Exercício 1 (n^o 19) *Seja A um espaço-afim e $a_1, a_2, ...a_k \in A$. Queremos provar que*

$$\forall \lambda_1, ..., \lambda_k \in \mathbb{R} \ : \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1 \ , \ \sum_{i=1}^{k} \lambda_i a_i \in A$$

Provamos por indução em k. A indução começa para $k = 2$, pela definição de espaço-afim. Suponhamos provado para $k-1$. Provamos para k: se $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$, um dos λ_i é diferente de 1, digamos que é λ_k. Seja

$$b = \sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_k} a_i$$

Ora

$$\sum_{i=1}^{k-1} \frac{\lambda_i}{1-\lambda_k} = \frac{1}{1-\lambda_k} \sum_{i=1}^{k-1} \lambda_i = \frac{1}{1-\lambda_k}(1-\lambda_k) = 1$$

Por hipótese de indução, $b \in A$ e pela definição de espaço afim $(1-\lambda_k)b + \lambda_k a_k \in A$. Mas

$$(1-\lambda_k)b + \lambda_k a_k \in A = \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + ... + \lambda_k a_k$$

Está concluído o exercício.

Exercício 2 (n^o 20) *Seja A um espaço-afim e $a, b \in A$, arbitrários. Queremos ver que:*

a) *$A - a = \{x - a : x \in A\}$ é um subespaço linear (vectorial), isto é, que é fechado para a soma de vectores e para o produto de vectores por escalares; ou seja que*

$$\begin{aligned} \forall x, y &\in A \ \exists z \in A : (x-a) + (y-a) = z - a \\ \forall x &\in A \ , \ \forall \lambda \in R \ , \ \exists z \in A : \lambda(x-a) = z - a \end{aligned}$$

Ora

$$\begin{aligned} (x-a) + (y-a) &= z - a \Leftrightarrow x + y - a = z \\ \lambda(x-a) &= z - a \Leftrightarrow \lambda x + (1-\lambda)a = z \end{aligned}$$

Temos que $x + y - a \in A$, pelo exercício anterior já que os coeficientes da soma são $+1, +1, -1$, e $\lambda x + (1-\lambda)a \in A$ pela definição de espaço afim.

b) *$A - a = A - b$. Que $A - a \subset A - b$, ou seja,$\forall x \in A \ , \ \exists y \in \dot{A} : x - a = y - b$: ora $x - a = y - b \Longleftrightarrow x - a + b = y$ e de novo pelo exercício anterior, $x - a + b \in A$. A inclusão contrária é perfeitamente análoga.*

Exercício 3 (n^{o}21) *Este exercício tem uma resolução, por indução em k, perfeitamente análoga à do exercício n^o 19.*

Exercício 4 (n^o 22) *Sejam $A \subset \mathbb{R}^n, B \subset \mathbb{R}^m$ subespaços afim, $a \in A$, $b \in B$.*

a) Seja $L : A - a \longrightarrow B - b$ uma aplicação linear; a aplicação $A_L : A \longrightarrow B$ definida por $A_L(x) = L(x-a) + b$ é uma aplicação afim: sejam $x, y \in A$ e $\lambda \in \mathbb{R}$; queremos ver que

$$\begin{aligned} A_L(\lambda x + (1-\lambda)y) &= \lambda A_L x + (1-\lambda) A_L y \\ A_L(\lambda x + (1-\lambda)y) &= L((\lambda x + (1-\lambda)y) - a) + b = L(\lambda(x-a) + (1-\lambda)(y-a)) + b = \\ &= \lambda L(x-a) + (1-\lambda)L(y-a) + b = \\ &= \lambda(L(x-a)+b) + (1-\lambda)(L(y-a)+b) = \\ &= \lambda A_L x + (1-\lambda) A_L y \end{aligned}$$

b) Seja $f : A \longrightarrow B$ uma aplicação afim; $L_f : A - a \longrightarrow B - b$ definida por $L_f(x) = f(x+a) - f(a)$ é uma aplicação linear e $A_{L_f} = f$: queremos ver que $\forall x, y \in A - a$, $\forall \lambda \in R$, $L_f(x+y) = L_f(x) + L_f(y)$ e $L_f(\lambda x) = \lambda L_f(x)$.

$$L_f(x+y) = f(x+y+a) - f(a) = [f((x+a)+(y+a)-a)] - f(a)$$

Ora $(x+a)+(y+a)-a$ é soma de três elementos de A com coeficientes $+1, +1, -1$, logo, como f é aplicação afim e pelo exercício n^{o}21

$$f((x+a)+(y+a)-a) = f(x+a) + f(y+a) - f(a)$$

Então

$$\begin{aligned} L_f(x+y) &= [f(x+a) + f(y+a) - f(a)] - f(a) = \\ &= [f(x+a) - f(a)] + [f(y+a) - f(a)] = L_f(x) + L_f(y) \end{aligned}$$

Analogamente temos

$$\begin{aligned} L_f(\lambda x) &= f(\lambda x + a) - f(a) = [f(\lambda(x+a) + (1-\lambda)a)] - f(a) = \\ &= [\lambda f(x+a) + (1-\lambda) f(a)] - f(a) = \lambda f(x+a) - \lambda f(a) = \\ &= \lambda(f(x+a) - f(a)) = \lambda L_f(x) \end{aligned}$$

Finalmente temos que

$$\begin{aligned} A_{L_f}(x) &= L_f(x-a) + b = [f((x-a)+a) - f(a)] + b = \\ &= f(x) - f(a) + b \end{aligned}$$

tomando $b = f(a)$, temos o resultado.

Exercício 5 (n^o 25) *Se $a, b \in \mathbb{R}^n$ com $a \neq b$, então $B = \{x : d(x,a) = d(x,b)\}$ é um hiperplano de $\mathbb{R}^n$: recorde-se primeiro que, como está escrito nas notas antes deste exercício, um hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$ é dado por*

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x - a, b \rangle = 0\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, b \rangle = \langle a, b \rangle = t\}$$

em que b é um vector ortogonal ao subespaço linear $H-a$, $a \in H$, paralelo a H (podemos tomar $\|b\|=1$), ou seja, é o conjunto dos pontos que têm a mesma projecção sobre um determinado vector b.

$$
\begin{aligned}
d(x,a) &= d(x,b) \Leftrightarrow \|x-a\| = \|x-b\| \Leftrightarrow \|x-a\|^2 = \|x-b\|^2 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \langle x-a, x-a\rangle = \langle x-b, x-b\rangle \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \langle x,x\rangle - 2\langle a,x\rangle + \langle a,a\rangle = \langle x,x\rangle - 2\langle b,x\rangle + \langle b,b\rangle \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow -2\langle a,x\rangle + 2\langle b,x\rangle = 2\langle x, b-a\rangle = \langle b,b\rangle - \langle a,a\rangle \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \langle x, b-a\rangle = \frac{\langle b,b\rangle - \langle a,a\rangle}{2} = \left\langle b-a, \frac{b+a}{2}\right\rangle \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \langle x, b-a\rangle - \left\langle \frac{b+a}{2}, b-a\right\rangle = 0 \Leftrightarrow \\
&\Leftrightarrow \left\langle x - \frac{b+a}{2}, b-a\right\rangle = 0
\end{aligned}
$$

Temos portanto que B é um hiperplano que passa pelo ponto médio do segmento $\overline{ab}$, $\frac{b+a}{2}$, e é ortogonal ao vector $b-a$.

Exercício 6 (n^o 26) *Seja H um hiperplano em $\mathbb{R}^n$. Todo $x \in \mathbb{R}^n$ se pode escrever de* forma única *como $x = y + z$ com $y \in H$ e $z \perp (H-y)$: seja H dado por $H = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, b\rangle = t\}$ com $\|b\| = 1$ e $b \perp H-a$, $a \in H$ (recorde-se, exercício n^o 20 b), que $H-a = H-y$, $\forall y \in H$); dado $x \in \mathbb{R}^n$, considere-se a projecção de x sobre b, $pr_b^x = \langle x,b\rangle b$, e faça-se $z = pr_b^x - tb = (\langle x,b\rangle - t)b$; faça-se finalmente $y = x - z$; é claro que z, sendo um múltiplo escalar de b é ortogonal a $H-a$; resta ver que de facto $y \in H$, ou seja que $\langle y,b\rangle = t$:*

$$
\begin{aligned}
\langle y,b\rangle &= \langle x-z, b\rangle = \langle x - (\langle x,b\rangle - t)b, b\rangle = \\
&= \langle x,b\rangle - \langle(\langle x,b\rangle - t)b, b\rangle = \langle x,b\rangle - (\langle x,b\rangle - t)\langle b,b\rangle = \\
&= \langle x,b\rangle - (\langle x,b\rangle - t)\|b\|^2 = \langle x,b\rangle - (\langle x,b\rangle - t) = t
\end{aligned}
$$

Que a decomposição é única: se $x = y + z = y' + z'$ com $y, y' \in H$ e $z, z' \perp H-y$, temos que por um lado $z - z' = y' - y$ e, por outro,$(z-z') \perp H-y$ ou seja $\langle z-z', y'-y\rangle = 0$: mas então $\|z-z'\| = \|y'-y\| = 0$ e portanto $z - z' = y' - y = 0$, logo $z = z'$ e $y = y'$.

Nota 7 (Definição de R_H) *Nas notas está definida a reflexão R_H num hiperplano $H \subset \mathbb{R}^n$: para $x \in \mathbb{R}^n$ escrito nas condições anteriores como $x = y + z$, definimos*

$$R_H x = y - z$$

Podemos verificar facilmente que $R_H \in I(\mathbb{R}^n)$: sejam $x = y + z$ e $x' = y' + z'$ dois pontos arbitrários, com aquela representação: queremos ver que $\|x - x'\| = \|R_H x - R_H x'\| \Leftrightarrow$

$\|x-x'\|^2 = \|R_Hx - R_Hx'\|^2$; ora $\|x-x'\|^2 = \|(y-y')+(z-z')\|^2$ e $z-z'$ é ortogonal a $y-y'$; se tivermos dois vectores ortogonais A, B, é claro que

$$\begin{aligned} \|A+B\|^2 &= \langle A+B, A+B\rangle = \langle A,A\rangle + 2\langle A,B\rangle + \langle B,B\rangle = \\ &= \langle A,A\rangle + 0 + \langle B,B\rangle = \|A\|^2 + \|B\|^2 \end{aligned}$$

Temos então que

$$\|x-x'\|^2 = \|y-y'\|^2 + \|z-z'\|^2$$

Analogamente, $R_Hx - R_Hx' = (y-z)-(y'-z')$ logo

$$\|R_Hx - R_Hx'\|^2 = \|(y-y')+(z'-z)\|^2 = \|y-y'\|^2 + \|z'-z\|^2$$

e como $\|z-z'\| = \|z'-z\|$ temos o resultado.

Podemos verificar também que R_H é isometria, usando directamente as expressões analíticas a deduzir nos exercícios nº 28,29.

Exercício 8 (n^o 28) *Por definição, para $x = y+z$ com $y \in H$ e $z \perp H - y$, $R_Hx = y - z = x - 2z$; basta-nos recordar como no exercício anterior obtivemos z: $z = pr_b^x - tb = (\langle x,b\rangle - t)b$, com $z \perp H - y$ e $\|b\| = 1$; então*

$$R_Hx = x - 2z = x - 2(\langle x,b\rangle - t)b$$

Como agora estamos a supor $0 \in H$, é $t = 0$, logo temos a fórmula pedida.

Exercício 9 (n^o 29) *É uma generalização imediata do exercício anterior: se $H = \{x : \langle a,x\rangle = t\}$, basta substituir a pelo vector unitário $b = a/a$:*

$$\langle a,x\rangle = t \Leftrightarrow \left\langle \frac{a}{\|a\|}, x\right\rangle = \frac{1}{\|a\|}\langle a,x\rangle = \frac{t}{\|a\|}$$

logo $H = \left\{x : \left\langle \frac{a}{\|a\|}, x\right\rangle = \frac{t}{\|a\|}\right\}$; substituindo na fórmula do exercício anterior a por $a/\|a\|$ e t por $t/\|a\|$, obtemos

$$\begin{aligned} R_Hx &= x - 2z = x - 2(\langle x,b\rangle - t)b = \\ &= x - 2\left(\left\langle x, \frac{a}{\|a\|}\right\rangle - \frac{t}{\|a\|}\right)\frac{a}{\|a\|} = \\ &= x - 2\frac{1}{\|a\|}\left(\langle x,a\rangle - t\right)\frac{a}{\|a\|} = \\ &= x - 2\left(\langle x,a\rangle - t\right)\frac{a}{\|a\|^2} \Leftrightarrow \\ R_Hx &= x - 2\left(\langle x,a\rangle - t\right)\frac{a}{\langle a,a\rangle} \end{aligned}$$

que é a fórmula pretendida.

Exercício 10 (n^o 33) *Este exercício dá a prova de um teorema essencial (Teorema 32 das notas) no estudo das isometrias dos espaços euclidianos. Vamos começar por estabelecer um resultado que é uma variação, e consequência, do Teorema 16:*

Lema 11 *Seja $A \subset \mathbb{R}^m$ um subespaço afim de dimensão k e $f : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ uma imersão isométrica; então f é completamente determinada pelas imagens de $k+1$ pontos $a_0, a_1, ..., a_k \in A$, independentes afim.*

Prova. *Note-se que A é naturalmente isométrico a $\mathbb{R}^k$;seja $S = A - a_0$ o subespaço linear associado a A: tem dimensão k e uma base será $\{b_i = a_i - a_0\}_{i=1,2,...,k}$. Seja $\{c_i\}_{i=1,2,...k}$ uma base ortonormada para S (que pode ser obtida da base $\{b_i\}$ pelo processo de* Gram-Schmidt*); é claro que $g : \mathbb{R}^k \longrightarrow S$ dada por $(x_1, x_2, ..., x_k) \longrightarrow \sum_{i=1}^k x_i c_i$ é uma isometria linear (portanto um isomorfismo linear); considere-se $h = T_{a_0} g$ que é isometria entre $\mathbb{R}^k$ e A e sejam $a'_i = h^{-1}(a_i)$, $i = 0, 1, ..., k$ ($a'_0 = 0$), que são independentes porque g é isomorfismo linear; pelo Teorema 16, a imersão isométrica $j : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $j = f \circ h$ fica completamente determinada pelas $k+1$ imagens $j(a'_i)$, $i = 0, 1, ..., k$: então se $f' : A \longrightarrow \mathbb{R}^n$ fosse outra imersão isométrica com $f'(a_i) = f(a_i)$ teriamos $f \circ h(a'_i) = f' \circ h(a'_i)$ logo $f \circ h = f' \circ h$: compondo à direita com h^{-1} temos que $f = f'$.*
■

Seja $f \in I(\mathbb{R}^n)$ tal que a sua restrição a um subespaço afim, A, de dimensão $n - r$ é a identidade (f fixa A); a prova é feita por indução em r:

Se $r = 1$, temos que A é um hiperplano; sejam $a_0, a_1, ..., a_{n-1} \in A$, n pontos independentes afim e seja $a = a_n \notin A$. Se $f(a) = a$, então f fixa os $n+1$ pontos independentes afim $a_0, a_1, ..., a_{n-1}, a_n$ e portanto, pelo Teorema 16, $f = id$ que é o produto de $0 \leq 1$ reflexões em hiperplanos. Se $f(a) = b \neq a$, seja H o bissector ortogonal do segmento $\overline{ab}$, que é (exercício n^o 25) um hiperplano pelo ponto médio e ortogonal ao segmento. Se $x \in A$, temos que $f(x) = x$ e portanto $d(x, a) = d(f(x), f(a)) = d(x, b)$ ou seja, $x \in H$: então $A \subset H$ e portanto $A = H$. Considere-se $g = R_H f$: como f e R_H fixam $A = H$, então g fixa H; além disso é claro que $g(a) = R_H f(a) = R_H b = a$: estamos pois no caso anterior e portanto $g = id$: então $f = R_H^{-1} = R_H$ ou seja, f é uma reflexão no hiperplano A.

Por hipótese de indução suponhamos provado para r e provemos para $r+1$: seja então A um espaço afim de dimensão $n - (r+1) = n - r - 1$ e sejam $a_0, a_1, ..., a_{n-r-1} \in A$, $n - r$ pontos independentes afim e seja $a = a_{n-r} \notin A$. Se $f(a) = a$, então como f fixa os $n - r + 1$ pontos $a_0, a_1, ..., a_{n-r-1}, a_{n-r}$, pelo Lema, f fixa o subespaço afim B de dimensão $n - r$,gerado por esses pontos: por hipótese de indução para r, $f = R_{H_k} R_{H_{k-1}} ... R_{H_2} R_{H_1}$, em que H_i , $i = 1, ..., k$ são hiperplanos que contêm B, e portanto A, e $k \leq r \leq r+1$. Se $f(a) = b \neq a$, consideremos como antes $g = R_H f$, em que H é o bissector ortogonal de $\overline{ab}$: então g fixa B e, como atrás, $g = R_{H_k} R_{H_{k-1}} ... R_{H_2} R_{H_1}$: então $f = R_H R_{H_k} R_{H_{k-1}} ... R_{H_2} R_{H_1}$ é o produto de $k+1 \leq r+1$ reflexões em hiperplanos que contêm A.

Exercício 12 (n^o 34) *Seja* $f \in I(\mathbb{R}^n)$ *e* $H_1, H_2, ..., H_j$ *hiperplanos tais que* $f = R_{H_j} R_{H_{j-1}} ... R_{H_2} R_{H_1}$*; então* f *é* directa *ou* inversa *conforme* j *é par ou ímpar, respectivamente; recorde-se que* f *diz-se par ou ímpar, conforme a sua parte ortogonal tem ou não determinante* 1*: se* $f = T_a L$ *com* L *aplicação ortogonal,* f *é* par *se* $L \in SO(n) \Leftrightarrow \det L = 1$*, caso contrário* $(L \in O(n) - SO(n) \Leftrightarrow \det L = -1)$ f *é ímpar.* *Comecemos por ver que* a parte ortogonal do produto de duas isometrias é o produto das partes ortogonais*: dadas* $f, g \in I(\mathbb{R}^n)$*, com* $f = T_a L$, $g = T_b M$, $L, M \in O(n)$*, temos que* $\forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} gf(x) &= T_b M(Lx + a) = T_b(MLx + Ma) = MLx + (Ma + b) = \\ &= MLx + c = T_c MLx \ , \ (c = Ma + b) \end{aligned}$$

Pela unicidade da decomposição em parte ortogonal e translação, temos provada a afirmação anterior.

Como a aplicação $O(n) \longrightarrow \{\pm 1\}$ *dada por* $L \longrightarrow \det L$ *é um homomorfismo de grupos* $(\Leftrightarrow SO(n)$ *é um subgrupo normal de índice* $2)$*, temos que o produto de duas isometrias directas ou o produto de duas isometrias inversas é uma isometria directa, e que o produto de uma isometria directa com uma inversa é uma isometria inversa. Em face disto, para resolver o exercício basta-nos verificar que* uma reflexão é uma isometria inversa*: seja* $H \subset \mathbb{R}^n$ *um hiperplano e* $S = H - a$, $a \in H$ *o subespaço linear associado; como se observa nas notas, antecendo o enunciado do exercício, se* $\{a_{1,} a_{2,} ..., a_{n-1}, a_n\}$ *é uma base ortonormal de* $\mathbb{R}^n$ *tal que* $\{a_{1,} a_{2,} ..., a_{n-1}\}$ *é uma base para* S*,* $R_S \in O(n)$ *e a sua matriz relativamente àquela base é*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \mathit{0} \\ & \mathit{0} & 1 & \\ & & & -1 \end{bmatrix}$$

logo $\det A = -1$*; temos, assim, que* R_S *é uma isometria inversa; ora, verifica-se facilmente que* $R_H = T_a R_S T_{-a}$*: se* $x = y + z$ *com* $y \in H$ *e* $z \perp S$*,* $T_{-a} x = x - a = (y - a) + z$ *, logo, pela definição de reflexão,* $R_S T_{-a} x = (y - a) - z$*, e então* $T_a R_S T_{-a} x = [(y - a) - z] + a = y - z = R_H x$*. Temos então que* $R_H = T_a R_S T_{-a} = T_b R_S$, $(b = a + R_S(-a))$*, logo* R_H *é uma isometria inversa.*