Exercício 2.1 - 8)

Queremos provar que se α é uma isometria do plano e l é uma recta, <u>então existe</u> uma recta m tal que para todo o ponto P de l, o ponto médio do segmento $\overline{P\alpha(P)}$ está em m (Teorema de Hjelmslev).

Pela resolução do exercício 36), sabemos que as isometrias de $\Re^2$ são de quatro tipos: translações, reflexões, rotações ou reflexões deslizantes.

Convém, antes de mais, notar que qualquer isometria envia pontos colineares em pontos colineares (e portanto rectas em rectas).

Sejam A, B, C $\in$ l.

$$A \in \overline{BC} \Leftrightarrow \|BA\| + \|AC\| = \|BC\|$$

Como α é uma isometria, então α preserva distâncias, logo:

$$\Rightarrow \|\alpha(B)\alpha(A)\| + \|\alpha(A)\alpha(C)\| = \|\alpha(B)\alpha(C)\|$$
$$\Rightarrow \alpha(A) \in \overline{\alpha(B)\alpha(C)}$$

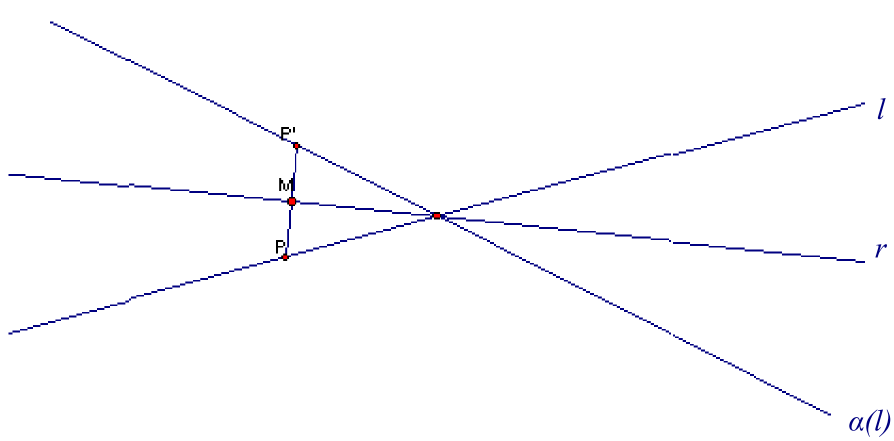
Vamos, então, mostrar a existência da recta *m* para cada um dos tipos de isometria de $\Re^2$.

a) Se α é uma reflexão, $R_r(l)$:

Por definição de reflexão em $\Re^2$, uma reflexão numa recta *r*, envia cada ponto *P* no seu simétrico, *P'* = $\alpha(P)$, relativamente a *r*.

Assim, se *l* = *r*, então *P'* coincide com *P* e portanto, a recta *m* pedida é a própria recta *l*.

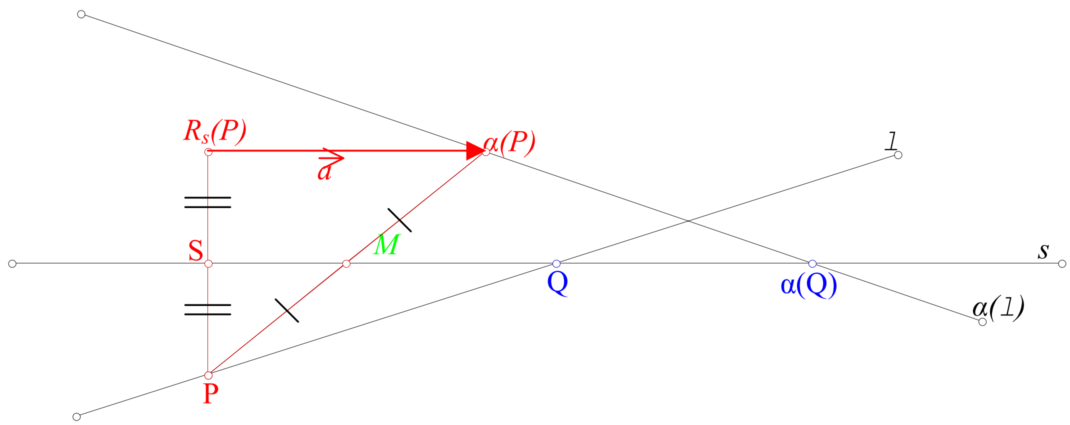
Se $l \neq r$, então $P \notin r$ e *P'* é determinado pela condição de *r* ser a mediatriz do segmento $\overline{PP'}$ e, portanto *r* passa por todos os pontos médios de $\overline{P\alpha(P)}$, $\forall P \in l$; logo a recta *m* procurada é a recta de reflexão *r*.



b) Se α é uma reflexão deslizante:

Por definição, se α é uma reflexão deslizante, então $\alpha = R_s T_a = T_a R_s$ em que a é um vector paralelo à recta s.

Consideremos a seguinte figura, onde P é um qualquer ponto de l:



Sejam S o ponto de intersecção da recta s com $\overline{PR_s(P)}$ e M o ponto de intersecção da recta s com $P\alpha(P)$. Como $\overline{R_s(P)}$ é a reflexão de P na recta s, em consequência da definição de reflexão, $\|PS\| = \|SR_s(P)\|$.

Considerando os triângulos $\Delta[PSM]$ e $\Delta[PR_s(P)\alpha(P)]$, como $\|PR_s(P)\| = 2\|PS\|$ e $s\ //\ \overline{R_s(P)\alpha(P)}$ (por definição de reflexão) então, em particular, $\overline{SM}\ //\ \overline{R_s(P)\alpha(P)}$, logo pelo Teorema de Tales $\|P\alpha(P)\| = 2\|PM\|$ e, portanto, M é o ponto médio de $\overline{P\alpha(P)}$.

Assim sendo, como para todo o ponto $P \in l$, o ponto médio de $\overline{P\alpha(P)}$ pertence a s, s passa por todos os pontos médio de $\overline{P\alpha(P)}$ e, portanto, a recta m procurada é a recta de reflexão s, da reflexão deslizante.

c) Se α é uma translação, $T_a(l)$:

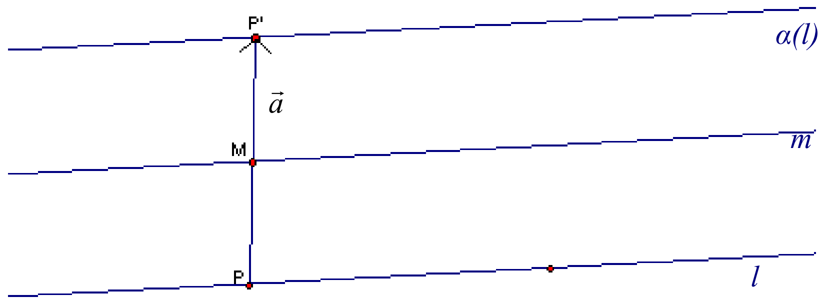
Pela resolução do exercício 36), sabemos que se α é uma translação pelo vector $\vec{a}$, $T_a(l)$, então $\alpha(l)$ é uma recta paralela a l.

Sendo P, um qualquer ponto da recta l, o segmento $\overline{P\alpha(P)}$ tem de comprimento $\|\vec{a}\|$.

Considerando, agora, uma outra translação de l, mas pelo vector $\frac{\vec{a}}{2}$, $T_{a/2}(l) = \alpha'(l)$, obtemos uma outra recta, l'', que é paralela a l e, portanto paralela também a l'.

Por seu lado, o segmento $\overline{P\alpha'(P)}$ tem de comprimento $\frac{\|\vec{a}\|}{2}$, assim como o segmento $\overline{\alpha(P)\alpha'(P)}$, podemos então concluir que *α'(P)* é equidistante de *P* e de *α(P),* $\forall P \in l$.

Concluímos, então, que *α'(l)* passa por todo o ponto médio do segmento $\overline{P\alpha(P)}$, $\forall P \in l$; e portanto *α'(l)* é a recta *m* procurada.



d) Se α é uma rotação, *R(A,θ)*:

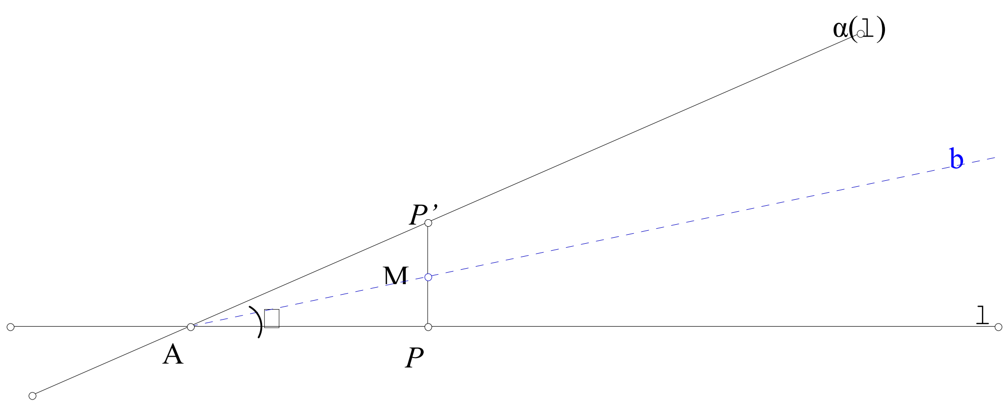
- **1.º Caso:**

Consideremos o caso em que $A \in l$.

Sejam $P \in l$, $\alpha(P) = P'$ e $A = l \cap \alpha(l)$.

Tomando a recta *b* como a bissectriz do ângulo θ, vamos provar que a recta *m* procurada é *b*.

Como $\overline{AP} = \overline{AP'}$, porque α é uma isometria, então o triângulo $[APP']$ é isósceles. Deste modo *b* intersecta o lado $[PP']$ no ponto médio M, uma vez que *b* é a bissectriz do ângulo *θ*.



- **2.º Caso:**

  Suponhamos agora que $A \notin l$.

  Aqui, temos duas situações:

i) Se a recta *l* passa na origem do referencial, *O*:

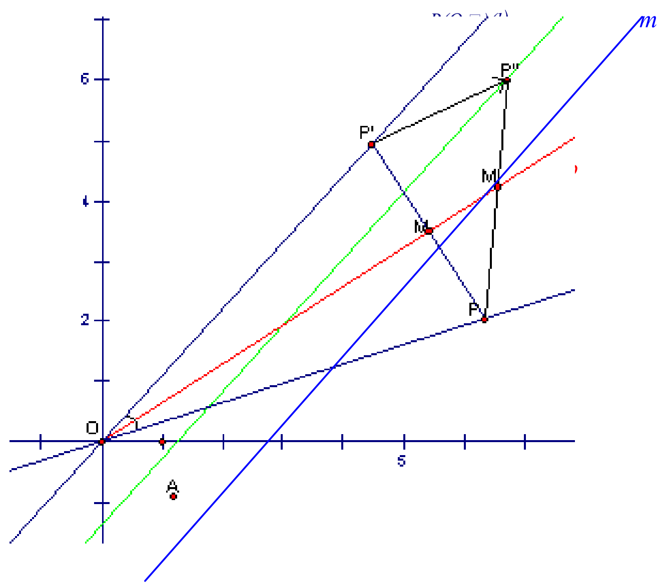
Temos então que:

$\alpha = R(A,\theta) = T_a R(O,\theta) T_{-a} = T_{a+a'} R(O,\theta)$, onde $a' = R(O,\theta)(-a)$ e $O \in l$.

Assim sendo, $R(O,\theta)$ é o caso anterior; e portanto, o ponto médio, *M*, do segmento que une um qualquer ponto, *P*, da recta *l,* a *P'* = $R(O,\theta)$ *(P)* pertence à bissectriz, *b',* do ângulo θ*.*

Teremos agora de considerar, a translação de *P'* segundo o vector *(*$\vec{a}+\vec{a}'$*)*, *P''* = $\alpha(P)$.

Vejamos a seguinte figura:



Considerando o triângulo [*PP'P''*]; se transladarmos o ponto *M* segundo o vector *(*$\vec{a}+\vec{a}'$*)/2* obtemos o ponto *M'*, que é o ponto médio de $\overline{PP''}$, uma vez que $\overline{PP'} = 2\overline{PM}$ e $\overline{P'P''}$ // $\overline{MM'}$, então pelo teorema de Tales $\overline{PP''} = 2\overline{PM'}$, isto é, *M'* é o ponto médio de $\overline{PP''} = \overline{P\alpha(P)}$. Logo a recta *m* procurada, é a translação de *b'* segundo o vector *(*$\vec{a}+\vec{a}'$*)/2.*

ii) Se a recta *l* não passa na origem do referencial, *O*:

Neste caso, transladarmos a recta *l* para a origem, segundo o vector $\overrightarrow{RO}$, onde *R* é um ponto da recta *l,* uma vez que assim obtemos a situação anterior *i)* e, procedemos de igual modo, obtendo, portanto uma recta *r* (paralela à bissectriz); assim sendo, basta transladarmos a recta *r* segundo o vector $\overrightarrow{OR}$ para encontrarmos a recta *m* procurada.

Trabalho realizado por:

Elvira Rios (960301034)

Joana Mota e Sousa (960301047)

Susana Oliveira (010301055)

Vera Costa (010301048)