Exercício 4: Recorde e escreva uma prova de que a métrica acabada de definir em $\Re^n$, d(x,y)=$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$, é de facto uma métrica; recorde também, a propósito, a desigualdade de Cauchy-Schwarz: $|\langle x,y\rangle| \le \|x\|.\|y\|$; recorde ainda a regra do paralelogramo: $\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\|x\|^2+2\|y\|^2$.

Comecemos por recordar a definição de norma. Dado *K* espaço vectorial (*K*=C ou K=ℂ). Uma norma em V é uma função $\| \ \|: \mathrm{V} \to \Re^n$ com as seguintes propriedades:

N-1) $\|x\| \ge 0$ e $\|x\|=0$ sse x=0;

N-2) $\|\lambda x\| = |\lambda|.\|x\|, \forall x \in V, \forall \lambda \in \kappa$;

N-3) $\|x+y\| \le \|x\|+\|y\| \forall x,y \in V$;

Quero mostrar que d(x,y)=$\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=\|x-y\|$ é uma métrica em $\Re^n$.

Ora,

d-1) d(x,y)=0$\Leftrightarrow$ $\|x-y\|$=0 $\overset{N-1}{\Leftrightarrow}$ x-y=0 $\Leftrightarrow$ x=y;

d-2) d(x,y)=$\|x-y\| \Leftrightarrow \|-1(y-x)\| \overset{N-2}{\Leftrightarrow} |-1|.\|y-x\| = \|y-x\|$= d(y,x) $\forall x,y \in \Re^n$;

d-3) d(x,z)=$\|x-z\| = \|x-y+y-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \overset{N-3}{\le} \|x-y\|+\|y-z\|$= d(x,y)+(y,z) $\forall x,y,z \in \Re^n$;

Resta-nos mostrar N-3), também conhecida por **desigualdade de Minkowski**.

Nota: $\|x\|^2=\langle x,x\rangle=\sum_{i=0}^{n}x_i^{\,2}$ em que $\langle x,y\rangle=\sum_{i=0}^{n}x_i y_i$ é o produto escalar usual.

Ora, dados $x,y \in \Re^n$ com $x \ne 0$ temos que:

$$\|x+y\|^2=\langle x+y,x+y\rangle=\langle x,x\rangle+\langle x,y\rangle+\langle y,x\rangle+\langle y,y\rangle \overset{*1}{=} \|x\|^2+2\langle x,y\rangle+\|y\|^2 \overset{*2}{\le} \|x\|^2+2\|x\|.\|y\|+\|y\|^2=(\|x\|+\|y\|)^2$$
$$\therefore \|x+y\|^2 \le (\|x\|^2+\|y\|^2) \overset{*3}{\Leftrightarrow} \|x+y\| \le \|x\|+\|y\|$$

***$_1$:** produto escalar é simétrico;

***$_2$:** pela desigualdade de Cauchy-Schwartz e fazendo uso da seguinte propriedade $\forall a \in \Re : a \le |a|$.

***$_3$:** atendendo que $\begin{array}{cccc} f: & \Re^+{}_0 & \to & \Re \\ & x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ é uma função continua e estritamente crescente.

Outra prova da desigualdade de Minkowski usando a regra do paralelogramo.

Pela regra do paralelogramo sabemos que: $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$

$$\Leftrightarrow \|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x-y\|^2$$

$$\Leftrightarrow \|x+y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2 + 2\langle x, y\rangle$$

$$\Leftrightarrow \|x+y\|^2 \overset{*2}{\le} 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 + 2\|x\|.\|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2$$

$$\overset{*3}{\therefore} \|x+y\| \le \|x\| + \|y\|$$

Vamos agora mostrar a desigualdade de Cauchy-Schwartz. Queremos provar que $|\langle x, y\rangle| \le \|x\|.\|y\|$.

Dados $x, y \in \Re^n$ com $x \ne 0$ (no caso de x=0 a desigualdade é trivial) temos que:

$$\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y\rangle = \left(\|x\|y - \frac{\langle x, y\rangle}{\|x\|}x\right)^2 \ge 0$$

$$\therefore \langle x, y\rangle^2 \le \|x\|^2\|y\|^2$$

$$\overset{*3}{\therefore} |\langle x, y\rangle| \le \|x\| \ \|y\|$$

Prova da regra do paralelogramo:

$$\begin{aligned}
\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle + \langle x-y, x-y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + \langle x,y\rangle + \langle y,x\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle + \langle x,-y\rangle + \langle -y,x\rangle + \langle -y,-y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - \langle x,y\rangle - \langle y,x\rangle - \langle y,-y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle - \langle y,-y\rangle \\
&= \langle x,x\rangle + 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle + \langle x,x\rangle - 2\langle x,y\rangle + \langle y,y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 + \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2 \\
&= 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2
\end{aligned}$$

Curiosidade: Num espaço vectorial real, E, uma norma que provenha de um produto interno (escalar), verifica a regra do paralelogramo.

Por exemplo: em $\Re^n$ com $n \geq 2$ a norma $\|x\|_1 = |x_1| + |x_2| + ... + |x_n|$ não é dada por nenhum produto interno, pois não verifica a regra do paralelogramo porque:

$\exists x, y \in \Re^n, n \geq 2 : \|x+y\|_1^{\ 2} + \|x-y\|_1^{\ 2} \neq 2\|x\|_1^{\ 2} + 2\|y\|_1^{\ 2}$.

Consideremos: x=(0,1,0,....,0) e y=(1,0,0,...,0) $\in \Re^n$. Deste modo obtemos:

$8 = \|x+y\|_1^{\ 2} + \|x-y\|_1^{\ 2} \neq 4 = 2\|x\|_1^{\ 2} + 2\|y\|_1^{\ 2}$.

Exercício realizado por: Catarina Soares; Joana Sousa; Rita Mota; Sílvia Rocha; Sónia Silva.

Turma P2 de Tópicos de Geometria.