Exercício 9: Seja $A \in GL(n, \Re)$ e $L : \Re^n \to \Re^n$ a aplicação linear correspondente. Mostre que L é ortogonal se e só se $A^{-1} = A^t$, isto é, a inversa de A é a sua transposta (diz-se, correspondentemente, que A é uma matriz ortogonal).

ALGUMAS DEFINIÇÕES NECESSÁRIAS PARA A RESOLUÇÃO DESTE EXERCÍCIO:

Definição: Sejam A e B dois conjuntos. Diz-se que uma correspondência $f : A \to B$ é uma aplicação se, por f, a cada elemento $a \in A$ corresponde um e um só elemento de B, que designaremos por $f(a)$.

Definição: Sejam E e E' dois espaços vectoriais sobre o mesmo corpo K e $f : E \to E'$ uma aplicação. Diz-se que f é uma aplicação linear, se satisfaz as seguintes propriedades:

1. $(\forall x, y \in E)\ f(x+y) = f(x) + f(y)$

2. $(\forall \alpha \in K)(\forall x \in E)\ f(\alpha\ x) = \alpha\ f(x)$

Definição: Sejam p e n dois números inteiros positivos. Chama-se matriz do tipo $p \times n$ sobre um corpo K, a um quadro em que pn elementos de K se dispõem em p filas horizontais de n elementos cada uma (chamadas linhas da matriz) e, consequentemente, n filas verticais de p elementos cada uma (chamadas colunas da matriz). Representa-se por $A = \lfloor a_{ij} \rfloor$, com $i=1,...,p$ e $j=1,...,n$ a matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}$$

Observemos que em cada elemento a_{ij} de A, o primeiro índice indica a linha em que a_{ij} figura e o segundo índice a coluna a que o referido elemento pertence.

Definição: Uma matriz $A \in M_{n\times n}(K)$ diz-se <u>invertível</u> quando existe uma matriz $A' \in M_{n\times n}(K)$ tal que $AA' = A'A = Id$.

Se A é invertível, a matriz A' é única, toma o nome de <u>matriz inversa</u> de A e representa-se por A^{-1}.

Definição: Dada uma matriz $A = \lfloor a_{ij} \rfloor \in M_{p\times n}(K)$, podemos construir uma nova matriz cuja coluna k é a linha k de A, para $k \in \{1,...,p\}$.A matriz assim obtida é claramente do tipo $n \times p$, representa-se por A^t e designa-se por <u>matriz transposta de *A*</u>. Rigorosamente, chama-se matriz transposta de A à matriz $A^t = [b_{ij}]$, em que $b_{ij} = a_{ji}$, para quaisquer i $\in$ $\{1,...,n\}$ e $j \in \{1,...,p\}$.

Definição: Seja $f : E \to E'$ uma aplicação linear entre dois espaços vectoriais de dimensão finita sobre um corpo K. Seja $\vec{e}_1, \vec{e}_2,...,\vec{e}_n$ uma base de E e seja $\vec{e}_1^{'}, \vec{e}_2^{'},...,\vec{e}_p^{'}$ uma base E'. A aplicação f através das imagens $f(\vec{e}_1), f(\vec{e}_2),..., f(\vec{e}_n)$.

$$
\begin{array}{l}
E \xrightarrow{f} E' \\
\vec{e}_1 \longrightarrow f(\vec{e}_1) = a_{11}\vec{e}_1^{'} + a_{21}\vec{e}_2^{'} + ... + a_{p1}\vec{e}_p^{'} \\
\vec{e}_2 \longrightarrow f(\vec{e}_2) = a_{12}\vec{e}_1^{'} + a_{22}\vec{e}_2^{'} + ... + a_{p2}\vec{e}_p^{'} \\
\vdots \\
\vec{e}_n \longrightarrow f(\vec{e}_n) = a_{1n}\vec{e}_1^{'} + a_{2n}\vec{e}_2^{'} + ... + a_{pn}\vec{e}_p^{'}
\end{array}
$$

Chamamos <u>matriz da aplicação linear</u> f, em relação às bases consideradas, à matriz

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix} = \left[a_{ij}\right]_{\substack{i=1,2,\dots,p \\ j=1,2,\dots,n}}$$

Se $E=E'$ e a base escolhida é a mesma para *E* como domínio e como espaço de chegada, diremos que *A* é a matriz de *f* em relação a essa base.

Nas condições anteriores, sendo $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ as componentes de $\vec{x} \in E$ em relação à base $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n$, então as componentes de $f(\vec{x})$, em relação à base $\vec{e}_1^{\,'}, \vec{e}_2^{\,'}, \dots, \vec{e}_p^{\,'}$, são

$$\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} a_{pj}x_j\right)$$

Pondo

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

as componentes de $f(\vec{x})$ obtêm-se a partir de *A* e *X*. Convenciona-se dizer que as componentes de $f(\vec{x})$ resultam de "multiplicar *A* por *X*":

$$AX=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \cdots & a_{pn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \cdots \\ a_{p1}x_1 + a_{p2}x_2 + \cdots + a_{pn}x_n \end{bmatrix}$$

Definição: Uma aplicação linear $L:\Re^n \to \Re^n$ é dita <u>ortogonal</u> se $< Lx, Ly > = < x, y >$ para todos x, y $\in$ $\Re^n$, isto é, se preserva o produto escalar.

RESOLUÇÃO DO EXERCÍCIO:

Seja $A \in$ GL(n, $\Re$) e $L:\Re^n \to \Re^n$ a aplicação linear correspondente.

Pretende-se mostrar que L é ortogonal se e só se $A^{-1} = A^t$.

- L ortogonal $\Rightarrow$ $A^{-1} = A^t$

Considerando $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, ..., \vec{e}_n\}$, em que $\vec{e}_i = (0,0,\ldots,\underset{\substack{\downarrow \\ \text{Coordenada } i}}{1},0,\ldots 0)$, a base canónica de $\Re^n$, tem-se que

$$L(\vec{e}_i) = \vec{b}_i = (b_i^1, \ldots, b_i^n) \quad i = 1, \ldots, n$$

Assim sendo, a matriz A tem a seguinte representação

$$A = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_2^1 & \cdots & b_n^1 \\ b_1^2 & b_2^2 & \cdots & b_n^2 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_1^n & b_2^n & \cdots & b_n^n \end{bmatrix} = \left[b_i^j\right]_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,n}}$$

e a sua transposta

$$A^t = \begin{bmatrix} b_1^1 & b_1^2 & \cdots & b_1^n \\ b_2^1 & b_2^2 & \cdots & b_2^n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_n^1 & b_n^2 & \cdots & b_n^n \end{bmatrix} = \left[b_j^i\right]_{\substack{i=1,2,\ldots,n \\ j=1,2,\ldots,n}}$$

Mostrar que $A^{-1} = A^t \Leftrightarrow A^{-1}A = A^t A \Leftrightarrow Id = A^t A$.

$A^t A = [a_{ij}]_{\substack{i=1,\dots,n \\ j=1,\dots,n}}$ onde $a_{ij} = < linha\ i\ de\ A^t,\ coluna\ j\ de\ A >$.

Então, $a_{ij} = < \vec{b}_i, \vec{b}_j > = < L(\vec{e}_i), L(\vec{e}_j) > \underset{\substack{\downarrow \\ \text{L ortogonal}}}{=} < \vec{e}_i, \vec{e}_j > = \begin{cases} 1 & se\ \ i = j \\ 0 & se\ \ i \neq j \end{cases}$

$\therefore A^t A = Id$

$\therefore A^t = A^{-1}$

- $A^{-1} = A^t \Rightarrow L$ ortogonal

Queremos mostrar que L é ortogonal, isto é, $< Lx, Ly > = < x, y >,\ \ \forall x, y \in \Re^n$.

$$< Lx, Ly > = < Ax, Ay > \underset{\substack{\downarrow \\ < x, y > = x^t y}}{=} (Ax)^t Ay = x^t A^t Ay \underset{\substack{\downarrow \\ A^t A = Id}}{=} x^t y = < x, y >$$

$\therefore L$ é ortogonal

c.q.d.

<u>Exercício resolvido por</u>:

Ana Paula Soares

Eduarda Duarte

Sara Cruz

Sónia Silva

Turma P 4