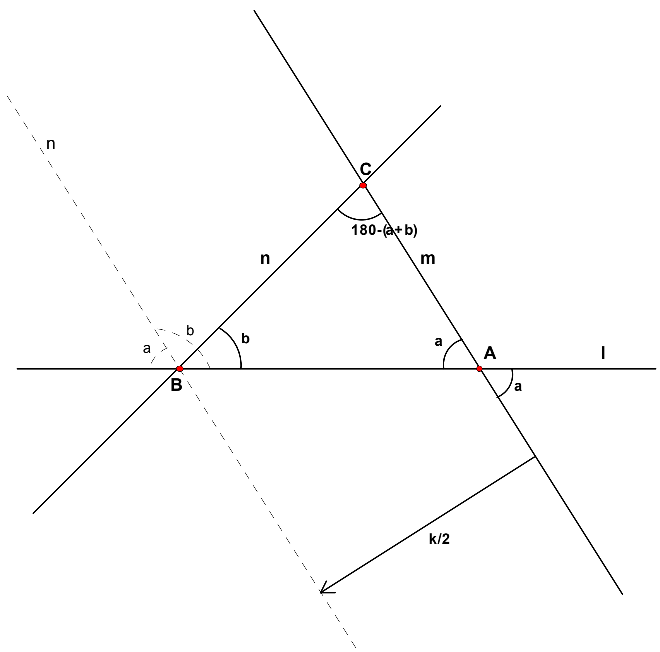
Exercício 19 (nº 2.1 - 23) ***Teorema da Adição de Ângulos para Rotações***

Sejam $\rho_1 = R(A, 2a)$ *e* $\rho_2 = R(B, 2b)$ *duas rotações. Se* $A = B$*, é claro que* $\rho_2\rho_1 = R(A, 2a+2b)$*. Se os centros são distintos,* $A \neq B$*: podemos escrever* $R(A, 2a) = R_l R_m$ *em que* m, l *são duas quaisquer rectas por* A *que façam entre si um ângulo de* a*; analogamente* $R(B, 2b) = R_n R_k$*,* k, n *rectas por* B *com ângulo de* b*. Podemos escolher* $l = k = \overleftrightarrow{AB}$*: então*

$$\rho_2\rho_1 = (R_n R_l)(R_l R_m) = R_n(R_l R_l)R_m = R_n(id)R_m = R_n R_m$$

Com referência à figura seguinte

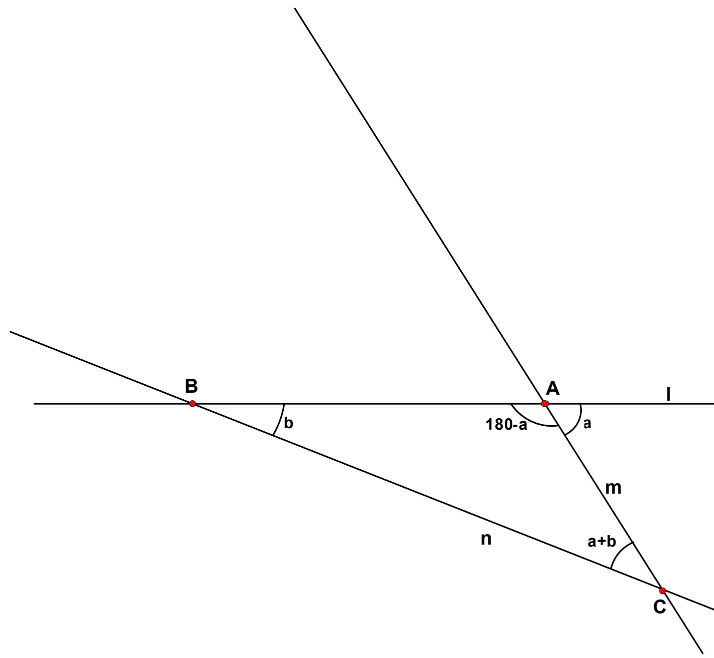


Se $2a + 2b = 2(a + b) = 0(\mathrm{mod}\, 2\pi)$*, ou* $a + b = \pi$ *(a situação na figura) ou* $a + b = 0$ *(*$\Leftrightarrow a = -b$*); em qualquer dos casos equivale a ser* $n \parallel m$ *(a situação representada a tracejado na figura) e então* $R_n R_m = T_k$ *em que* $k \perp m$*. Se* $2(a + b) \neq 0(\mathrm{mod}\, 2\pi)$*, então* n *e* m *são concorrentes num ponto* C*: considerando na figura o triângulo* ABC*, o ângulo em* C *vale* $\pi - (a + b)$*, logo* $R_n R_m$ *é uma rotação do ângulo simétrico (atenção ao sentido da rotação)*

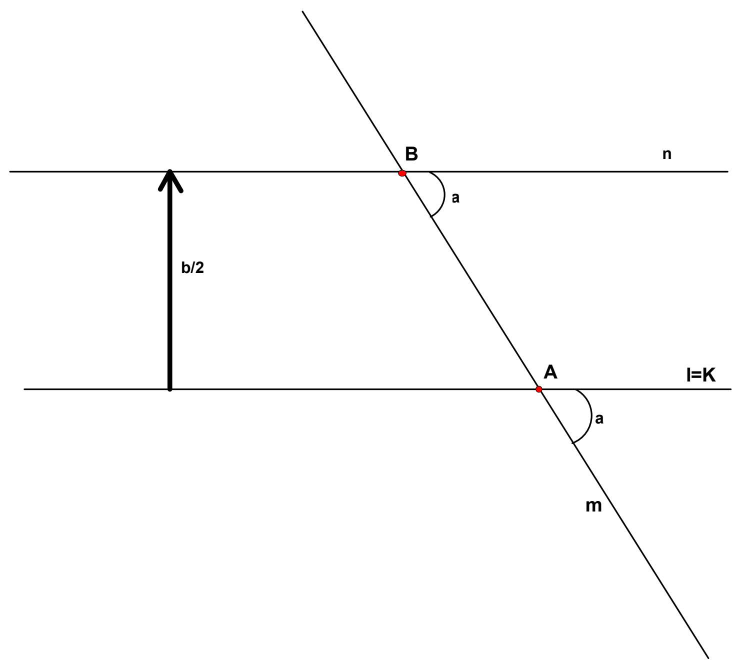
$$2(a + b - \pi) = (2a + 2b) - 2\pi = 2(a + b)(\mathrm{mod}\, 2\pi)$$

(uma rotação de ângulo θ *é o mesmo que uma rotação de ângulo* $\theta \pm 2\pi$*). A figura seguinte é análoga e representa o caso em que* $b < 0$*: no triângulo* ABC*, o ângulo em* C *vale* $\pi - ((\pi - a) + (-b)) = a + b$*.*

Note-se, para futura referência, que se composermos as rotações inversas (rotações pelos ângulos simétricos) $\rho_2^{-1}\rho_1^{-1} = R(B, -2b)R(A, -2a)$*, obtemos as figuras simétricas das anteriores relativamente à recta* l*: assim* $\rho_2^{-1}\rho_1^{-1} = R(C', -2a - 2b)$ *com* $C' \neq C$ *(na verdade será* $C' = R_l(C)$*).*



De forma análoga se vê que uma rotação $R(A,2a)$ seguida (ou precedida) de uma translação T_b, é uma rotação do mesmo ângulo: escrevendo $T_b = R_n R_k$ com $n, k \perp b$, podemos escolher para $R(A,2a) = R_l R_m$ a recta $l = k$, e então $T_b R(A,2a) = R_n R_m$ em que $n \parallel l$; a figura seguinte representa a situação:



Portanto $T_b R(A,2a) = R_n R_m = R(B,2a)$; no caso da rotação ser precedida pela translação é perfeitamente análogo: $R(A,2a)T_b = (R_m R_l)(R_l R_n) = R_m R_n$ (neste caso, na figura anterior será $a < 0$).