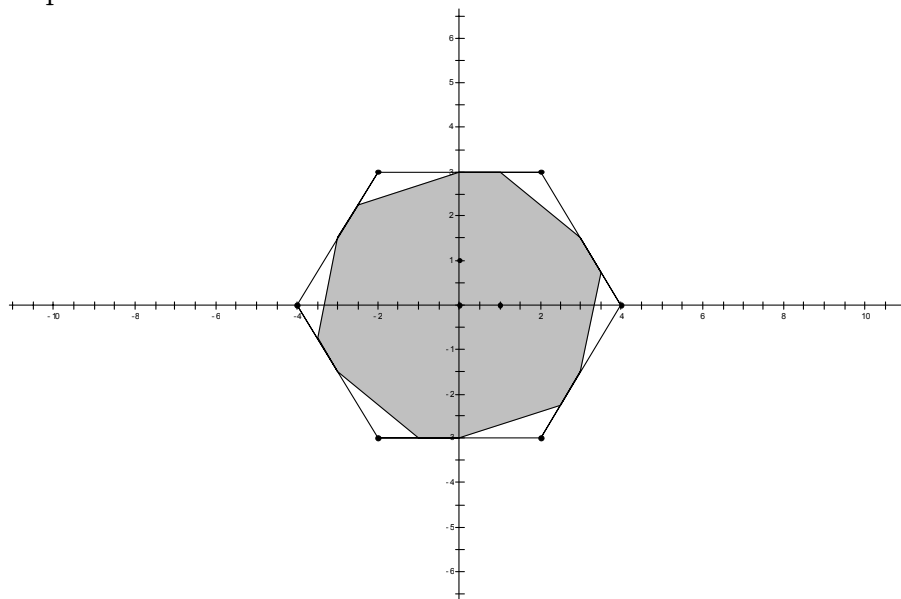


Designamos ainda estes prismas e anti-prismas por \mathbb{P}_n e \mathbb{P}'_n , respectivamente.

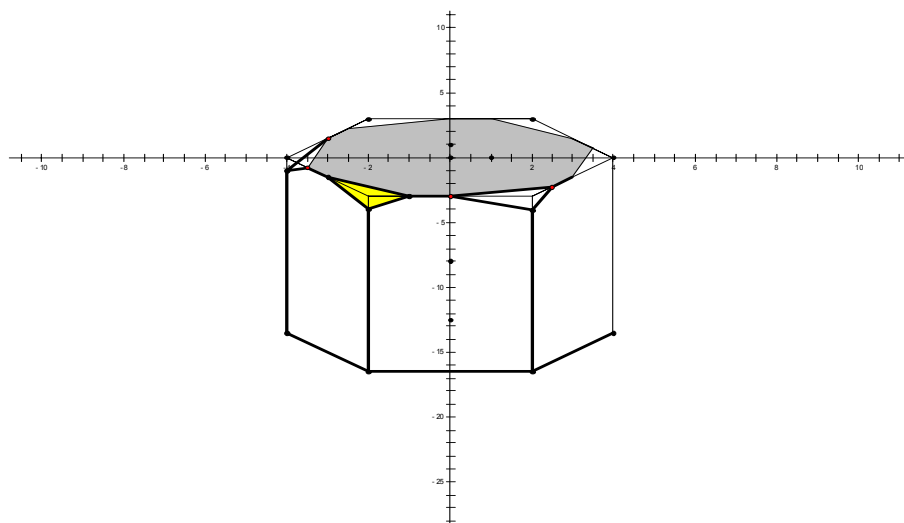
Note-se que para n *par*, os prismas \mathbb{P}_n têm um ponto de simetria, O (a origem na nossa descrição), isto é, são invariantes pela inversão I_0 , mas os anti-prismas \mathbb{P}'_n não; ao contrário, para n *ímpar*, os anti-prismas \mathbb{P}'_n têm um ponto de simetria mas os prismas \mathbb{P}_n não.

Considerando o prisma \mathbb{P}_n , é claro que o grupo diedral D_n de rotações gerado pela rotação $\rho = R(\overrightarrow{z}, 2\pi/n)$ e pelo meio-giro $\sigma = R(\overrightarrow{x}, \pi)$ está contido em $S(\mathbb{P})$ mas estritamente; há ainda as n reflexões em planos que contêm o eixo dos zz , $\rho\sigma', \rho^2\sigma', \dots, \rho^n\sigma'$, $\sigma' = R_H$ a reflexão no plano $y = 0$, e a reflexão no plano $z = 0$.

O que fazemos é modificar o prisma, acrescentando telhados num ou nos dois topos, de forma a obter um poliedro para o qual estas reflexões não sejam simetrias. Construímos um telhado considerando, no topo, uma figura que tem apenas as rotações como simetrias, como, por exemplo



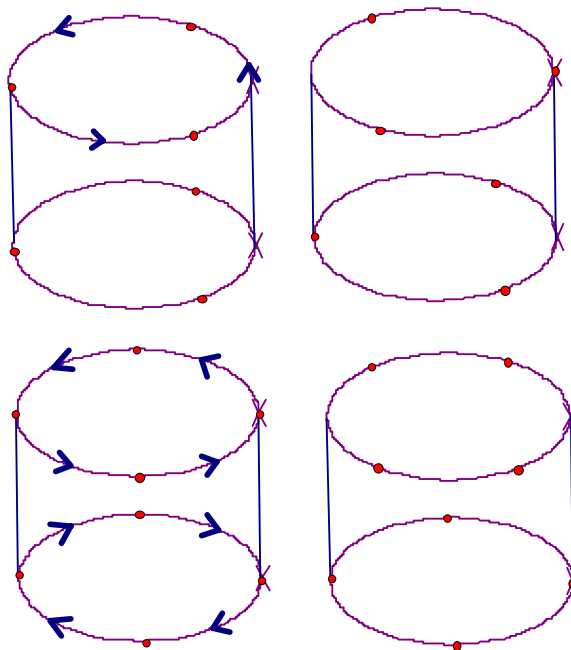
O telhado é construído cortando um pouco os cantos (não sombreados), por diminuição da coordenada z dos vértices do topo, de um pequeno ϵ como se ilustra na figura seguinte.



Este poliedro, em virtude do padrão do topo, que não se repete na base, tem como únicas simetrias as n rotações do grupo $\langle \rho \rangle$, $\rho = R(\overleftarrow{z}, 2\pi/n)$, e por isso o seu grupo de simetria é C_n .

Se agora acrescentarmos à base o telhado que é imagem daquele pelo meio-giro em torno do eixo dos xx , obtemos um poliedro que além daquelas rotações tem também como simetria esse meio-giro e portanto o seu grupo de simetria será D_n .

Convenção gráfica: como se percebe olhando para a figura anterior, as figuras de prismas ou anti-prismas com telhados adicionados são complicadas e difíceis de realizar; por isso, é conveniente introduzir uma convenção gráfica, representando-os por figuras mais simples, que não são poliedros, mas que têm os mesmos grupos de simetria: o que fazemos, seguindo [4, §17.2], é substituir os prismas e anti-prismas pelos cilindros que os circunscrevem, mantendo os vértices assinalados como nódulos, e simular os *telhados* pela indicação de uma *orientação dos arcos* entre os vértices (ver figura seguinte).



Entende-se que as simetrias destas figuras permutam os vértices e preservam as orientações dos arcos: a *flecha* de um arco orientado deve ser enviada para a flecha de outro arco orientado!

A figura representa um prisma e um anti-prisma triangulares, na parte superior, e um prisma e um anti-prisma quadrangulares na parte inferior; o prisma triangular tem um telhado no topo e portanto tem grupo de simetria C_3 ; o prisma quadrangular tem dois telhados que permutam por acção do meio-giro em torno do eixo dos xx e por isso tem grupo de simetria D_4 .

8.2 Os sólidos Platónicos

Para além dos grupos cíclicos e diedrais, devemos também estudar os grupos de simetria dos poliedros que correspondem, no espaço, aos polígonos regulares do plano: são os *poliedros regulares*.

Recorde-se que um subconjunto $X \subset \mathbb{R}^n$ diz-se *convexo* se para quaisquer dois dos seus pontos, $x, y \in X$, contém o segmento por eles definido: para todo t , $0 \leq t \leq 1$, o ponto $tx + (1 - t)y$ pertence a X .

Um subconjunto *compacto* (fechado e limitado) de \mathbb{R}^n definido por um *número finito de desigualdades lineares* é claramente convexo e, se tem interior não vazio, diz-se um

poliedro convexo (uma desigualdade linear define os pontos de \mathbb{R}^n que estão num dos lados do hiperplano definido pela igualdade correspondente); a união de um número finito de poliedros convexos diz-se simplesmente um *poliedro*.

Em \mathbb{R}^3 um plano divide-o em dois *semi-espacos* cuja intersecção é esse plano; um *poliedro convexo*, P , é assim a intersecção de um número finito de semi-espacos; a intersecção de P com cada um dos planos que o delimitam é um polígono convexo que se diz uma *face* de P ; a intersecção de duas faces é uma *aresta* e a intersecção de duas arestas é um *vértice*.

Um poliedro diz-se *regular* se todas as faces, arestas e vértices são *idênticos* entre si: para as faces e arestas isso significa congruentes; para os vértices significa que em cada vértice há o mesmo número r de arestas e que fazem entre si os mesmos ângulos; em consequência, as faces são polígonos regulares P_n para algum n fixo.

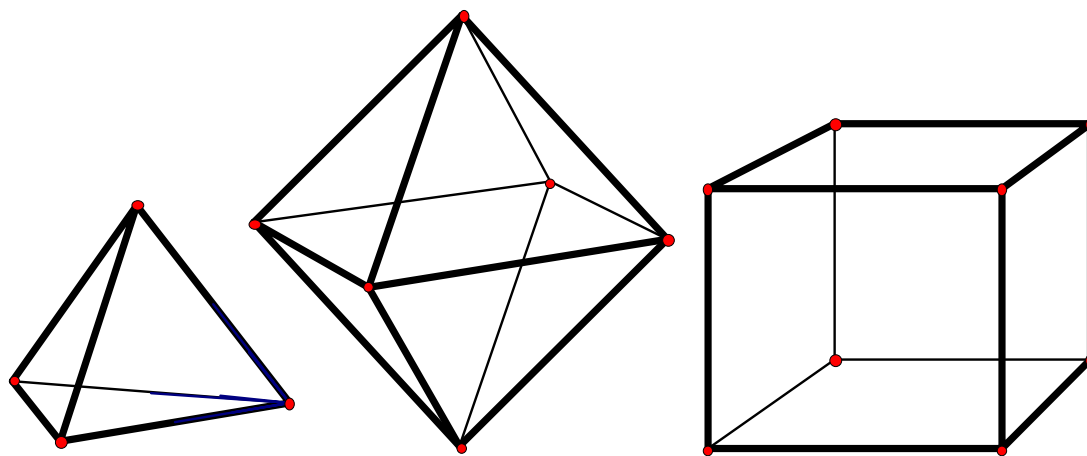
Os *sólidos platónicos* são os poliedros regulares convexos de \mathbb{R}^3 .

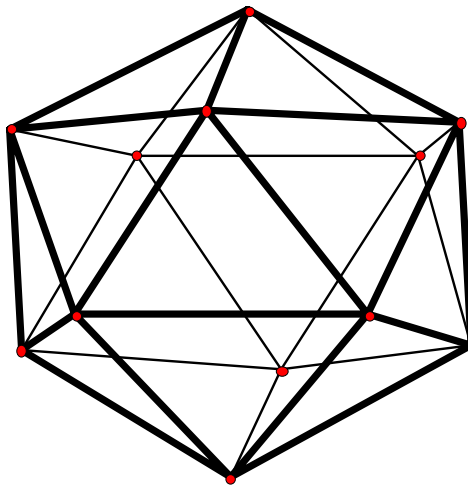
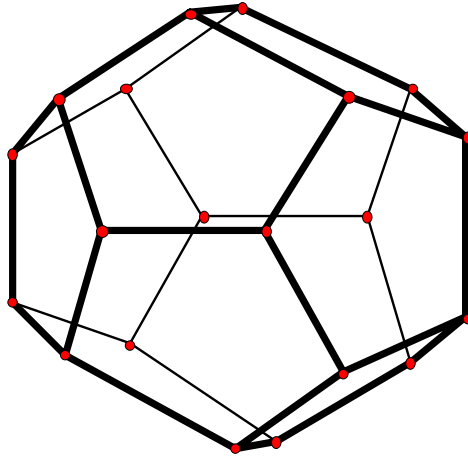
Como já era conhecido na antiguidade grega, há precisamente 5 sólidos platónicos (a menos de semelhança):

	n	r	<i>Vértices</i>	<i>Arestas</i>	<i>Faces</i>
Tetraedro	3	3	4	6	4
Cubo	4	3	8	12	6
Octaedro	3	4	6	12	8
Dodecaedro	5	3	20	30	12
Icosaedro	3	5	12	30	20

Exercício 97 *Construa modelos de cartão para cada um dos 5 sólidos platónicos; vão ser úteis na análise dos seus grupos de simetria, em especial para o dodecaedro.*

As figuras seguintes representam os cinco sólidos:





8.2.1 A Fórmula de Euler:

Recorde-se que se P é um poliedro convexo com v vértices, a aresta e f faces, se verifica a *fórmula de Euler*

$$v - a + f = 2$$

Chama-se *característica de Euler* de um poliedro ao número $v - a + f$ que designamos por $\chi(P)$. Assim, dizemos que para um poliedro convexo, P , temos $\chi(P) = 2$.

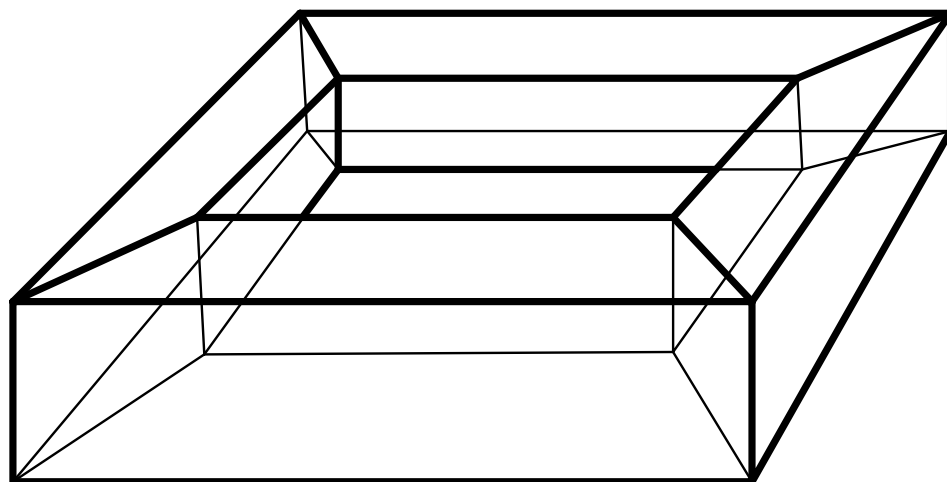
Há muitas provas desta fórmula; uma "prova" de tipo heurístico, muito interessante e curta, e, acho eu, convincente, é dada no começo do capítulo 17 de [4], em termos de diques e inundações.

O que interessa salientar é que este resultado tem formulações mais gerais; em particular não é relevante que o poliedro seja convexo, mas apenas que o seu *bordo* seja *homeo-*

morfo à esfera S^2 (o que acontece de facto no caso convexo). Por exemplo, o poliedro T^2 representado na figura seguinte tem característica de Euler diferente de 2. Designámo-lo por T^2 por causa da superfície do seu bordo ser homeomorfo ao toro bidimensional que é $T^2 \cong S^1 \times S^1$, o espaço produto da circunferência unitária consigo mesma.

Exercício 98 Calcule a característica de Euler de T^2 .

A característica de Euler é o primogénito dos *invariantes topológicos*, usualmente estruturas algébricas - neste caso uma simples contagem e soma de números - associadas aos espaços de tal forma que espaços homeomorfos têm a mesma estrutura associada; O estudo destes invariantes constitui o objectivo primeiro da chamada *Topologia Algébrica*: uma boa introdução pode ser encontrada no livro [7].



Vejamos agora que os únicos sólidos platónicos são de facto os cinco que descrevemos e representámo-se acima:

Seja P um poliedro regular convexo que tem como faces polígonos regulares de n lados e tal que cada vértice tem r arestas incidentes. É claro que $n > 2$ e $r > 2$. Suponhamos que P tem v vértices, a arestas e f faces. Como cada aresta é comum a duas faces e contém dois vértices, nf e rv dão ambos duas vezes o número de arestas:

$$nf = 2a = rv$$

e pela fórmula de Euler temos

$$\begin{aligned} 2 &= v - a + f = v - (rv)/2 + (rv)/n \\ &= (2n + 2r - nr)(v/2n) \\ &= [4 - (n - 2)(r - 2)](v/2n) \end{aligned}$$

Calculando, temos

$$v = \frac{4n}{2n + 2r - nr}$$

$$a = \frac{rv}{2}$$

$$f = \frac{rv}{n}$$

$$(n - 2)(r - 2) < 4$$

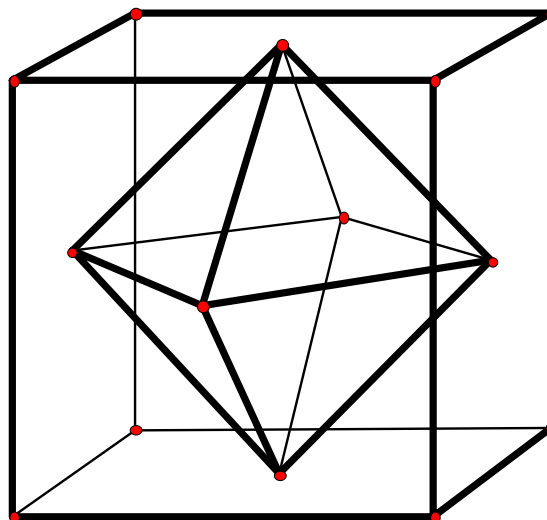
As três primeiras equações dizem que v, a, f são unicamente determinados por n e r , isto é, um dado par (n, r) determina, no máximo, um sólido platónico. Como $n, r > 2$, a desigualdade resolve-se facilmente e vê-se que há exactamente 5 soluções que são precisamente os pares que aparecem nas duas primeiras colunas da tabela em cima; pode verificar-se nessa tabela os correspondentes valores de v, a e f . Concluimos assim que há no máximo aqueles 5 sólidos platónicos; como cada um deles pode ser efectivamente construído, temos a conclusão.

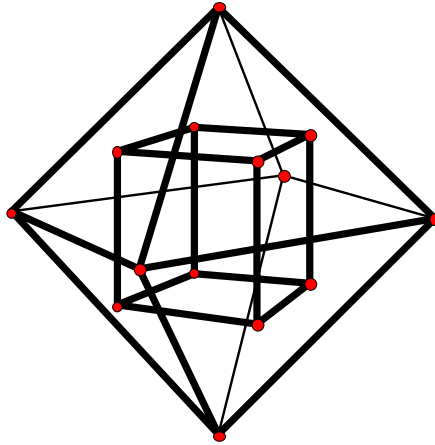
Exercício 99 *Mostre que a desigualdade anterior tem de facto aquelas 5 soluções.*

8.2.2 Dualidade e inclusão

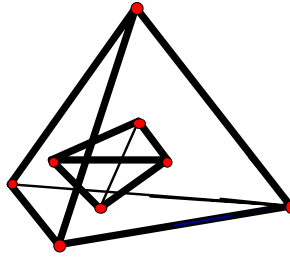
Uma consulta à tabela, em cima, torna patente uma dualidade do número de vértices, arestas e faces para os dois pares cubo-octaedro e dodecaedro-icosaedro: em cada par, os dois sólidos têm o mesmo número de arestas e o número de vértices de cada um deles é igual ao número de faces do outro.

Há também dualidade para os mesmos dois pares dos números n e r que aparecem trocados: em consequência, se num destes sólidos considerarmos os *centros* de todas as faces e considerarmos o sólido que tem como faces os polígonos cujos vértices são os centros de todas as faces incidentes num mesmo vértice, obtemos precisamente o *sólido dual*, como as figuras seguintes ilustram no caso do par cubo-octaedro:

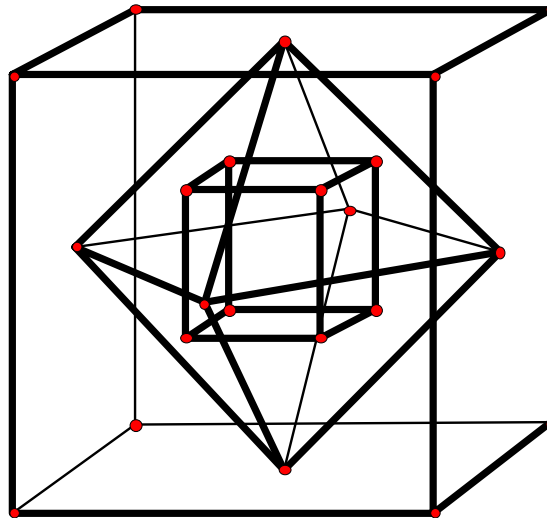




Por outro lado o tetraedro é auto dual:



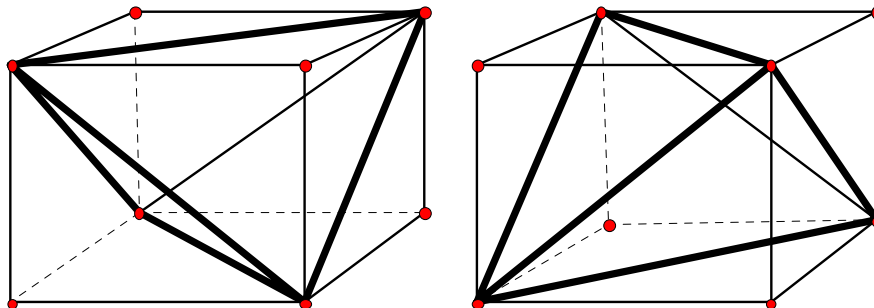
Outra figura...



Como consequência desta dualidade é claro que sólidos platônicos duais têm os mesmos grupos de simetria: qualquer simetria do cubo é uma simetria do octaedro e reciprocamente; o mesmo para o dodecaedro e o icosaedro.

Para além desta relação de dualidade há uma *relação de inclusão* do conjunto dos

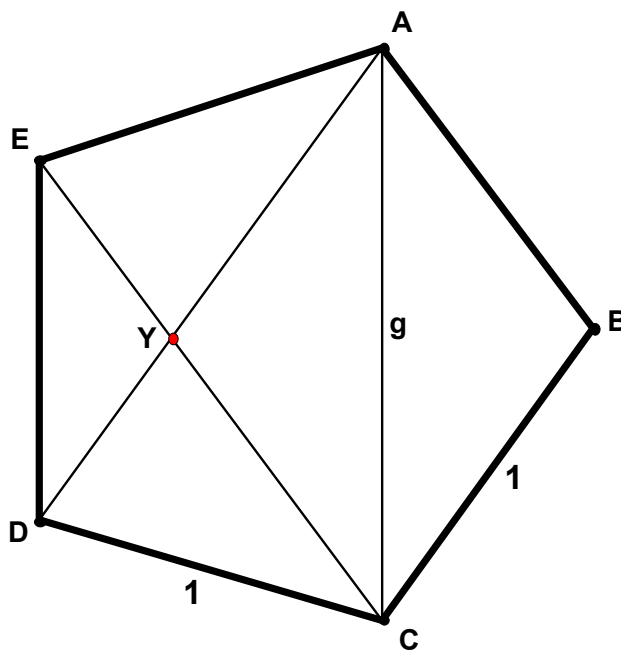
vértices do tetraedro no conjunto dos vértices de um cubo que implica que o grupo de simetria do tetraedro é um subgrupo do grupo de simetria do cubo. Note-se que um cubo contém naturalmente dois tetraedros como se representa na figura seguinte:



Vê-se assim que um cubo pode ser obtido de um tetraedro acrescentando quatro pirâmides triangulares congruentes, uma em cada face do tetraedro: é por isso claro que cada simetria do tetraedro é também uma simetria do cubo (mas que há simetrias do cubo que não são dadas por simetrias do tetraedro: por exemplo a inversão no centro).

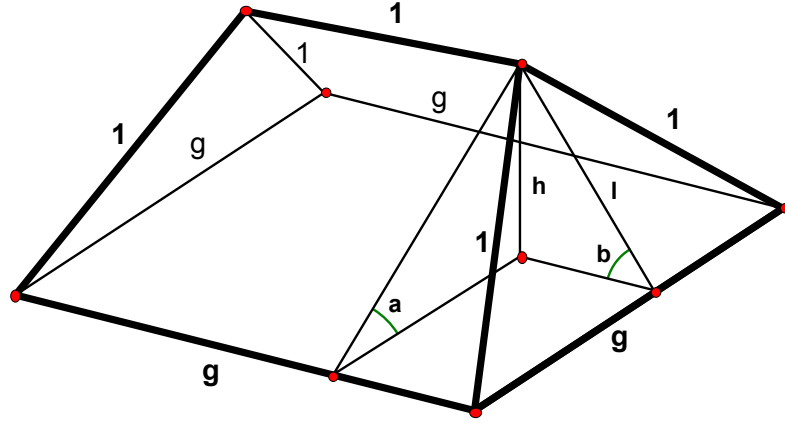
Há também uma relação de inclusão análoga entre o cubo e o dodecaedro que passamos a descrever.

Exercício 100 *Mostre que a diagonal de um pentágono regular de arestas de comprimento 1, tem comprimento a razão de ouro $g = (1 + \sqrt{5})/2 = 2 \cos(\pi/5)$ (que é a solução positiva de $g^2 - g - 1 = 0$)*



Considere-se agora um cubo cujas arestas têm comprimento g . Numa das faces do cubo construímos uma *tenda*, constituída por dois triângulos isósceles e dois trapézios,

acrescentando cinco novas arestas, todas de comprimento 1, como a figura seguinte mostra:



Estão indicados por a e b os ângulos que os trapézios e os triângulos, respectivamente, fazem com a face do cubo; l é a altura do triângulo e h a altura da *tenda*. Verifica-se que a e b são complementares: $a + b = \pi/2$:

$$1 = l^2 + \left(\frac{g}{2}\right)^2, \quad l^2 = h^2 + \left(\frac{g-1}{2}\right)^2$$

substituindo

$$1 = h^2 + \frac{g^2}{2} - \frac{g}{2} + \frac{1}{4}$$

e como $g^2 - g = 1$ vem

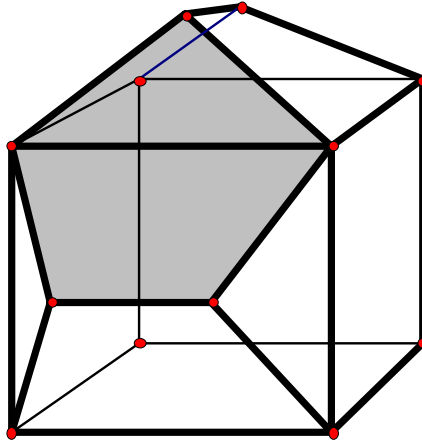
$$h = \frac{1}{2}$$

Temos então que

$$\begin{aligned} \tan a &= \frac{2h}{g} = \frac{1}{g}, \quad \tan b = \frac{2h}{g-1} = \frac{1}{g-1} \\ \tan a \tan b &= \frac{1}{g} \frac{1}{g-1} = \frac{1}{g^2 - g} = 1 \end{aligned}$$

e portanto $a + b = \pi/2$ como pretendíamos mostrar.

A complementaridade dos ângulos a e b significa que quando construímos duas tendas em faces adjacentes do cubo, como na figura seguinte, a parte constituída por um triângulo de uma das tendas e pelo trapézio adjacente da outra tenda (a sombreado) é uma figura plana e portanto um pentágono regular.



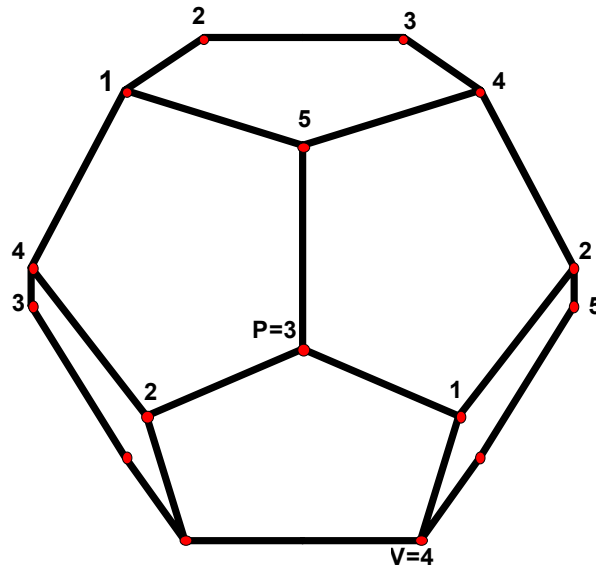
Significa isto que podemos construir o dodecaedro colando a cada face do cubo uma destas tendas; temos assim um cubo de aresta com comprimento g , inscrito num dodecaedro de aresta com comprimento 1 de tal forma que cada uma das 8 arestas do cubo é diagonal de uma das 8 faces do dodecaedro; é claro que se fizermos a construção anterior começando o processo com *cada uma das cinco diagonais* de uma das faces do dodecaedro (o sombreado na figura anterior...) obtemos 5 cubos distintos inscritos no dodecaedro; os cinco cubos são obtidos a partir de um deles, C , por rotações sucessivas $\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4$ em que $\rho = R(l, 2\pi/5)$ e l é um eixo perpendicular ao centro da face. Seja T um tetraedro inscrito em C (como já vimos há dois)

Exercício 101 *Verifique, com um modelo, que as imagens dos quatro vértices de T pelos elementos do grupo $\langle \rho \rangle$ são todas distintas; obtemos assim os $5 \times 4 = 20$ vértices do dodecaedro.*

Nota: no caso do cubo obtido de um tetraedro inscrito acrescentando quatro pirâmides triangulares, como qualquer isometria do triângulo base de uma pirâmide se estende a uma isometria da pirâmide, toda a isometria do tetraedro é uma isometria do cubo circunscrito; no caso do dodecaedro obtido do cubo acrescentando *tendas*, não é verdade que qualquer isometria do quadrado base de uma tenda se estenda a uma isometria da tenda: isto acontece porque a aresta do topo tem uma determinada direcção; assim, as rotações de $\pi/2$ em torno de eixos perpendiculares aos centros de faces do cubo (temos 3 desses eixos) são claramente simetrias do cubo que não são simetrias do dodecaedro - tenha em atenção que em [4, §17.1] há afirmações erradas sobre isto!

Apesar da nota anterior, os 5 cubos inscritos num dodecaedro estão directamente relacionados com uma forma de numerar os seus 20 vértices que é especialmente útil na análise do grupode simetria.

Considere um dodecaedro, representado com uma (portanto duas) face horizontal como na figura seguinte



Pretendemos numerar todos os 20 vértices com os números 1, 2, 3, 4, 5 de tal forma que em cada face não haja repetições. Os vértices distribuem-se por quatro níveis (quatro planos horizontais); começamos por numerar ciclicamente os vértices do nível superior, a face do topo, de 1 a 5; consideramos o nível seguinte: o vértice P , na figura, poderá ser numerado com 2 ou 3; escolhendo um dos números (na figura o 3), numeramos os restantes vértices do mesmo nível ciclicamente como fizemos para os do topo; é agora fácil verificar que só há uma maneira de numerar os restantes vértices, do terceiro nível e da face da base, de forma a que não haja repetições em nenhuma face e que em cada um desses níveis a numeração é também cíclica.

Exercício 102 *Verifique, num modelo, a numeração que acabámos de descrever.*

Verifique que os quatro vértices com o mesmo número formam os vértices de um tetraedro; temos assim 5 tetraedros: como no exercício anterior são obtidos de um deles por rotações sucessivas de $2\pi/5$ em torno do eixo perpendicular ao centro de uma face - note que se for o eixo vertical, perpendicular às duas faces horizontais, isso é claro já que em cada nível a numeração é cíclica. Verifique ainda que se colocar outra qualquer face horizontal a numeração em cada um dos quatro níveis é cíclica na mesma ordem.

Relativamente ao exercício anterior, recorde que há outro sistema de 5 tetraedros inscritos no dodecaedro: esses apareceriam associados à outra escolha para a numeração do vértice P .

Exercício 103 *Colore, num modelo, as faces do icosaedro com cinco cores distintas, de forma correspondente à numeração do dodecaedro dual.*

8.3 Os grupos de simetria dos sólidos platónicos

Seja P um dos sólidos platónicos; $S(P)$ é o grupo das simetrias de P e designamos por $S_d(P)$ o subgrupo das simetrias directas. Como as simetrias de P permutam os seus

vértices que são em número finito, $S(P)$ é um grupo finito. Como já vimos atrás, $S(P)$ sendo finito, existe um ponto a fixo por todos os elementos e $S_d(P)$ é então um *grupo de rotações*. O ponto fixo a é o centroide de P . Sem perda de generalidade (a menos de conjugação, $T_a^{-1}S(P)T_a$), podemos supor que $a = 0$, isto é, o sólido está centrado na origem: então $S(P)$ é um subgrupo finito de $O(3)$ e $S_d(P)$ de $SO(3)$.

Designamos cada um dos cinco sólidos platónicos pela sua inicial: T, C, O, D, I . Pela dualidade temos que $S(C) \cong S(O)$, $S_d(C) \cong S_d(O)$ e $S(D) \cong S(I)$, $S_d(D) \cong S_d(I)$.

Note-se que como $SO(3)$ tem índice 2 em $O(3)$, $S_d(P)$ é um subgrupo normal de índice 2 em $S(P)$.

Recorde-se que S_n designa o *grupo simétrico* em n elementos, $S_n = \text{Bij} \{1, 2, \dots, n\}$, e A_n o (sub)grupo *alternado* das permutações pares (consultar [2] para as propriedades gerais destes grupos)

Teorema 104 $S(T) \cong S_4$ e $S_d(T) \cong A_4$.

Prova. Numerando os vértices de T com os números $1, 2, 3, 4$, temos claramente um homomorfismo $\alpha : S(T) \rightarrow S_4$. Vejamos primeiro que α é um epimorfismo: como S_4 é gerado por transposições, basta ver que qualquer transposição está na imagem de α ; vejamos para $(1, 2)$, já que para as outras é perfeitamente análogo: claramente R_H em que H é o plano definido pelos vértices $3, 4$ e pelo ponto médio da aresta $\overline{12}$, e que é o bissector ortogonal de $\overline{12}$, mantém fixos 3 e 4 e permuta 1 e 2 , logo $\alpha(R_H) = (1, 2)$. O homomorfismo é também claramente injectivo já que qualquer isometria de \mathbb{R}^3 fica determinada pelas imagens de quatro pontos independentes-afim (neste caso os quatro vértices de T).

É claro que uma reflexão $R_H \in S(T)$ tem de ser daquele tipo: porque é involutiva, $R_H^2 = \text{id}$, se envia um vértice, digamos 1 , no vértice, digamos 2 , então envia 2 em 1 e portanto $(1, 2)$ é um ciclo de $\alpha(R_H)$; se também permutasse 3 e 4 , então seria o produto de duas reflexões e portanto uma isometria directa o que é absurdo, logo será $\alpha(R_H) = (1, 2)$. Temos, é claro 12 reflexões. Se $f \in S_d(T)$, então f é produto de duas reflexões (porque há um ponto fixo...) e portanto $\alpha(f)$ é produto de duas transposições e é portanto par. Temos assim que $\alpha(S_d(T)) \subset A_4$. Como $S_d(T)$ tem índice 2 em $S(T)$ e A_4 tem índice 2 em S_4 , α induz um isomorfismo: $S_d(T) \rightarrow A_4$. ■

O exercício seguinte daria também uma prova mais directa deste teorema; dá de qualquer maneira uma ideia mais clara das simetrias do tetraedro:

Exercício 105 Descreva explicitamente todas as isometrias do tetraedro, em particular indicando para as rotações os eixos e ângulos, e escreva as correspondentes permutações dos vértices como produtos de ciclos disjuntos e de transposições.

Os outros quatro sólidos platónicos têm uma propriedade que o tetraedro não possui: têm *simetria central*, isto é, são invariantes pela inversão no centro (que supomos ser 0): $I_0 : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ que envia cada $x \in \mathbb{R}^3$ para o seu simétrico $-x$.

O grupo $O(3)$ é isomorfo a $SO(3) \times \{\pm 1\} \cong SO(3) \times \mathbb{Z}_2$: é fácil verificar que a aplicação que envia A em $(A, 1)$ se $\det A = 1$ e em $(I_0 A, -1) = (AI_0, -1)$ se $\det A = -1$, é um isomorfismo.

Exercício 106 Verifique a afirmação anterior e indique o isomorfismo inverso.

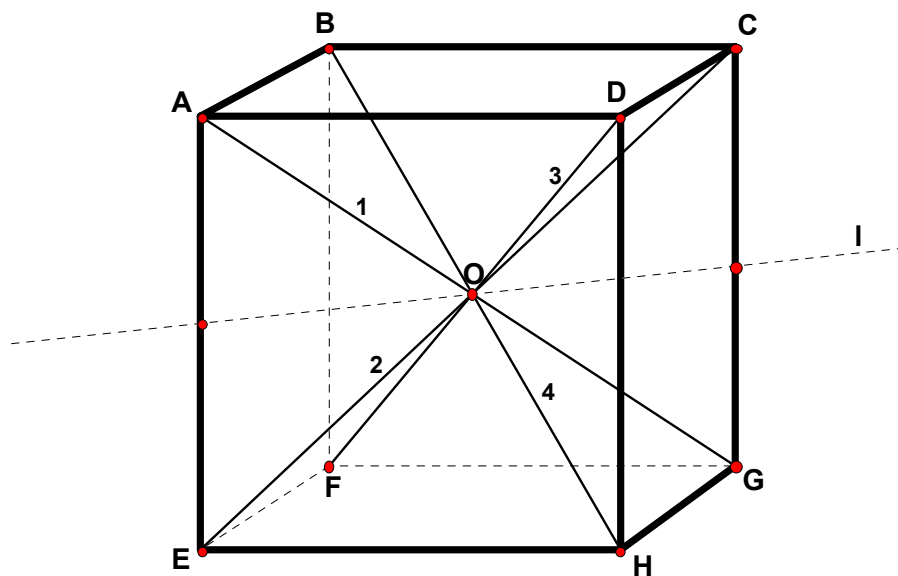
O mesmo raciocínio aplicado ao grupo de simetria de um sólido P com simetria central, mostra que

$$S(P) \cong S_d(P) \times \{\pm 1\}$$

Portanto, para obter uma classificação dos grupos de simetria dos sólidos platônicos, basta-nos agora estudar os dois grupos de rotações do cubo e do dodecaedro. Além disso, tendo uma descrição de todas as rotações obtemos também todas as simetrias inversas compondo essas rotações com uma mesma isometria inversa (qualquer uma serve, em particular a inversão central)

Teorema 107 $S_d(C) \cong S_4$

Prova. A ideia é encontrar quatro objectos geométricos associados ao cubo que sejam permutados pelas rotações. Escolhemos as quatro diagonais do cubo, que unem os quatro pares de vértices simétricos em relação à origem: ver a figura seguinte



Numeramos as quatro diagonais com 1, 2, 3, 4 como indicado. É claro que como a inversão I_0 comuta com todos os elementos de $O(3)$, qualquer isometria envia um par de vértices simétricos num par de vértices simétricos e portanto uma diagonal numa diagonal. Temos assim, com a numeração que fixámos, definida uma aplicação $\alpha : S_d(C) \longrightarrow S_4$. Para ver que α é um epimorfismo basta verificar que toda a transposição está na sua imagem: basta verificar para (1, 2), sendo os outros casos perfeitamente análogos. Considere-se o plano que contém as diagonais 1 e 2 e que contém então as arestas \overline{AE} e \overline{CG} . Considere-se nesse plano a recta l que une os pontos médios dessas arestas; o plano que contém as outras duas diagonais 3 e 4 e as arestas \overline{BF} e \overline{DH} é ortogonal a l ; uma rotação de eixo l e ângulo π claramente permuta as diagonais 1 e 2 e envia cada uma das outras em si mesma logo a sua imagem por α é (1, 2). Para verificar que α é injectiva basta verificar que existem 24 rotações distintas de C , tantas quantos os elementos de S_4 , porque uma

aplicação entre dois conjuntos finitos com a mesma cardinalidade e que é sobrejectiva é necessariamente bijectiva.

Para cada par de vértices P, Q existe uma rotação que leva P em Q como se pode facilmente verificar; significa isto que o conjunto dos vértices é uma órbita para a acção de grupo de $S_d(C)$ em C ; por outro lado, há precisamente 3 rotações que fixam um dado vértice e que são a identidade e as rotações em torno da diagonal por esse vértice e de ângulos $2\pi/3$ e $4\pi/3$. Temos portanto que o estabilizador de cada vértice tem 3 elementos e a sua órbita 8, logo por um exercício anterior concluímos que a ordem de $S_d(C)$ é 24.

■

Exercício 108 *Descreva explicitamente todos as rotações do cubo, indicando para cada rotação o seu eixo e ângulo e escrevendo a permutação correspondente das 4 diagonais como produto de ciclos disjuntos e transposições.*

Exercício 109 *Mostre que os pontos da superfície do cubo têm órbitas para a acção de $S_d(C)$ com 24, 12, 8 ou 6 elementos. Descreva geometricamente os pontos estes diferentes tipos de órbitas.*

Finalmente o grupo de rotações do dodecaedro, D .

Exercício 110 *Mostre que $S_d(D)$ tem 60 elementos, descrevendo os possíveis eixos e ângulos de todas as rotações (sugestão: lembre que D tem simetria central)*

Exercício 111 *Considere o grupo alterno A_5 ; descreva combinatoriamente os seus 60 elementos em termos do comprimento de ciclos, ou produto de ciclos.*

Teorema 112 $S_d(D) \cong A_5$

Prova. A ideia é, à semelhança do que fizemos para o cubo, encontrar 5 objectos geométricos associados ao dodecaedro e que sejam permutados pelas suas simetrias. Esses objectos são os 5 cubos inscritos que descrevemos anteriormente: recorde-se que começando com uma diagonal de uma das faces de D e acrescentando tendas, podemos construir, de forma única, um cubo inscrito, tal que cada uma das suas 12 arestas é diagonal de uma face de D . É claro, pelo processo de construção, que toda a rotação de D permuta estes 5 cubos; recorde-se que associados a estes cubos, podemos considerar 5 tetraedros (de dois modos distintos), aos quais associámos uma numeração, de 1 a 5, dos vértices de D de tal modo que os vértices de cada tetraedro têm o mesmo número associado. Podemos agora verificar que cada rotação de D (definidas no último Exercício...) permuta também estes cinco tetraedros, e os seus números associados, e temos assim definida uma aplicação $\alpha : S_d(D) \longrightarrow S_5$. Basta agora ver que α toma valores em A_5 e é sobrejectiva (como já vimos no penúltimo exercício $|S_d(D)| = |A_5| = 60$).

As numerações cíclicas, lendo no sentido retrógrado (clockwise), das 12 faces de D dão os ciclos de comprimento 5, (1, 2, 3, 4, 5) na face do topo e os que se obtêm deste por permutações pares; os ciclos de faces opostas são inversos em A_5 (como nos quatro níveis que vão de uma face à sua oposta a numeração mantém a mesma ordem cíclica, ler no sentido retrógrado numa face é o mesmo que ler no sentido directo na face oposta...):

estes 12 ciclos correspondem portanto às rotações em torno de um eixo pelo centro das faces e de ângulos $\mp 2\pi/5$. Os outros 12 ciclos de comprimento 5 de A_5 que se obtêm de $(1, 2, 3, 4, 5)$ por permutações ímpares, correspondem às rotações com os mesmos eixos pelos centros das faces e de ângulos $\pm 4\pi/5$.

As rotações em torno dos eixos que passam pelos pares de vértices simétricos de ângulos $\pm 2\pi/3$ dão os 20 ciclos de comprimento 3 de A_5 .

Finalmente as rotações de π em torno dos eixos que passam pelos pontos médios dos pares de arestas opostas dão os 15 elementos de ordem 2 de A_5 , que se escrevem como produto de dois ciclos de comprimento 2 (como $(1, 2)(3, 4)$ por exemplo). ■

Exercício 113 Verifique, no seu modelo numerado, os pormenores da prova anterior.

Podemos agora resumir os resultados encontrados:

Grupos de Simetria dos Sólidos Platônicos

P	Rotações, $S_d(P)$	Grupo total, $S(P)$
Tetraedro	A_4	S_4
Cubo, Octaedro	S_4	$S_4 \times \{\pm 1\}$
Dodecaedro, Icosaedro	A_5	$A_5 \times \{\pm 1\}$

Exercício 114 Mostre que S_4 não é isomorfo a $A_4 \times \{\pm 1\}$.

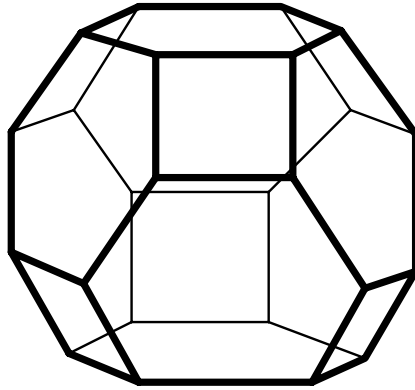
8.4 Os sólidos Arquimedianos

O que acontecerá se enfraquecermos a definição de sólido platónico exigindo apenas que as arestas e os vértices sejam *idênticos*, admitindo por isso que as faces sejam polígonos regulares de vários tipos? Mostra-se que, para além dos cinco sólidos platónicos e certas famílias infinitas de prismas e anti-prismas (um prisma e um anti-prisma para cada polígono regular P_n), há precisamente 13 poliedros *convexos* com arestas e vértices *idênticos*: são os chamados *sólidos arquimedianos* ou *semi-regulares*.

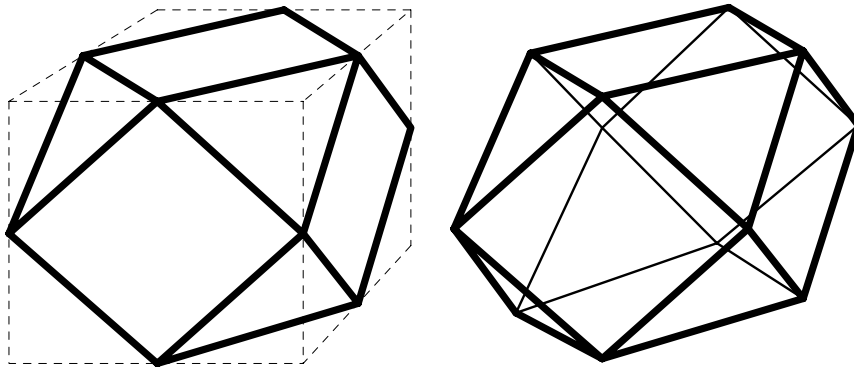
Uma notação conveniente para estes sólidos é a que descreve o tipo de vértice pela indicação do número de arestas das várias faces em ordem cíclica em torno do vértice: $3.6^2 = 3.6.6$, 3.8^2 , 4.6^2 , $(3.4)^2 = 3.4.3.4$, $4.6.8$, 3.4^3 , $3^4.4$, 3.10^2 , $(3.5)^2$, 5.6^2 , $4.6.10$, $3.4.5.4$, $3^4.5$.

Alguns destes sólidos aparecem como modificações simétricas dos sólidos platónicos; por exemplo o *octaedro truncado* obtém-se do octaedro truncando cada vértice de tal forma que cada um dos oito triângulos dê um hexágono regular: o sólido arquimediano obtido é o 4.6^2 na notação anterior (figura seguinte)

Definição 115 A *figura-de-vértice* (ou *figura-vértice*) de um vértice v de um polígono é o segmento de recta que une os pontos médios das duas arestas que contêm v . A *figura-vértice* de um vértice v de um poliedro é a união das figuras-vértices de cada uma das faces que contêm v .



A figura-vértice de cada vértice de um cubo é um triângulo equilátero; O poliedro cujas arestas são a união das oito figuras-vértices do cubo é chamado um *cuboctaedro*, o sólido arquimediano $(3.4)^2$ (figura seguinte)



Note-se que neste sólido as arestas são todas *equivalentes* no sentido de terem os mesmos polígonos como faces adjacentes, neste caso um triângulo e um quadrado; o que não acontece com o octaedro truncado em que há faces que unem um hexágono e um quadrado e outras que unem dois hexágonos.

Exercício 116 *Faça outras construções com sólidos platônicos de forma a obter outros sólidos arquimedianos.*

Exercício 117 *Mostre que os sólidos arquimedianos são de facto os 13 que listámos em cima; construa modelos para cada um deles.*

8.5 Grupos finitos de rotações de \mathbb{R}^3

Vimos como exemplos de grupos finitos de rotações em \mathbb{R}^3 , os grupos cíclicos C_n , os grupos diedrais D_n e os três grupos de rotações dos sólidos platónicos, A_4 , S_4 e A_5 . Todos eles são grupos de simetria. Na verdade estes exemplos esgotam todas as possibilidades, como provaremos.

Exercício 118 *Prove que os grupos de rotações dos sólidos platónicos não são cíclicos nem diedrais.*

Como já vimos, um grupo de rotações de \mathbb{R}^3 tem um ponto a que é fixo para todas as suas rotações e, portanto, a menos de conjugação pela translação T_a , podemos supor que é um subgrupo de $SO(3)$.

Seja então $G \leq SO(3)$; como já vimos toda a rotação tem um eixo e , por isso, para $g \in G$ existe um único par de pontos antípodos $x, -x \in S^2$, ditos os *pólos* de g , tal que $g(x) = x$ e $g(-x) = -x$ (excepto se $g = id$ em que todos os pontos são fixos): $\{x, -x\} = l \cap S^2$ em que l é o eixo de g ; além disso toda a rotação fica completamente determinada pela sua restrição à esfera unitária S^2 .

Vamos agora provar um facto básico da geometria da esfera que iremos usar.

Lema 119 (Triângulos Esféricos) *Numa esfera, a soma dos ângulos de qualquer triângulo é maior do que 180° .*

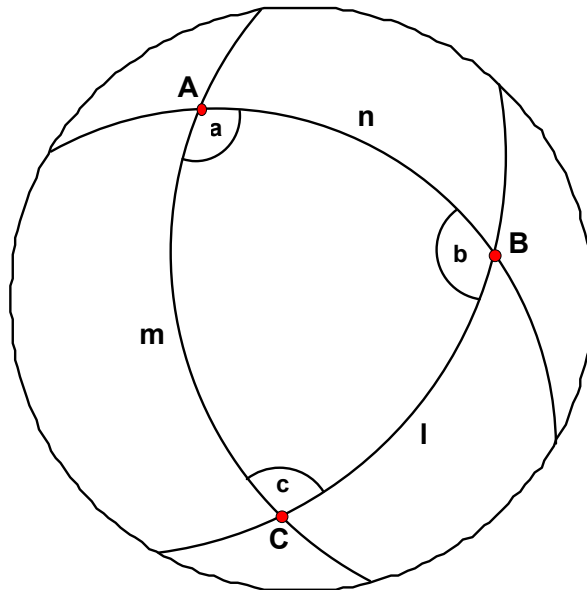
Na geometria esférica, consideramos como rectas os γ , que são as intersecções com a esfera dos planos que passam pelo seu centro. Um *triângulo esférico* tem como lados três arcos de círculos máximos. O Lema anterior é consequência imediata do seguinte resultado sobre áreas:

Teorema 120 *Seja $\Delta \subset S^2$ um triângulo com ângulos a, b, c . A área de Δ é igual a $(a + b + c) - \pi$.*

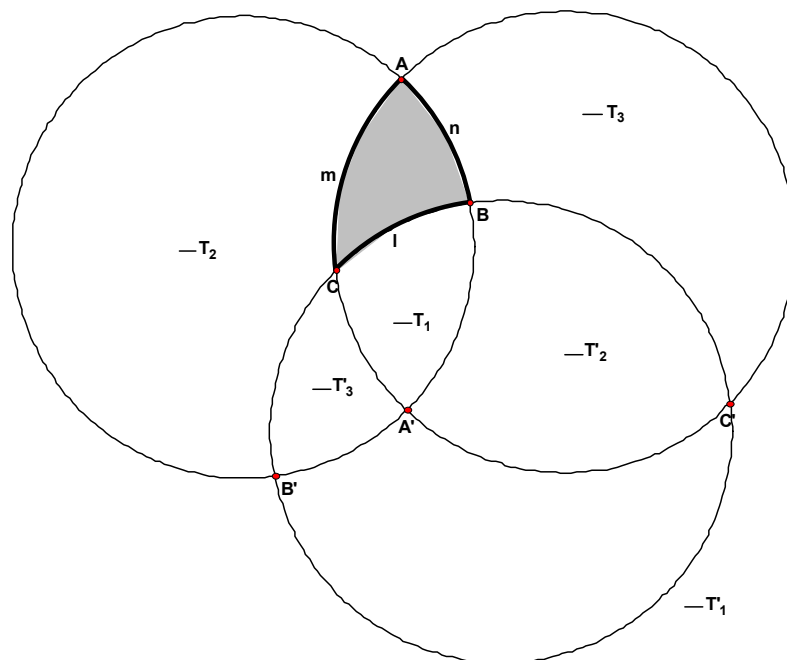
Prova. *Sejam A, B, C os vértices de Δ e l, m, n os círculos máximos que contêm os seus lados, como se representa na figura seguinte.*

Dois círculos máximos intersectam-se em pontos antípodos e definem quatro regiões na esfera: gomos com vértices nesses pontos; considere-se o gomo entre m e n que contém Δ : sendo $4\pi = 2 \times 2\pi$ a área da esfera, a área do gomo é proporcional ao ângulo a e é portanto $2a$; analogamente os gomos entre n e l e entre m e l que contêm Δ têm áreas iguais a $2b$ e $2c$, respectivamente. Sejam T_1, T_2 e T_3 os triângulos que em cada um destes três gomos são o complementar de Δ .

Note-se que cada círculo máximo é invariante pela inversão central, I_0 , e cada par de gomos verticalmente opostos definido por dois círculos máximos é permutado por I_0 . Sejam T'_1, T'_2 e T'_3 os triângulos que são centralmente simétricos a T_1, T_2 e T_3 , respectivamente. A outra figura representa a esfera com os três círculos máximos que definem Δ (sombreado).



É a figura planar que se obtém por projecção estereográfica a partir de um ponto exterior aos três círculos. Para além dos triângulos T_i e os seus simétricos T'_i , estão também representados os simétricos dos vértices de Δ , A' , B' e C' . Como a inversão central preserva a área, temos que T_i e T'_i , $i = 1, 2, 3$ têm a mesma área.



Considerando a semi-esfera que na figura corresponde ao disco delimitado por m , ela decompõe-se em quatro triângulos e representando as áreas das figuras pelos seus nomes,

temos

$$\begin{aligned} 2\pi &= \Delta + T_1 + T_3 + T_2' = \Delta + T_1 + T_3 + T_2 \\ \Delta + T_1 &= 2a \\ \Delta + T_2 &= 2b \\ \Delta + T_3 &= 2c \end{aligned}$$

Calculando,

$$2\Delta + 2\pi = 2a + 2b + 2c$$

o que estabelece o resultado. ■

Recordemos outro facto básico sobre rotações: o conjugado de uma rotação de ordem n por uma isometria é ainda uma rotação de ordem n . Seja $\rho = R(l, \theta)$ e σ uma isometria. Seja $R(l, \theta) = R_H R_J$ em que J, H são dois planos que se intersectam em l e fazem entre si um ângulo $\theta/2$.

$$\sigma\rho\sigma^{-1} = \sigma R_H R_J \sigma^{-1} = \sigma R_H \sigma^{-1} \sigma R_J \sigma^{-1} = R_{\sigma(H)} R_{\sigma(J)}$$

$\sigma(H) \cap \sigma(J) = \sigma(H \cap J) = \sigma(l)$ e a ordem de um conjugado $\sigma\rho\sigma^{-1}$ é igual à ordem de ρ ; se $\sigma, \rho \in G \leq I(R^3)$, $\sigma\rho\sigma^{-1} \in G$ e portanto temos o seguinte resultado:

Lema 121 *Se G é um grupo de isometrias, $\sigma, \rho \in G$ em que ρ é uma rotação de ordem n e eixo l , então G contém uma rotação de ordem n e eixo $\sigma(l)$.*

Seja $G \leq SO(3)$ finito. Vamos distinguir três casos:

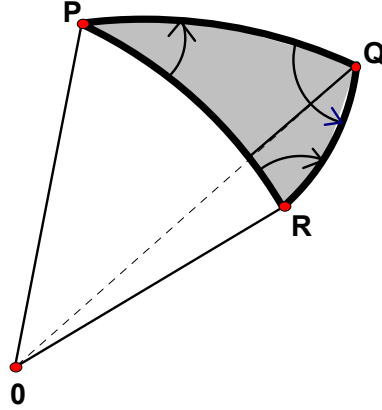
1. G contém apenas a identidade e meios-giros.
2. Todas as rotações de G de ordem maior que 2 têm o mesmo eixo.
3. G contém rotações de ordem maior que 2 e com eixos distintos.

Caso 1. O produto de dois meios-giros $R(m, \pi)$ e $R(n, \pi)$ é um meio-giro *sse* os eixos m e n são perpendiculares. Portanto se um grupo de rotações está neste caso ele tem apenas 0, 1, ou 3 meios-giros e será portanto C_1 , C_2 ou D_2 respectivamente.

Caso 2. Suponhamos agora que G tem rotações de ordem maior que 2, mas que têm todas o mesmo eixo l . Como já sabemos, essas rotações formam um subgrupo de G que é cíclico: $C_n = \langle \rho \rangle$. Pelo Lema anterior todas as rotações de G têm de manter l invariante; portanto as únicas rotações possíveis com eixos diferentes de l são meios-giros com eixos perpendiculares a l ; seja σ um desses meios-giros: para outro qualquer desses meios-giros, α , temos que $\alpha\sigma \in C_n$ e portanto G é gerado por ρ e σ , isto é $G \cong D_n$.

Caso 3. Consideramos em S^2 os *pólos* das várias rotações de G : como G é finito, entre as rotações de ordem maior que 2 e eixos distintos há dois pólos, digamos \overleftrightarrow{P} e \overleftrightarrow{Q} , a distância mínima. Sejam α, β geradores das rotações de G com eixos $\overleftrightarrow{0P}$ e $\overleftrightarrow{0Q}$, respectivamente; seja $p \geq 3$ a ordem de α e $q \geq 3$ a ordem de β . O produto $\beta\alpha$ é uma

rotação de ordem r , digamos. Seja H o plano definido pelas duas rectas \overleftrightarrow{OP} e \overleftrightarrow{OQ} ; podemos escrever $\alpha = R_H R_J$ e $\beta = R_L R_H$ em que J é um plano por \overleftrightarrow{OP} que faz com H um ângulo de π/p e L é um plano por \overleftrightarrow{OQ} que faz com H um ângulo de π/q . $\beta\alpha$ é uma rotação de eixo $J \cap L$, com o ângulo entre os dois planos igual a π/r ; seja R um pólo dessa rotação como representamos na figura seguinte:



Os três planos H, J, L intersectam S^2 em três círculos máximos que contêm os três arcos do triângulo esférico de vértices P, Q, R (sombreado); os ângulos deste triângulo são os ângulos diedrais entre os três planos: $\pi/p, \pi/q$ e π/r em P, Q e R respectivamente.

Pelo Lema sobre triângulos esféricos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} > 1$$

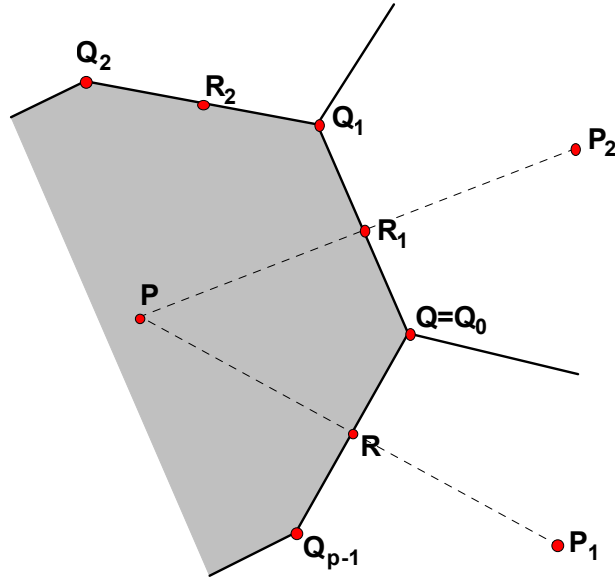
Como $(1/p) + (1/q) \leq 2/3$, então $r < 3$ logo $r = 2$: $\beta\alpha$ é um meio-giro.

$$\begin{aligned} r = 2 &\Rightarrow \frac{1}{p} + \frac{1}{q} > \frac{1}{2} \\ &\Leftrightarrow (p-2)(q-2) < 4 \end{aligned}$$

Temos cinco soluções para esta desigualdade:

$$\begin{aligned} p &= 3, q = 3 \\ p &= 3, q = 4 \\ p &= 3, q = 5 \\ p &= 4, q = 3 \\ p &= 5, q = 3 \end{aligned}$$

Reconhecem-se os pares de números - tipo de face, tipo de vértice - associados aos sólidos platônicos. Considerando as imagens de Q pelas p rotações de eixo \overleftrightarrow{OP} , $Q_i = \alpha^i(Q)$, $i = 0, 1, \dots, p-1$, obtemos os vértices de um polígono esférico regular, com P como centro (figura seguinte).



As imagens de R são os pontos médios das arestas desse polígono: a imagem do plano H , e em particular de Q , pela rotação $\alpha^{-1} = R_J R_H$ é $R_J R_H(H) = R_J(H)$ ou seja, é dada pela reflexão no plano J ; como o plano L é perpendicular a J (porque, como vimos, $r = 2$) ele é enviado em si mesmo por R_J : R é portanto o ponto médio da aresta $\overline{QQ_{p-1}}$.

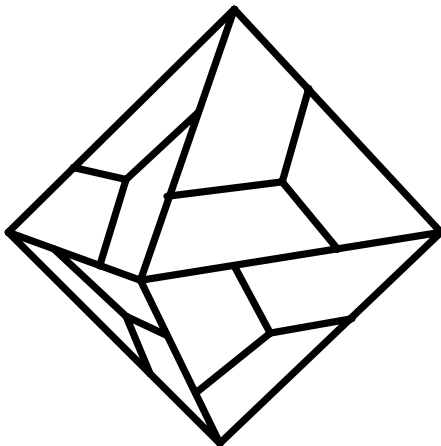
Em qualquer dos cinco casos, a existência dos sólidos platônicos inscritos na esfera, e a estrutura dos seus grupos de rotação, implica que as rotações em torno de \overleftrightarrow{OQ} enviam aquele p -polígono em q polígonos com vértice Q e continuando a rodar em torno de outros vértices destes polígonos obtemos uma *pavimentação* da esfera por p -polígonos, cujos vértices são os do correspondente sólido platónico inscrito (os centros, sucessivas imagens de P , são os vértices do sólido dual); pela escolha de P e Q à distância mínima, estes vértices e centros são todos os pólos de rotações de G de ordem maior ou igual a três; os pontos médios das arestas, sucessivas imagens de R , são pólos de rotações de ordem dois (meios-giros): temos assim todas as rotações do sólido platónico construído.

Vejam agora que G não contém de facto mais nenhuma rotação: se contivesse seria um meio-giro γ cujo pólo, digamos S , estaria ou no interior de uma das arestas, mas diferente do ponto médio (um dos derivados de R) ou no interior de um dos polígonos, mas diferente do centro. Seja Q o vértice mais perto de S e P o centro do polígono: usando a notação anterior para α e β relativamente a P e Q , teríamos que $\gamma\beta$ seria uma rotação de ordem q com o pólo $\gamma(Q)$ mais perto de P do que Q , o que contraria a escolha de P e Q a distância mínima, excepto se acontecesse $\gamma(Q) = P$, caso em que S seria o ponto médio de \overline{PQ} ; mas neste caso teríamos que $\beta\gamma(P) = Q$ e como nenhuma das rotações de ordem maior do que dois envia P em Q , $\beta\gamma$ seria um meio-giro e portanto $\beta\gamma = \gamma$ logo $\beta = id$ o que é absurdo.

Provámos assim o seguinte teorema:

Teorema 122 *Seja G um grupo finito de rotações de \mathbb{R}^3 . Então G é cíclico, diedral, ou um grupo de rotações de um sólido platónico.*

Os grupos finitos de rotações de \mathbb{R}^3 são grupos de simetria. Para cada um dos casos do teorema anterior é possível construir um sólido cujo grupo finito das simetrias consista apenas de rotações.



Como vimos, no caso dos grupos cíclicos e diedrais esses sólidos podem obter-se de prismas ou anti-prismas acrescentando *telhados*; no caso dos 3 grupos de rotações de sólidos platónicos, podemos, analogamente, acrescentar *telhados* às faces desses sólidos que impeçam as reflexões mas permitam todas as simetrias rotacionais: por exemplo, considerando o tetraedro, o octaedro e o icosaedro, podemos acrescentar às faces triangulares um telhado segundo o padrão representado na figura anterior.

8.6 Subgrupos finitos de $I(\mathbb{R}^3)$

Como todo o grupo finito de isometrias, G , tem um ponto que é fixo por todos os seus elementos, podemos, sem perda de generalidade, supor que $G \leq O(3)$. Como já classicámos o caso $G \leq SO(3)$, supomos agora que G contém uma *isometria inversa*.

Distinguimos dois casos, consoante G contém ou não a *inversão na origem*, $I_0(x) = -x$.

Seja $H = G \cap SO(3)$ o subgrupo das rotações de G e $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ os seus elementos; então, se $I_0 \in G$, as isometrias inversas $G - H$ são $I_0\alpha_1, I_0\alpha_2, \dots, I_0\alpha_n$ e, à semelhança do que fizemos para os sólidos platónicos com simetria central, é fácil provar que G é isomorfo a $H \times \{\pm 1\}$. Reciprocamente, dado um qualquer subgrupo finito $H \leq SO(3)$ se definirmos G por $G = H \cup \{I_0h : h \in H\}$, mostra-se, usando o facto que I_0 comuta com qualquer $f \in O(3)$, que G é um grupo e isomorfo a $H \times \{\pm 1\}$.

Exercício 123 Prove as afirmações do último parágrafo.

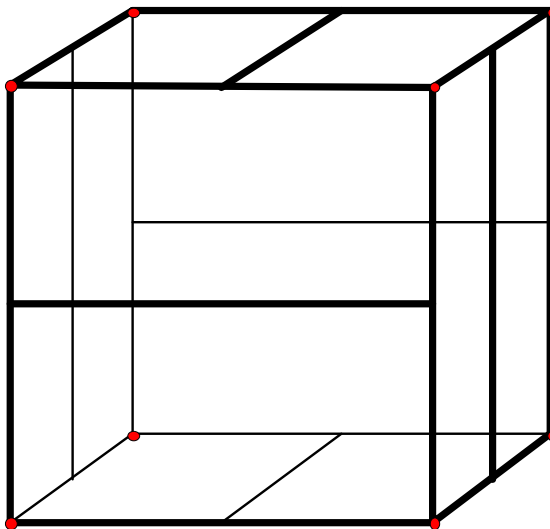
Designemos por \overline{H} o grupo $H \times \{\pm 1\}$ e por T , O e I os grupos de rotações do tetraedro, octaedro (ou cubo) e icosaedro (ou dodecaedro) respectivamente. Concluimos que se um grupo de isometrias finito contém a *inversão central* ele é um dos grupos

$$\overline{C}_1, \overline{C}_2, \overline{C}_3, \dots, \overline{D}_2, \overline{D}_3, \overline{D}_4, \dots, \overline{T}, \overline{O}, \overline{I}$$

Exercício 124 Construa prismas ou anti-prismas (com ou sem telhados) que tenham grupos de simetria \overline{C}_i , $i = 1, 2, \dots$ e \overline{D}_i , $i = 2, 3, \dots$ (Sugestão: recorde que os prismas \mathbb{P}_n e anti-prismas \mathbb{P}'_n têm simetria central quando n é par ou ímpar, respectivamente...)

Nota: Para construir sólidos com grupos de rotações C_n e D_n , bastar-nos-ia considerar prismas com telhados adicionados; a razão para considerar também *anti-prismas* prende-se com a sugestão dada no exercício anterior.

Os grupos \overline{O} e \overline{I} são, como vimos anteriormente, os grupos de simetria do octaedro e icosaedro, respectivamente; o mesmo não acontece com \overline{T} que não é isomorfo a S_4 , o grupo de simetria do tetraedro: no entanto, podemos construir um sólido com grupo de simetria \overline{T} , considerando um cubo com um padrão adicionado às faces, como se representa na figura seguinte (e que pode ser realizado através da adição de telhados com cumieiras segundo as direcções desenhadas)



Exercício 125 Prove que o objecto representado na figura anterior tem de facto grupo de simetria $\overline{T} \cong A_4 \times \{\pm 1\}$.

Consideramos agora o segundo caso: de G ser um subgrupo finito de $O(3)$ com isometrias inversas mas sem inversão central.

Sejam $H = G \cap SO(3) = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ e $G - H = \{\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n\}$ em que nenhuma das isometrias inversas β_i é a inversão central I_0 . Sejam $\gamma_i = I_0\beta_i$, $i = 1, 2, \dots, n$ e $K = H \cup \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$: isto é, substituímos em G todas as isometrias inversas pelas suas compostas com a inversão central, obtendo assim n rotações distintas; se $\alpha_j = \gamma_i = I_0\beta_i$, seria $\alpha_j\beta_i^{-1} = I_0$ o que contraria a nossa hipótese: temos assim que K é um conjunto de $2n$ rotações. Acontece que K é um grupo:

Exercício 126 Mostre que de facto $K \leq SO(3)$.

Reciprocamente suponhamos que temos um grupo de rotações $K \leq SO(3)$ que contém H como subgrupo de índice 2; sejam γ_i , $i = 1, 2, \dots, n$ as rotações de $K - H$: $K = H \cup \{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n\}$; Seja G o conjunto que se obtém de K substituindo as n rotações γ_i pelas suas compostas com I_0 , $\beta_i = I_0\gamma_i$: então G é um grupo, que contém H como subgrupo de índice 2, e que não contém a inversão central I_0 .

Exercício 127 Prove as afirmações anteriores sobre o conjunto G .

Notação: Vamos designar o grupo G obtido de K, H pelo processo descrito por $K \bowtie H$.

Exercício 128 Mostre que K e $K \bowtie H$ são isomorfos.

Em conclusão: mostrámos que se G é um subgrupo finito de $O(3)$, com *isometrias inversas todas diferentes da inversão central*, e se H é o seu subgrupo de rotações, então G é igual a $K \bowtie H$ em que K é um subgrupo de $SO(3)$ que contém H como subgrupo de índice 2. Em face do último exercício, vemos que do ponto de vista algébrico (a menos de isomorfismo) não há novos grupos neste caso, mas há descrições diferentes em termos do tipo de isometrias que os constituem (só rotações ou rotações e isometrias inversas) o que tem relevância quando os estudamos como grupos de simetria de certos sólidos.

Podemos agora completar a nossa análise, verificando quais os grupos de rotações H que são subgrupos de índice 2 de grupos de rotações maiores; temos cinco casos: $H = C_n, D_n, T, O, I$.

Os grupos de rotações de ordem $2n$ que contém C_n são C_{2n} e D_n ; o único grupo de ordem $4n$ que contém D_n é D_{2n} ; quanto aos grupos T, O, I , não há grupos de rotações em que metade dos seus elementos sejam os 60 elementos de I ou os 24 elementos de O , mas $T \cong A_4 \leq S_4 \cong O$.

Concluimos, assim, a classificação dos grupos finitos de isometrias de \mathbb{R}^3 :

Teorema 129 (de Hessel) *Seja $G \leq O(3)$ finito.*

1. Se $G \leq SO(3)$ (G é um grupo de rotações), G é um dos grupos

$$C_n, D_n, T, O, I$$

2. Se $G \not\leq SO(3)$ (G contém isometrias inversas) temos dois casos:

(a) Se $I_0 \in G$ (G contém a inversão central) G é um dos grupos

$$C_n \times \{\pm 1\}, D_n \times \{\pm 1\}, T \times \{\pm 1\}, O \times \{\pm 1\}, I \times \{\pm 1\}$$

(b) Se $I_0 \notin G$, G é um dos grupos

$$C_{2n} \bowtie C_n, D_n \bowtie C_n, D_{2n} \bowtie D_n, O \bowtie T$$

Finalmente, pode-se verificar que os últimos grupos que obtivemos são também grupos de simetria de sólidos, o que deixamos como exercício.

Exercício 130 *Verifique que $O \rtimes T$ é simplesmente o grupo de simetria do tetraedro.*

Exercício 131 *Construa prismas e anti-prismas (com telhados) cujos grupos de simetrias sejam $C_{2n} \rtimes C_n$, $D_n \rtimes C_n$ e $D_{2n} \rtimes D_n$.*

Note-se que do ponto de vista puramente algébrico, depois do estudo dos grupos finitos de rotações, a consideração de grupos finitos de isometrias contendo também isometrias inversas apenas acrescentou àquela lista de rotações os seus produtos directos com $\{\pm 1\}$. Portanto, um grupo finito de isometrias de \mathbb{R}^3 é isomorfo a um grupo cíclico, diedral, o produto de um destes com $\{\pm 1\}$, ou ao grupo de simetrias de um sólido platónico.

8.7 Exercícios de revisão e aplicação...

1. Excluindo o tetraedro, descreva as simetrias de uma pirâmide com o polígono regular de n lados, P_n , como base. Excluindo o octaedro, descreva também as simetrias da correspondente bipirâmide.
2. Descreva as simetrias do prisma \mathbb{P}_n , excluindo o cubo ($n = 4$); descreva também as simetrias do anti-prisma \mathbb{P}'_n , excluindo o caso do octaedro.
3. Descreva as simetrias do *octaedro truncado*.
4. Prove ou negue a seguinte afirmação: uma reflexão rotativa que não é uma inversão tem ordem infinita.
5. Mostre que o produto de dois meios-giros $R(m, \pi)$ e $R(n, \pi)$ é um meio-giro *sse* os eixos m e n são perpendiculares.
6. Diga, justificando, quais das seguintes afirmações são verdadeiras e quais são falsas:
 - (a) Um grupo finito de isometrias directas de \mathbb{R}^3 é isomorfo a um dos grupos C_n , D_n , T , O ou I .
 - (b) Os grupos O e I são os únicos grupos de rotações G tais que G não é subgrupo de um grupo de rotações cuja ordem é o dobro da de G .
 - (c) Se R_x, R_y, R_z designam os meios-giros em torno do eixo dos xx do eixo dos yy e do eixo dos zz , respectivamente, então $R_y R_x = R_z$.
 - (d) Se a figura X está contida na figura Y , então o grupo de simetria de X é um subgrupo do grupo de simetria de Y : $S(X) \leq S(Y)$.
 - (e) Se um grupo G de isometrias de \mathbb{R}^3 contém apenas a identidade e rotações, então G é um grupo cíclico.
 - (f) Os grupos $C_{2n} \rtimes C_n$, $D_n \rtimes C_n$ e $D_{2n} \rtimes D_n$ têm ordem $2n$.

- (g) Todo o subgrupo do grupo I de rotações do icosaedro é o próprio I ou então um grupo C_n ou D_n .
 - (h) O grupo $C_2 \bowtie C_1$ contém a identidade e uma reflexão; o grupo $\overline{C_1}$ contém a identidade e uma inversão.
 - (i) Existe um único ponto que é fixo pelos elementos de um grupo finito de rotações.
 - (j) Rotações distintas α, β e $\alpha\beta$ podem ter eixos concorrentes e coplanares
7. Dê exemplo de um grupo de rotações infinito.
 8. Determine o grupo de simetria do cuboctaedro.
 9. Determine os grupos formados pelas simetrias que descreveu nos exercícios 1., 2. e 3.
 10. Para cada um dos sólidos platônicos, descreva o poliedro convexo determinado pela união das *figuras-vértice* de todos os seus vértices.
 11. Vimos que todo o grupo finito de isometrias de \mathbb{R}^3 é um grupo de simetrias; será também verdade que todo o grupo de isometrias é um grupo de simetrias? E todo o grupo de rotações?
 12. Considere os sólidos convexos cujas faces são triângulos isósceles congruentes; quantos desses sólidos há? Quais os seus grupos de simetria?

9 Grupos Cristalográficos

Vimos, nas secções anteriores, a classificação dos subgrupos finitos de $I(\mathbb{R}^3)$; entre os subgrupos não finitos de $I(\mathbb{R}^3)$, os mais importantes são os que estão ligados à *teoria matemática dos cristais*. Associado aos cristais, com uma estrutura atômica espacialmente ordenada e regular, está o conceito de *reticulado* (ou *malha*; *lattice* em inglês).

Definição 132 *Um reticulado $L \subset \mathbb{R}^n$ é o conjunto das combinações lineares inteiras de uma base $\{e_i\}_{i=1,\dots,n}$ de \mathbb{R}^n : $L = \{\sum_{i=1}^n r_i e_i : r_i \in \mathbb{Z}\}$.*

No plano, um reticulado aparece como o conjunto dos vértices de uma *malha* de paralelogramos, daí o nome.

Considerando L como um subgrupo do grupo aditivo \mathbb{R}^n , L é naturalmente isomorfo ao grupo \mathbb{Z}^n dos pontos de coordenadas inteiras, e que é o reticulado correspondente à base canónica. Como subgrupo do grupo aditivo \mathbb{R}^n , L é também naturalmente isomorfo a um subgrupo de $I(\mathbb{R}^n)$ constituído por translações: $T_L = \{T_a : a \in L\}$; claro que $T = \langle T_{e_1}, T_{e_2}, \dots, T_{e_n} \rangle$. Reciprocamente dado um subgrupo de translações, $G_T \leq I(\mathbb{R}^n)$, gerado por n translações em direcções independentes, temos associado um reticulado $L = \{f(0) : f \in G_T\}$ e $T_L = G_T$.

Exercício 133 *Mostre que qualquer recta por dois pontos de um reticulado L contém um número infinito de pontos de L .*

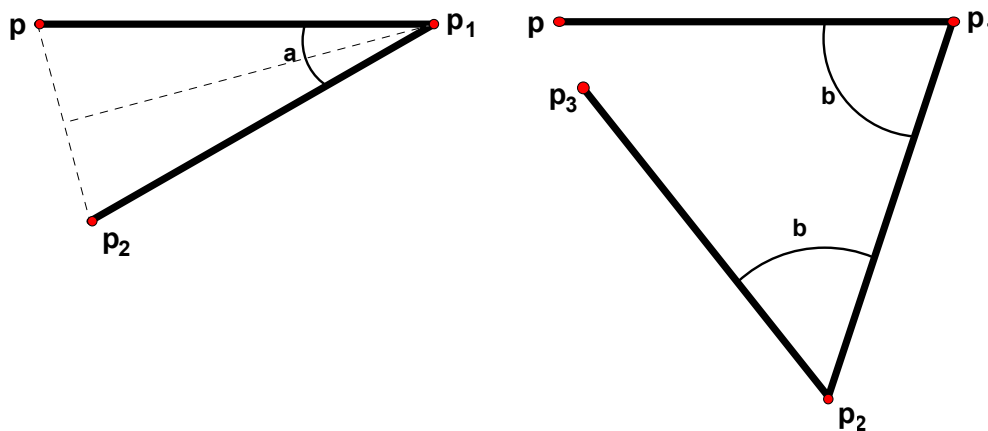
Dada um reticulado L as translações que o deixam *invariante* são precisamente as de T_L . L pode ser invariante por outras isometrias: mas no caso das rotações há uma restrição quanto às ordens que elas podem ter (dita *restrição cristalográfica*, que tem importância especial para as formas possíveis que os cristais podem assumir):

Teorema 134 (Restrição cristalográfica) *Se $L \subset \mathbb{R}^n$ é um reticulado com $n = 2$ ou 3 e $\rho \in S(L)$ é uma rotação de ordem m , então*

$$m = 2, 3, 4 \text{ ou } 6$$

Prova. *Vejamus primeiro o caso $n = 2$. É claro que qualquer rotação $R(C, \theta) \in S(L)$ tem ordem finita: porque dado um ponto $q \in L$, $q \neq C$, há apenas um número finito de pontos de L à mesma distância de C . Considere-se o conjunto $M \subset \mathbb{R}^2$ dos centros de todas as rotações de $S(L)$; $L \subset M$ porque L é invariante por todos os meios-giros com centros nos seus pontos. M é um conjunto discreto: dada uma rotação $\rho \in S(L)$ de ordem n com centro $p \in M - L$, seja q um ponto de L a distância mínima de p ; p é o centroide da órbita de q pela acção do grupo cíclico $\langle \rho \rangle$: é claro que no interior do polígono regular de vértices $v_i = \rho^i(q)$, $i = 1, 2, \dots, n$, não há pontos de L e, por isso, também não pode haver outro centro de uma rotação de $S(L)$. Recorde-se que a conjugação $f\rho f^{-1}$, por uma qualquer isometria f , é ainda uma rotação de ordem n e centro $f(p)$, e está em $S(L)$ se f é uma simetria de L ; há portanto um número infinito de rotações de ordem n em $S(L)$: seja $p_1 \neq p$ um centro de uma dessas rotações a distância mínima de p e seja*

$p_2 = R(p_1, 2\pi/n)(p)$ outro desses centros (ver as figuras seguintes)



Ora $d(p_2, p) = 2 \sin(\pi/n)d(p, p_1)$ e portanto seria $d(p_2, p) < d(p, p_1)$ se fosse $n > 6$; considerando agora $p_3 = R(p_2, 2\pi/n)(p_1)$ verifica-se que se $n = 5$ (figura da direita, com $b = 2\pi/5$) seria $d(p_3, p) < d(p, p_1)$. Cada um dos casos $n = 2, 3, 4, 6$ pode de facto ocorrer como se pode verificar considerando os reticulados correspondentes a pavimentações do plano por quadrados ou por triângulos equiláteros.

O caso $n = 3$ decorre do anterior: seja $L \subset \mathbb{R}^3$ um reticulado. O mesmo argumento do caso anterior mostra que toda a rotação de $S(L)$ tem ordem finita; se $\rho = R(l, 2\pi/n) \in S(L)$, seja $q \in L - l$ um ponto a distância mínima de l e seja H um plano por q ortogonal ao eixo l : claro que ρ restrito a H é uma rotação de centro $p = H \cap l$. Vamos considerar todas as rotações de $S(L)$, de ordem n e com eixos paralelos a l e, portanto, que deixam H invariante; tomando os conjugados $T_a \rho T_a^{-1}$ para todos os $a \in L$, vemos que há um número infinito dessas rotações. O argumento do caso anterior aplica-se agora com as restrições a H dessas rotações. ■

Prova alternativa. Seja $L \subset \mathbb{R}^n$ um reticulado com base $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ e $f \in S(L) \cap O(n)$ (f é linear): a matriz Z de f relativamente àquela base é uma matriz inteira. Quando $n = 2, 3$ e f é uma rotação, existe uma base ortonormada em relação à qual a matriz de f é

$$M_\theta = \begin{bmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} M_\theta & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Esta matriz e a matriz Z são semelhantes, através da matriz mudança de base, e têm portanto o mesmo traço, que é um inteiro. Então $2 \cos \theta \in \mathbb{Z}$: as únicas possibilidades são $\cos \theta = 0, \pm 1/2, \pm 1$ que correspondem a f ter ordem 2, 3, 4 ou 6. ■

Exercício 135 Dê exemplos de reticulados no plano que tenham, entre as suas simetrias, rotações de ordem 2, 3, 4 ou 6.

Exercício 136 Mostre que se as simetrias de um reticulado contêm rotações de ordem 4, então não contêm rotações de ordem 3 nem 6.

Exercício 137 Explique como é que a prova alternativa do teorema anterior pode ser completada, estendendo ao caso em que $f \in S(L)$ não é linear (pode até o seu centro não

ser sequer um ponto de L ou, no caso $n = 3$, o seu eixo não passar por L) (Sugestão: recorde que toda a isometria se escreve como a composta de uma aplicação ortogonal com uma isometria)

Definição 138 Um grupo cristalográfico é um subgrupo $G \leq I(\mathbb{R}^n)$ cujo subgrupo das translações, $G_T = G \cap \mathbb{R}^n$, constitui um reticulado.

Exercício 139 Mostre que a definição anterior é equivalente a dizer que G contém n translações independentes, mas não contém translações por vectores de norma arbitrariamente pequena.

Note-se que na definição de grupo cristalográfico é apenas dito que o subgrupo das translações forma um reticulado, mas não que o grupo em questão é o grupo de simetria desse reticulado, nem mesmo que é um subgrupo deste; a equivalência de grupos cristalográficos é feita, digamos, *a menos dos respectivos reticulados*: as aplicações mais naturais que enviam um reticulado noutra reticulado são aplicações afim, porque preservam as relações de colinearidade e coplanaridade. Por isso, dizemos:

Definição 140 Dois grupos cristalográficos $G, G' \leq I(\mathbb{R}^n)$ são equivalentes se são conjugados em $Afim(\mathbb{R}^n)$.

Como é indicado mais adiante, sabe-se (1910, *Bieberbach*) que dois grupos cristalográficos são equivalentes se e só se são isomorfos como grupos, em abstracto.

9.1 A classificação dos grupos cristalográficos

Esta classificação existe para $n = 2$ e 3 : foi feita no final do século XIX por *E.S.Fedorov* e, um pouco mais tarde, também por *A.Schoenflies*. A menos de equivalência há 219 grupos cristalográficos espaciais; ou 230 se se considerar apenas as aplicações afins que preservam a orientação (isto é, cuja parte linear tem determinante positivo). No caso $n = 2$, estes grupos dizem-se *grupos ornamentais* ou *grupos de papel-de-parede*, pois representam todos os tipos de padrões de simetria que podemos encontrar nesses papéis: existem, precisamente, 17 *grupos de papel-de-parede*; sabe-se que todos estes 17 padrões eram conhecidos, pelo menos empiricamente, pelos Mouros, como se pode verificar nos ornamentos do Palácio de Alhambra em Granada (a história da identificação recente de todos os 17 padrões no Alhambra é muito curiosa: ver o excelente vídeo [12]).

Há muitos textos de divulgação matemática (como rapidamente se comprova por uma pesquisa na *www*) sobre os grupos de papel-de-parede, e há muitas provas elementares e relativamente simples de que são de facto 17 e que contêm, em geral, a descrição de cada um deles: ver [10] ou [4, Capítulo 11].

O livro *Tilings and Patterns*, [9], é a referência máxima em questões de simetria: nas páginas 40 – 45 pode encontrar também uma descrição cuidada dos 17 padrões; este livro contém também uma prova da classificação, mas é menos elementar (aparece como consequência de uma classificação mais geral de certos tipos de pavimentação); é curioso, comparando com a última referência, que este livro ainda afirma que a ideia de que no Alhambra seria possível detectar os 17 padrões é infundada.

Exercício 141 *Obtenha, nas referências dadas, uma descrição dos 17 grupos cristalográficos planos e exemplos de padrões de simetria para cada um deles; prepare um processo com transparências para verificar, em cada caso, as simetrias desses padrões.*

Nota: em dimensão 2, uma classificação mais fácil do que a dos grupos de papel-de-parede é a dos chamados *grupos de friso*: são grupos $G \leq I(\mathbb{R}^2)$ em que o subgrupo das translações, $G_T = G \cap \mathbb{R}^n$, não constitui um reticulado mas contém apenas translações em direcções paralelas e sem translações por vectores de norma arbitrariamente pequena: ou seja, $G_T = \langle T_a \rangle$. Existem, a menos de equivalência, 7 *grupos de friso*: ver [4, Capítulo 10].

Exercício 142 *Complemente o exercício anterior, incluindo os grupos de friso.*

Seja $G \leq I(\mathbb{R}^n)$ um grupo cristalográfico e $G_T = G \cap \mathbb{R}^n$ o reticulado associado. Recorde-se, mais uma vez, que toda a isometria $f \in I(\mathbb{R}^n)$ se escreve como $f = T_a M$ com $M \in O(n)$; M diz-se a parte ortogonal ou parte linear de f : dito de outro modo, $I(\mathbb{R}^n)$ é o *produto semi-directo* $O(n) \tilde{\times} \mathbb{R}^n$. O subgrupo \bar{G} das partes ortogonais dos elementos de G é, portanto, um subgrupo de $O(n)$ e é naturalmente isomorfo ao grupo quociente G/G_T (G_T é subgrupo normal de índice finito): é chamado o *grupo pontual* de G (*point group* em inglês).

Em 1910, *L. Bieberbach* provou os seguintes resultados gerais:

1. O subgrupo \bar{G} é finito: G_T é subgrupo normal de índice finito (para $n = 3$ tinha sido provado por *Schoenflies*).
2. Dois grupos cristalográficos são equivalentes sse são isomorfos.
3. Para cada n , existe apenas, a menos de equivalência, um número finito de grupos cristalográficos.

Nota: $G_T \leq G$ é isomorfo a \mathbb{Z}^n , é normal de índice finito, e, além disso, mostra-se que coincide com o seu *centralizador* em G : em 1948, *H. Zassenhaus* mostrou que a existência, num grupo G , de um subgrupo com estas propriedades, é condição suficiente para G ser isomorfo a um grupo cristalográfico.

Note-se que o grupo pontual \bar{G} de um grupo cristalográfico G não é necessariamente isomorfo ao estabilizador, $Stab(x) = G_x$, de algum ponto x para a acção de G em \mathbb{R}^n : pode até nem ser isomorfo a nenhum subgrupo de G . No entanto \bar{G} actua no reticulado $L \equiv G_T$:

Lema 143 *Seja G um grupo cristalográfico com reticulado L e grupo pontual \bar{G} ; então $\bar{G} \leq S(L)$.*

Prova. *Seja $M \in \bar{G}$ e $v \in L$; por definição, M é a parte ortogonal de algum elemento $f \in G$: $f = T_x M$ para algum $x \in L$; ora $f T_v f^{-1} \in G$ mas*

$$f T_v f^{-1} = (T_x M) T_v (M^{-1} T_{-x}) = T_x (M T_v M^{-1}) T_{-x} = T_x T_{Mv} T_{-x} = T_{Mv}$$

logo $Mv \in L$; como isto não depende do x , concluímos a prova. ■

Exercício 144 *Dê exemplo de um grupo cristalográfico G , com reticulado L , tal que G não seja subgrupo de $S(L)$.*

Dê exemplo de um grupo cristalográfico G que não contenha nenhum subgrupo isomorfo ao seu grupo pontual \bar{G} .

Em dimensão 3, as diferentes formas que os cristais podem tomar, estão relacionadas com os possíveis *grupos pontuais* dos grupos cristalográficos (isto prende-se com o chamado *domínio fundamental* para a acção do grupo em \mathbb{R}^3); pelo Lema e pelo último teorema, os elementos de $\bar{G} \leq O(3)$ satisfazem a restrição cristalográfica. Mostra-se que, a menos de conjugação, há exactamente 32 subgrupos finitos de $O(3)$ que satisfazem a restrição cristalográfica (ver um esquema de prova em [4]): cada um deles é grupo pontual de um grupo cristalográfico e, com uma única excepção, todos correspondem às formas de cristais que ocorrem de facto na natureza (ver [11]).

Referências

- [1] Cederberg, Judith N., *A Course in Modern Geometries*, Springer-Verlag (1989)
- [2] Fraleigh, John B., *A First Course in Abstract Algebra*, Addison-Wesley
- [3] Fenn, Roger, *Geometry*, Springer-Verlag (2001)
- [4] Martin, George E., *Transformation Geometry - An Introduction to Symmetry*, Springer-Verlag (1982)
- [5] Rees, Elmer G., *Notes on Geometry*, Springer-Verlag (1983)
- [6] Stillwell, John, *Geometry of Surfaces*, Springer-Verlag (???)
- [7] Stillwell, John, *Classical Topology and Combinatorial Group Theory*, Springer-Verlag
- [8] Kuipers, J. B., *Quaternions and Rotation Sequences*, Princeton University Press (1998)
- [9] Grünbaum and Shephard, *Tilings and Patterns*, Freeman (1987)
- [10] Schwarzenberger, R. L. E., *The seventeen plane symmetry groups*, *Mathematical Gazette*, vol. 58 (1974), 123-131
- [11] Buerger, M. J., *Elementary Crystallography*, John Wiley (1956)
- [12] González, A. F. C. e Garcia, B. G., *Arabescos y Geometría*, UNED-Espanha (1995)

Índice

- Acção de grupo, 28
 - órbita, 27
 - estabilizador, 29
 - subgrupo de isotropia, 29
- Afim
 - aplicação, 6
 - equiafim, 19
 - no plano, 19
 - shears e strains, 19
 - pontos independentes, 5
 - subespaço, 6
 - base de subespaço, 6
- Anti-prismas, *ver* Prismas
- Círculos máximos, 58
- Cauchy-Schwarz, 3
- Colineação, 24
- Coordenadas homogéneas, 9
- Cristais, *ver* Grupo cristalográfico
- Dilatação, 15
- Espaço métrico, 3
- Esticção, *ver* Homotetia
- Fórmula de Euler, 45
- G-conjunto, *ver* Acção de grupo
- Gram-Schmidt, 7
- Grupo
 - alternativo, 27, 53
 - apresentação finita, 26
 - bowtie, 65
 - cíclico, 27
 - cristalográfico, 68
 - de friso, 71
 - de papel-de-parede, 70
 - de simetria, 24
 - de simetria finito
 - no espaço, 40, 63
 - no plano, 27
 - de spin, 37
 - diedral, 26
 - finito de rotações do espaço, 58
 - ortogonal, 4
 - pontual, 71
 - simétrico, 27
- Grupo linear especial, 4
- Grupo linear geral, 4
- Homeomorfismo, 3
- Homotetia, 13
- Imersão isométrica, 3
- Inversão
 - central, 63
 - rotativa, 30
- Isometria, 3
 - directa, inversa, 5
- Métrica euclidiana, 3
- Octoniões, 35
- Ortogonal, 4
 - aplicação, 4
 - matriz, 4
- Polígonos regulares, 25
- Poliedro
 - convexo, 44
 - regular, 43
- Ponto fixo, 14
- Prismas, 41
 - telhados, 41
- projecção estereográfica, 59
- Quaterniões, 33
 - acção de grupo da esfera no espaço, 38
 - conjugados e inversos, 36
 - esfera tridimensional, 37
 - imaginários puros, 35
 - relação fundamental, 35
 - unitários, 37

Razão de ouro, 49
Reflexão
 deslizante, 9
 em hiperplano, 7
 esticada, 14
 rotativa, 30
Regra do paralelogramo, 3
Reticulado, 68
Rotação, 9
 esticada, 14
 meio-giro, 10
 pólos, 58
 Parafuso, 29

Sólidos Arquimedianos, 56
Sólidos Platônicos, 43
 dualidade e inclusão, 47
 grupos de simetria, 52
Simetria
 central, 53
Similitude, 3
 no espaço, 31
 no plano, 12

Tenda, 50
Teorema
 Adição de ângulos para rotações, 11
 de Leonardo, 27
 Hessel, 65
 Hjelmslev, 10
 restrição cristalográfica, 68
Translação, 9
Triângulo esférico, 58