Algumas definições necessárias para a resolução do exercício 35

Definição de Grupo:
Seja * uma operação binária em G. Diz-se que $(G,*)$ é um ***grupo*** sse * é associativa, G tem elemento neutro e todo elemento de G tem inverso.

Definição de Subgrupo:
Sejam $(G,*)$ um grupo e $H\subset G$. Diz-se que $(H,*)$ é um ***subgrupo*** de $(G,*)$ sse H é fechado para * e $(H,*)$ é um grupo.

Proposição:
Seja H um subconjunto de um grupo G; H é subgrupo de G sse as três condições seguintes são verificadas:

1. H é fechado para a operação de G;
2. o elemento neutro de G pertence a H;
3. o inverso (*em G*) de qualquer elemento de H também pertence a H.

Definição de Subgrupo Normal:
Seja H um subgrupo de G; diz-se que H é um ***subgrupo normal*** de G sse as classes laterais esquerdas e as classes laterais direitas de G coincidem, isto é, sse para qualquer $a\in G$ se tem $aH=Ha$, em que $aH=\{ah:h\in H\}$.

Proposição:
Seja H um subgrupo de G; então as condições seguintes são equivalentes:

1. $\forall\, a\in G$: $aH=Ha$;
2. $\forall\, a\in G$: $aha^{-1}\in H$.

Definição de Homomorfismo:
Sejam $(G_1,*_1)$ e $(G_2,*_2)$ grupos e $f\colon G_1\to G_2$; diz-se que f é um ***homomorfismo*** (de grupos) sse para quaisquer $x,y\in G_1$, $f(x*_1 y)=f(x)*_2 f(y)$.

Definição de Isomorfismo:

1. Um isomorfismo é um homomorfismo bijectivo.
2. Diz-se que G_1 e G_2 são isomorfos sse existe um isomorfismo de G_1 em G_2.

Teorema Fundamental do Homomorfismo:

Sejam $f: G_1 \to G_2$ um homomorfismo; então f passa ao quociente $G_1/Ker(f)$ e a aplicação

$$\begin{aligned} \bar{f}: \quad & G_1 / Ker(f) \to \mathrm{Im}(f) \\ & xKer(f) \mapsto f(x) \end{aligned}$$

é um isomorfismo.

Definição de Grupo Quociente:

Se H é um subgrupo normal de G, chama-se ***grupo quociente*** de G por H (notação G/H) ao grupo formado pelas classes laterais de H com a operação * definida por $A*B=AB$.

Definição de Produto Directo:

Chama-se ***produto directo dos grupos*** $(G_1, *_1)$ e $(G_2, *_2)$ ao grupo $(G_1 \times G_2, *)$, em que * é definida por $(a,b)*(c,d)=(a*_1 c, b*_2 d)$.

Resolução do Exercício:

Exercício 35:

(a) O objectivo desta alínea é mostrar que:

i. O conjunto das translações $T \subset I(\Re^n)$ é um subgrupo normal de $I(\Re^n)$;

ii. T é isomorfo a $\Re^n$;

iii. $I(\Re^n)/T$ é isomorfo a $O(n)$.

i. T é um subgrupo normal de $I(\Re^n)$ se e só se T é um subgrupo de $I(\Re^n)$ e $\forall g \in I(\Re^n): gT = Tg$ em que $gT = \{gT_\alpha : T_\alpha \in T\}$, isto é, $\forall g \in I(\Re^n) \forall T_\alpha \in T : gT_\alpha g^{-1} \in T$

- T é um subgrupo de $I(\Re^n)$ sse:

(1) T é fechado para a operação induzida do grupo $I(\Re^n)$;

$$\forall T_a, T_b \in T : T_a T_b = T_{a+b} \in T$$

(2) O elemento neutro de $I(\Re^n)$, $id : \Re^n \to \Re^n$ é ainda o elemento neutro de T:

$$\mathrm{x} \mapsto \mathrm{x}$$

$T_0(x) = x + 0 = x = id(x)$.

(3) $\forall T_a \in T : T_a^{-1} = T_{-a}$ ainda pertence a T

Por (1), (2) e (3) T é subgrupo de $I(\Re^n)$.

- Vamos agora provar que o subgrupo T é normal:

$\forall g \in I(\Re^n) \forall T_\alpha \in T : gT_\alpha g^{-1} \in T$
$\forall x \in \Re^n$
$(gT_\alpha g^{-1})(x) = ((T_a L)T_\alpha (T_a L)^{-1})(x) = ((T_a L)T_\alpha (L^{-1}T_{-a}))(x) = (T_a L T_\alpha L^{-1} T_{-a})(x) =$

Pelo Teorema 14 ($g = T_a L$) porque a composição de funções é associativa

$= (T_a L T_\alpha L^{-1})(x - a) = (T_a L T_\alpha)(L^{-1}(x) - L^{-1}(a)) = (T_a L)(L^{-1}(x) - L^{-1}(a) + \alpha) =$

Pelo exercício 11 (L é uma aplicação linear)

$= T_a(LL^{-1}(x) - LL^{-1}(a) + L(\alpha)) = T_a(x - a + L(\alpha)) = T(x - a + L(\alpha) + a) =$
$= T(x + L(\alpha)) = T_{L(\alpha)}(x) \in T$

Portanto L é um subgrupo normal de $I(\Re^n)$.

ii. T é isomorfo a $\Re^n$ se existir um isomorfismo entre T e $\Re^n$.

Consideremos $\begin{array}{llcl} \alpha: & \Re^n & \to & T \\ & a & \mapsto & T_a \end{array}$

α é um isomorfismo sse

- α é um homomorfismo, isto é, $\forall a, a' \in \Re^n : \alpha(aa') = \alpha(a)\alpha(a')$

  - $\alpha(a + a') = T_{a+a'} = T_a T_{a'} = \alpha(a)\alpha(a')$

- α é bijectiva

  - α é injectiva sse $\forall a, a' \in \Re^n : \alpha(a) = \alpha(a') \Rightarrow a = a'$

  $\alpha(a) = \alpha(a') \Leftrightarrow T_a = T_{a'}$

$\forall x \in \Re^n : T_a(x) = T_{a'}(x) \Leftrightarrow x + a = x + a' \Leftrightarrow a = a'$

- α é sobrejectiva sse $(\forall T_a \in T)(\forall a \in \Re^n)(\exists b \in \Re^n) : \alpha(b) = T_a$

$\alpha(b) = T_a \Leftrightarrow T_b = T_a$

$\forall x \in \Re^n : T_b(x) = T_a(x) \Leftrightarrow x + b = x + a \Leftrightarrow b = a$

Basta tomar $a = b$ para que se verifique a igualdade.

Portanto, α é um isomorfismo e T e $\Re^n$ são isomorfos.

iii. Seja

$$\begin{array}{cccc} f: & I(\Re^n) & \to & O(n) \\ & T_a L & \mapsto & L \end{array}$$

um homomorfismo (vamos provar mais tarde).

Pelo teorema fundamental do homomorfismo temos que:

$$\begin{array}{cccc} \overline{f}: & I(\Re^n)/T & \to & O(n) \\ & \alpha T & \mapsto & f(\alpha) \end{array}$$

é um isomorfismo, onde $T = \ker f$ e $\operatorname{Im} f = O(n)$.

Portanto, para mostrar que $\overline{f}: \quad I(\Re^n)/T \quad \to \quad O(n)$ é um isomorfismo, basta mostrar que:

(1) f é um homomorfismo;
(2) $T = \ker f$;
(3) $\operatorname{Im} f = O(n)$ (basta mostrar que f é sobrejectiva).

(1) f é um homomorfismo porque

$$(\forall y, y' \in I(\Re^n))(\forall x \in \Re^n) : f((yy')(x)) = f(((T_a L)(T_{a'} L'))(x))$$

Teorema 14

$\forall a, a' \in \Re^n$ e $\forall L, L' \in O(n)$

$$f(((T_a L)(T_{a'} L'))(x)) = f((T_a L T_{a'} L')(x)) = f(T_a L T_{a'}(L'(x))) = f(T_a L(L'(x)+a)) =$$

Porque a composição de funções é associativa

$$= f(T_a(LL')(x) + L(a)) = f(T_a(LL'(x) + L(a)) = f((LL')(x) + L(a) + a) = f(T_{L(a)+a}((LL')(x))) =$$
$$= (LL')(x) = L(x)L'(x)$$

(2)

$$\begin{aligned} Kerf &= \{T_a \in T, L \in O(n) : \psi(T_a L) = id_{O(n)}\} \\ &= \{T_a \in T, L \in O(n) : L = id_{O(n)}\} = T \end{aligned}$$

Logo, *Kerf* = *T*.

(3)

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} f &= \{\forall L' \in O(n) \exists T_a L \in I(\Re^n) : L' = f(T_a L)\} = \\ &= \{\forall L' \in O(n) \exists T_a L \in I(\Re^n) : L' = L\} \end{aligned}$$

Basta tomar *L'*=*L* para que a função seja sobrejectiva.

(b) Nesta alínea, queremos provar que não existe um isomorfismo entre I($\Re^n$) e o produto directo dos seus subgrupos *T* e $O(n)$,($T \times O(n)$=$\{(T_a, L) : T_a \in T, L \in O(n)\}$).

Vamos, para isso usar a redução ao absurdo;
Suponhamos que existe um isomorfismo $\varphi : T \times O(n) \rightarrow I(\Re^n)$.

Seja $(T_\alpha, L) \in T \times \Re^n$, então temos:

$$\varphi(T_\alpha, L) = \varphi(id, L)\varphi(T_\alpha, id) = fg$$

em que $f, g \in I(\Re^n)$ mas por outro lado,

$$\varphi(T_\alpha, L) = \varphi(T_\alpha, id)\varphi(id, L) = gf$$

Se φ é um isomorfismo a cada objecto corresponderá uma única imagem, ou seja teríamos que ter $fg = gf$,mas isto nem sempre é válido para todas as isometrias.

Por exemplo, seja $f = T_{(2,-1)}$ e $g = R_{x=0}$

$gf(0,0) = R_{x=0}\left(T_{(2,-1)}(0,0)\right) = R_{x=0}(2,-1) = (-2,-1)$

$fg(0,0) = T_{(2,-1)}\left(R_{x=0}(0,0)\right) = T_{(2,-1)}(0,0) = (2,-1)$

Logo não pode existir um isomorfismo entre I($\mathfrak{R}^n$) e o produto directo dos seus subgrupos T e $O(n)$.

Este exercício foi resolvido pelos alunos da **turma P1:**

Ana Margarida Santos
Liliana Isabel Pereira
Liliana Sofia Guerra
Pedro Miguel Pereira
Vasco Moço Mano
Vítor Araújo Rodrigues