Exercício 13 (nº 11) *Seja uma $L : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$*aplicação linear*. Se L é uma imersão isométrica então é injectiva, o que equivale a dizer que o núcleo é trivial:* $\ker L = \{0\}$*; como (Dimensão do domínio)= (Dimensão do núcleo)+(Dimensão da imagem), temos que a dimensão da imagem de L é n e portanto L é sobrejectiva, logo uma isometria. Reciprocamente se L é uma isometria então, pela definição, é uma imersão isométrica. Temos assim provado que $i) \Leftrightarrow ii)$. L ser imersão isométrica traduz-se por*

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ , \ \|x - y\| = \|Lx - Ly\|$$

Em particular, fazendo $y = 0$, como $L(0) = 0$ temos a condição $iii)$; reciprocamente se $\forall x \in \mathbb{R}^n \ , \ \|x\| = \|Lx\|$, temos que

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \ , \ \|x - y\| = \|L(x - y)\| = \|Lx - Ly\|$$

a segunda desigualdade devida ao facto de L ser linear, logo $i) \Leftrightarrow iii)$. Temos as seguintes afirmações equivalentes

$$\begin{aligned} \forall x, y &\in \mathbb{R}^n \ , \ \|x - y\| = \|Lx - Ly\| \Leftrightarrow \|x - y\|^2 = \|Lx - Ly\|^2 \\ &\Leftrightarrow \langle x - y, x - y \rangle = \langle Lx - Ly, Lx - Ly \rangle \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \langle x, x \rangle - 2 \langle x, y \rangle + \langle y, y \rangle = \langle Lx, Lx \rangle - 2 \langle Lx, Ly \rangle + \langle Ly, Ly \rangle \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \|x\|^2 - 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|Lx\|^2 - 2 \langle Lx, Ly \rangle + \|Ly\|^2 \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow -2 \langle x, y \rangle = -2 \langle Lx, Ly \rangle \Leftrightarrow \langle x, y \rangle = \langle Lx, Ly \rangle \end{aligned}$$

em que na implicação da penúltima para a última linha se usa o facto de que $\forall x \in \mathbb{R}^n \ , \ \|x\| = \|Lx\|$, o que decorre da primeira linha (L ser imersão isométrica) e de ser $L(0) = 0$; provámos assim que $i) \Leftrightarrow iv)$.

Exercício 14 (nº 12) *Seja $f : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão isométrica. Queremos ver que $f = T_a L$ em que L é linear: é claro que será $a = f(0)$ e como $L = T_{-a} T_a L = T_{-a} f$, L será uma imersão isométrica (sendo a composta de uma imersão isométrica, f, com uma isometria, T_a). Supomos primeiro que é $f(0) = 0$. Seguindo a sugestão dada, seja $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ a base canónica de $\mathbb{R}^m$ e sejam $b_i = f(a_i)$, $i = 1, 2, ..., m$: queremos ver que $\{b_i\}_{i=1,...,m}$ são um conjunto ortonormado de $\mathbb{R}^n$ (não dizemos base porque pode ser $n > m$); analisando a última parte da resolução do exercício nº 11, $i) \Leftrightarrow iv)$, é claro que não usámos a hipótese de que L era linear, mas apenas que $L(0) = 0$: portanto, se $f(0) = 0$, f* ser imersão isométrica é equivalente a preservar o produto escalar*. Se f preserva o produto escalar é claro que envia qualquer conjunto ortonormado num conjunto ortonormado; em particular $\{b_i\}_{i=1,...,m}$ são linearmente independentes e portanto $n \geq m$ ($\mathbb{R}^m$ não pode ser isométricamente imerso num espaço de menor dimensão). Dado $x = (x_1, x_2, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m$ temos que $x = \sum_{i=1}^m x_i a_i$ e como os $\{a_i\}_{i=1,...,m}$ são um* conjunto ortonormado *(neste caso a base canónica) temos que*

$$\forall j = 1, ..., m \ , \langle x, a_j \rangle = \sum_{i=1}^{m} \langle x_i a_i, a_j \rangle = \sum_{i=1}^{m} x_i \langle a_i, a_j \rangle = x_j$$

E portanto

$$x = \sum_{i=1}^{m} \langle x, a_i \rangle a_i$$

Estenda-se $\{b_i\}_{i=1,...,m}$ *a uma base ortonormada de* $\mathbb{R}^n$, $\{b_1, b_2, ..., b_m, b_{m+1}, ..., b_n\}$. *Como* f *preserva o produto escalar, temos que para todo* $i = 1, ..., m$

$$\langle f(x), b_i \rangle = \langle f(x), f(a_i) \rangle = \langle x, a_i \rangle = x_i$$

Como $\{b_1, b_2, ..., b_m, b_{m+1}, ..., b_n\}$ *é uma base ortonormada,*$\forall y = (y_1, ..., y_n) \in \mathbb{R}^n$

$$y = \sum_{i=1}^{n} y_i b_i = \sum_{i=1}^{n} \langle y, b_i \rangle b_i$$

Além disso, é claro que

$$\|y\|^2 = \langle y, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} y_i y_j \langle b_i, b_j \rangle \right) = \sum_{i=1}^{n} y_i^2$$

Em particular para $y = f(x)$, *vem*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} \langle f(x), b_i \rangle b_i = \sum_{i=1}^{n} x_i b_i$$

e como

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 = \|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{m} x_i^2 + \sum_{i=m+1}^{n} x_i^2$$

os coeficientes x_i *para* $i = m+1, ..., n$ *terão de ser todos nulos. Então*

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m} x_i b_i = \sum_{i=1}^{m} x_i f(a_i)$$

Mas esta última expressão diz precisamente que f *é linear!*

O caso geral é agora imediato: se $f(0) = a$, *seja* $L = T_{-a} f$: *como* L *é imersão isométrica e* $L(0) = 0$, *pelo caso anterior* L *é linear; ora* $T_a L = T_a T_{-a} f = idf = f$, *como queríamos.*

Exercício 15 (n^o 13) *Sejam* $X \subset \mathbb{R}^m$ *não-vazio,* $f : X \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma imersão isométrica e* $m \leq n$. *Queremos* estender f *a uma imersão isométrica de* $\mathbb{R}^m$ *(que será única se* X *gera todo o espaço). Podemos, sem perda de generalidade, supor que* $0 \in X$ *e que* $f(0) = 0$*: seja* $a \in X$ *e* $b = f(a)$*; sejam* $Y = X - a = T_{-a}(X)$ *e* $g : Y \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *definida por* $g = T_{-b} f T_a$*: se* γ *é uma extensão de* g *a* $\mathbb{R}^m$, *é claro que* $\varphi = T_b \gamma T_{-a}$ *é uma extensão de* f *a* $\mathbb{R}^m$*; reciprocamente se* φ *for uma extensão de* f, $\gamma = T_{-b} \varphi T_a$ *será uma extensão de* g*: portanto a unicidade da extensão de* g *equivale à unicidade da extensão de* f*; além* *disso, como X gera $\mathbb{R}^m$ se e só se Y também o gera, podemos de facto restringir ao caso $0 \in X$ e $f(0) = 0$.*

Seja $\{a_1, a_2, ...a_k\} \subset X$ um conjunto maximal de vectores linearmente independentes de X e seja S o subespaço vectorial de dimensão k gerado por estes vectores (isto é, S é o subespaço gerado por *X). Começamos por estender f a uma imersão isométrica de S: sejam $b_i = f(a_i)$, $i = 1, 2, ..., k$ e seja $L : S \longrightarrow \mathbb{R}^n$ a aplicação linear definida para $x = \sum_{i=1}^k x_i a_i$ por $f(x) = \sum_{i=1}^k x_i b_i$ (isto é, L é a aplicação linear definida escolhendo para imagens dos vectores da base os $b_i = f(a_i)$); vamos ver que L é a extensão pretendida:*

$$\begin{aligned}
\|a_i\| &= d(a_i, 0) = d(f(a_i), f(0)) = d(b_i, 0) = \|b_i\| \ , \ i = 1, ..., k \\
\forall i, j \ , \ d(a_i, a_j) &= d(b_i, b_j) \Leftrightarrow \|a_i - a_j\| = \|b_i - b_j\| \Leftrightarrow \|a_i - a_j\|^2 = \|b_i - b_j\|^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \langle a_i, a_i\rangle - 2\langle a_i, a_j\rangle + \langle a_j, a_j\rangle = \langle b_i, b_i\rangle - 2\langle b_i, b_j\rangle + \langle b_j, b_j\rangle \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \|a_i\|^2 - 2\langle a_i, a_j\rangle + \|a_j\|^2 = \|b_i\|^2 - 2\langle b_i, b_j\rangle + \|b_j\|^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \langle a_i, a_j\rangle = \langle b_i, b_j\rangle
\end{aligned}$$

Como L é linear e preserva os produtos escalares para os pares de vectores da base $\{a_1, a_2, ...a_k\}$, L preserva os produtos internos em geral, isto é, para todos os pares de vectores $x, y \in S$: para $x = \sum_{i=1}^k x_i a_i$ e $y = \sum_{i=1}^k y_i a_i$ temos

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \sum_{i=1}^k x_i \left(\sum_{j=1}^k y_j \langle a_i, a_j\rangle\right) \\
Lx &= \sum_{i=1}^k x_i L a_i = \sum_{i=1}^k x_i b_i \, , Ly = \sum_{i=1}^k y_i L a_i = \sum_{i=1}^k y_i b_i \\
\langle Lx, Ly\rangle &= \sum_{i=1}^k x_i \left(\sum_{j=1}^k y_j \langle b_i, b_j\rangle\right)
\end{aligned}$$

logo $\langle Lx, Ly\rangle = \langle x, y\rangle$. Se L preserva os produtos escalares dos vectores de S, então L preserva as normas e portanto é uma imersão isométrica (tal como no exercício nº 11). Que L é uma extensão de f é consequência do seguinte lema:

Lema 16 *Num subespaço afim $S \subset \mathbb{R}^m$ de dimensão k, qualquer ponto fica determinado pelas suas distâncias a um conjunto de $k+1$ pontos, $\{a_0, a_1, a_2, ..., a_k\}$, independentes afim.*

Prova. *Sem perda de generalidade (passando ao subespaço associado $S - a_0$) podemos supor que S é subespaço vectorial e que $a_0 = 0$: se $x, y \in S$ temos, por hipótese que $\|x\| = \|y\|$ e que $\|x - a_i\| = \|y - a_i\|$, $i = 1, ..., k$:*

$$\begin{aligned}
\|x - a_i\|^2 &= \|y - a_i\|^2 \Leftrightarrow \\
\langle x, x\rangle - 2\langle x, a_i\rangle + \langle a_i, a_i\rangle &= \langle y, y\rangle - 2\langle y, a_i\rangle + \langle a_i, a_i\rangle \Leftrightarrow \\
\|x\|^2 - 2\langle x, a_i\rangle + \|a_i\|^2 &= \|y\|^2 - 2\langle y, a_i\rangle + \|a_i\|^2 \Leftrightarrow \\
\langle x, a_i\rangle &= \langle y, a_i\rangle
\end{aligned}$$

Se x e y têm os mesmos produtos escalares com os vectores da base, então têm os mesmos produtos escalares com todos os vectores de S: se $w = \sum_{i=1}^{k} w_i a_i$

$$\langle x, w\rangle = \sum_{i=1}^{k} w_i \langle x, a_i\rangle = \sum_{i=1}^{k} w_i \langle y, a_i\rangle = \langle y, w\rangle$$

Em particular considerando os vectores de uma base ortonormada de S, $\{c_1, c_2, ..., c_k\}$, temos

$$x = \sum_{i=1}^{k} \langle x, c_i\rangle c_i = \sum_{i=1}^{k} \langle y, c_i\rangle c_i = y$$

Os dois pontos são iguais! $\blacksquare$

Usando o Lema, podemos verificar que L é de facto uma extensão de f: para $x \in X \subset S$, temos que $d(x, 0) = \|x\| = \|f(x)\| = \|Lx\|$ e $d(f(x), b_i) = d(Lx, b_i)$, $\forall i = 1, ..., k$; se verificarmos que de facto $f(x)$ pertence ao subespaço $L(S)$, de que $\{b_1, ..., b_k\}$ é uma base, pelo Lema será $f(x) = Lx$: ora, pela prova do Lema, é claro (independentemente de sabermos ou não se $f(x) \in L(S)$), que se $\|f(x)\| = \|Lx\|$ e $d(f(x), b_i) = d(Lx, b_i)$, $\forall i = 1, ..., k$, os produtos escalares de $f(x)$ e Lx com qualquer vector $w \in L(S)$ são iguais: considerando uma base ortonormada $\{c_1, ..., c_k\}$ de $L(S)$ e estendendo-a a uma base ortonormada de $\mathbb{R}^n$, $\{c_1, ..., c_k, c_{k+1}, ...c_n\}$, temos que

$$\|f(x)\|^2 = \sum_{i=1}^{n} \langle f(x), c_i\rangle^2 = \|Lx\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \langle Lx, c_i\rangle^2 = \sum_{i=1}^{k} \langle f(x), c_i\rangle^2$$

e portanto $\langle f(x), c_i\rangle = 0$, $i = k+1, ..., n$, ou seja $f(x) \in L(S)$.

A extensão final a $\mathbb{R}^m$ de L é fácil: seja $\{a_1, a_2, ..., a_k, d_{k+1}, ..., d_m\}$ uma extensão da base $\{a_1, a_2, ..., a_k\}$ de S por um conjunto de vectores ortonormados e ortogonais a S: estenda-se L considerando a base ortonormada anterior, $\{c_1, ..., c_k, c_{k+1}, ...c_n\}$, e definindo uma aplicação linear $J : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $Ja_i = La_i = b_i$, $i = 1, ..., k$ e $Jd_{k+i} = c_{k+i}$, $i = 1, ..., m-k$.